Tables de $\mathbb{F}_4$

$4=2^2 \quad \rightarrow \quad$ On définit $\mathbb{F}_4$ comme une extension de $\mathbb{F}_2=\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$:

$$\mathbb{F}_4 \;=\; {}^{\mathbb{F}_2}/_{P} \quad \text{avec} \quad P=X^2+X+1$$

P étant irréductible dans $\mathbb{F}_2$. On note π la projection canonique dans $\mathbb{F}_4$. On a

$$\mathbb{F}_4=\{0=\pi(0), 1=\pi(1), j=\pi(X), j+1\} \quad \text{avec la relation} \quad j^2+j+1=0$$

Table de l'addition dans $\mathbb{F}_4$ et opposés :

$+$	0	1	j	$j+1$
0	0	1	j	$j+1$
1	1	$2=0$	$j+1$	$j+2=0$
j	j	$j+1$	$2j=0$	$2j+1=1$
$j+1$	$j+1$	0	1	$2j+2=0$

et

x	$-x$
0	0
1	$-1=1$
j	j
$j+1$	$j+1$

Rappel : on est à coefficients dans $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ donc $2=0$ et $-1=1$. Alors $-j=-1\,j=1\,j=j$ ou sinon on remarque que $2\,j=0$ donc j est l'opposé de j.

Table de la multiplication dans $\mathbb{F}_4$ et inverses :

$\cdot$	0	1	j	$j+1$
0	0	0	0	0
1	0	1	j	$j+1$
j	0	j	$j+1$	1
$j+1$	0	$j+1$	1	j

et

x	x^{-1}
0	
1	1
j	$j+1$
$j+1$	j

En effet, grâce à $j^2+j+1=0$, on a

$$\begin{aligned} j^2 &= -(j+1) = j+1 \\ j\,(j+1) &= j^2+j = -1 = 1 \\ (j+1)^2 &= j^2+2\,j+1 = j \end{aligned}$$

On peut renommer $a:=j$ et $b:=j+1$ pour cacher l'algèbre sous-jacente, et alors on a

$+$	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	0
a	a	b	0	1
b	b	0	1	0

et

$\cdot$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a