$$
\begin{array}{rcl}
f(x,y,z) &=& x\,\bar{x}+y\,\bar{x}+x\,\bar{y}+2\,z\,\bar{x}+2\,x\,\bar{z}+3\,z\,\bar{y}+3\,y\,\bar{z}+4\,z\,\bar{z}\\
&=& |x|^2+\bar{x}\,(y+2\,z)+x\,\overline{(y+2\,z)}+(3\,z\,\bar{y}+3\,y\,\bar{z}+4\,z\,\bar{z})\\
&=& |x+y+2\,z|^2+\underbrace{(4\,z\,\bar{z}+3\,z\,\bar{y}+3\,y\,\bar{z}-|y+2\,z|^2)}\\
&& \qquad = 4\,z\,\bar{z}+3\,z\,\bar{y}+3\,y\,\bar{z}-(y\,\bar{y}+2\,z\,\bar{y}+2\,y\,\bar{z}+4\,z\,\bar{z})\\
&& \qquad = z\,\bar{y}+y\,\bar{z}-y\,\bar{y}\\
&& \qquad = -|y-z|^2+|z|^2\\
&=& |x+y+2\,z|^2-|y-z|^2+|z|^2
\end{array}
$$

a) $q_1:(x,y,z)\longmapsto x\,\bar{y}+y^2+\bar{x}\,y$ n'est ni quadratique (terme $x\,\bar{y}$) ni hermitienne (terme y^2).

b) q_2 est une forme quadratique, et

$$
\begin{array}{rcl}
q_2(x,y,z) &=& x^2+2\,x\,y+x\,z+z^2\\
&=& \left(x+\frac{1}{2}\,(2\,y+z)\right)^2+\underbrace{\left(z^2-\frac{1}{4}\,(2\,y+z)^2\right)}\\
&& \qquad = \frac{3}{4}\,z^2-y^2-y\,z\\
&& \qquad = -\left(y+\frac{1}{2}\,z\right)^2+z^2\\
&=& \left(x+y+\frac{1}{2}\,z\right)^2-\left(y+\frac{1}{2}\,z\right)^2+z^2
\end{array}
$$

avec $\left(e_x^*+e_y^*+\frac{1}{2}\,e_z^*,\ e_y^*+\frac{1}{2}\,e_z^*,\ e_z^*\right)$ formes linéairement indépendantes
donc $\mathrm{sig}(q_2)=(2,1)$ et $\mathrm{rg}(q_2)=3$.

c) q_3 est une forme hermitienne, et

$$
\begin{array}{rcl}
q_3(x,y,z) &=& x\,\bar{y}+y\,\bar{x}+|x|^2+|y|^2+3\,z\,\bar{y}+3\,y\,\bar{z}\\
&=& |x+y|^2+\frac{3}{2}\left(|y+z|^2-|y-z|^2\right)
\end{array}
$$

avec $\left(e_x^*+e_y^*,\ e_y^*+e_z^*,\ e_y^*-e_z^*\right)$ formes linéairement indépendantes
donc $\mathrm{sig}(q_3)=(2,1)$ et $\mathrm{rg}(q_3)=3$.

Posons $q:(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\longmapsto(x-y)^2+(y-z)^2-(z-x)^2$. C'est une somme de carrés de formes linéaires, donc c'est une forme quadratique. Réduction de Gauss :

$$
\begin{array}{rcl}
q(x,y,z) &=& (x^2-2\,x\,y+y^2)+(y^2-2\,y\,z+z^2)-(z^2-2\,x\,z+x^2)\\
&=& 2\,y^2-2\,x\,y-2\,y\,z+2\,x\,z\\
&=& 2\left(y^2+y\,(-x-z)+x\,z\right)\\
&=& 2\left(\left(y-\frac{1}{2}\,x-\frac{1}{2}\,z\right)^2+\underbrace{\left(x\,z-\frac{1}{4}\,(x+z)^2\right)}\right)\\
&& \qquad = -\frac{1}{4}\,x^2+\frac{1}{2}\,x\,z-\frac{1}{4}\,z^2 \ = \ -\frac{1}{4}\,(x-z)^2\\
&=& 2\left(y-\frac{1}{2}\,x-\frac{1}{2}\,z\right)^2-\frac{1}{2}\,(x-z)^2
\end{array}
$$

avec $\left(e_y^*-\frac{1}{2}\,e_x^*-\frac{1}{2}\,e_z^*,\ e_x^*-e_z^*\right)$ formes linéairement indépendantes.
Donc $\mathrm{sig}(q)=(1,1)$ et $\mathrm{rg}(q)=2$.
Cône isotrope de q : soit $\vec{u}=[\ x,y,z\ ]^\top\in\mathbb{R}^3$,

$$
\begin{array}{rcl}
\vec{u}\in\mathrm{Cone}(q) &\Longleftrightarrow& q(\vec{u})=0\\
&\Longleftrightarrow& 4\left(y-\frac{1}{2}\,x-\frac{1}{2}\,z\right)^2=(x-z)^2\\
&\Longleftrightarrow& 2\left(y-\frac{1}{2}\,x-\frac{1}{2}\,z\right)=\pm(x-z)\\
&\Longleftrightarrow& \left\{\begin{array}{l} 2\,y-x-z=x-z \ \text{ ou}\\ 2\,y-x-z=z-x\end{array}\right.\\
&\Longleftrightarrow& \left\{\begin{array}{l} y=x \ \text{ ou}\\ y=z\end{array}\right.
\end{array}
$$

Donc $\mathrm{Cone}(q)$ est l'union des deux plans de $\mathbb{R}^3$ définis par les équations $y=x$ et $y=z$.