Argument de Frattini

Soit $(G,\cdot)$ un groupe fini, $H \trianglelefteq G$ un sous-groupe **distingué**, et $S \in p\mathrm{Syl}(H)$ un p-Sylow de H. Alors

$$\boxed{G = H \cdot \mathrm{N}_G(S)}$$

avec $\mathrm{N}_G(S)$ le normalisateur de S.

Démonstration. Évidemment, $G \supset H \cdot \mathrm{N}_G(S)$. Soit $g \in G$. Montrons que $g \in H \cdot \mathrm{N}_G(S)$.
$H \trianglelefteq G$ donc $gSg^{-1} \subset H$ et c'est encore un p-Sylow de H par cardinalité ($gSg^{-1} \cong S$).
Or d'après le **théorème de Sylow** appliqué dans H, tous les p-Sylow de H sont conjugués entre eux :

$$\exists h \in H : \quad gSg^{-1} = hSh^{-1}$$

Alors $h^{-1}gSg^{-1}h = S$, ou dit autrement, $h^{-1}g \in \mathrm{N}_G(S)$. Donc $g \in h \cdot \mathrm{N}_G(S)$. $\square$