Sous-Espaces Totalement Isotropes (SETI)

On se place dans un espace quadratique (E, Φ), avec Φ une forme quadratique/hermitienne, de *dimension finie* non nulle. On note ϕ sa forme polaire associée.

Un sous-espace totalement isotrope (SETI) F est un sous-EV de E sur lequel Φ est isotrope :

$$\Phi|_F \overset{\text{def}}{=} 0$$

Inclusion dans l'orthogonal

Si F est un SETI, alors

$$F \subset F^\perp$$

Démonstration. $F^\perp = \{x \in E : \forall y \in F,\ \phi(x,y) = 0\}$.

Soit $x \in F$. $\forall y \in F$, $\phi(x,y) = \frac{1}{4}\big(\Phi(\underbrace{x+y}_{\in F}) - \Phi(\underbrace{x-y}_{\in F})\big) = 0$ car F est un SETI.

Donc $x \in F^\perp$. Donc $F \subset F^\perp$. □

Dimension d'un SETI

Si F est un SETI, alors

$$\dim F \leqslant \dim E - \frac{\operatorname{rg}\Phi}{2}$$

Démonstration. On a vu que $F \subset F^\perp$.

Donc $\dim F \leqslant \dim F^\perp = \dim E - \dim F + \dim(\underbrace{F \cap \operatorname{Ker}\Phi}_{= \operatorname{Ker}\Phi})$ (dimension de l'orthogonal)

car $F \subset \operatorname{Ker}\Phi$ $(\star)$ car F SETI

Or, par théorème du rang, $\dim(\operatorname{Ker}\Phi) = \dim E - \operatorname{rg}\Phi$. Donc comme $(\star)$ $\dim F \leqslant \dim(\operatorname{Ker}\Phi)$,

$$\dim F + \dim F \leqslant \dim E - \dim F + \dim E - \operatorname{rg}\Phi$$

C'est à dire que $\dim F \leqslant \dim E - \frac{1}{2}\operatorname{rg}\Phi$. □

1. Sous-Espaces Totalement Isotropes Maximaux (SETIM)

Un sous-espace totalement isotrope maximal (SETIM) F est un SETI maximal pour l'inclusion :

$$\forall G \text{ SETI de } (E,\Phi), \quad F \subset G \Rightarrow F = G$$

En *dimension finie*, tout SETI est inclus dans un SETIM :

$$\forall G \text{ SETI}, \quad \exists F \text{ SETIM} : G \subset F$$

Démonstration. Soit G un SETI de (E,Φ). Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des SETI contenant G :

$$\mathcal{S}_G := \{F \text{ sous-EV de } E : F \text{ SETI de } (E,\Phi) \text{ et } G \subset F\}$$

$\mathcal{S}_G \neq \varnothing$ car $G \in \mathcal{S}_G$, et puisque l'on est en dimension finie, $\{\dim F\}_{F \in \mathcal{S}_G}$ est majoré par $\dim E < \infty$, donc admet un maximum. On prend alors le SETI de E maximal en dimension :

$$F_{\mathsf{m}} := \underset{F \in \mathcal{S}_G}{\arg\max}\,(\dim F)$$

Alors F_{m} est un SETIM contenant G :

Soit H un SETI de (E, Φ) tel que $F_{\mathsf{m}} \subset H$.
$G \subset F_{\mathsf{m}} \subset H$ donc $H \in \mathcal{S}_G$. Donc par maximum, $\dim H \leqslant \dim F_{\mathsf{m}}$ donc $H \subset F_{\mathsf{m}}$.
Donc $H = F_{\mathsf{m}}$. Donc F_{m} est un SETIM. □

Dimension des SETIMs invariante dans un espace non dégénéré

Lorsque Φ est une forme *non dégénérée*, la dimension des SETIM est commune :

$$F_1, F_2 \text{ SETIM de } (E, \Phi) \quad \Longrightarrow \quad \dim F_1 = \dim F_2$$

Démonstration. Soient F_1 et F_2 SETIMs de (E, Φ).

Posons $F := F_1 \cap F_2$ et $S_{1,2}$ les supplémentaires de F dans $F_{1,2}$: $\begin{array}{l} F \oplus S_1 = F_1 \\ F \oplus S_2 = F_2 \end{array}$

1. Soit $x \in S_1 \cap S_2^\perp$.

2. $S_1 \subset F_1 \overset{\text{SETI}}{\subset} F_1^\perp = (F + S_1)^\perp = F^\perp \cap S_1^\perp$ (identité toujours vraie) donc
$$\begin{array}{rcl} S_1 \cap S_2^\perp & \subset & F^\perp \cap S_2^\perp \cap S_1^\perp \\ & = & (F + S_2)^\perp \cap S_1^\perp \\ & = & F_2^\perp \cap S_1^\perp \end{array}$$
   Donc $x \in F_2^\perp$.

3. Alors $G := F_2 + \mathbb{K}\, x$ est un SETI. En effet, c'est un sous-EV, et $\forall g \in G$,
   $\exists (f, \lambda) \in F_2 \times \mathbb{K}$: $g = f + \lambda\, x$
   et alors $\Phi(g) = \Phi(f + \lambda\, x) = \underbrace{\Phi(f)}_{= 0 \text{ (a)}} + 2\, \lambda\, \underbrace{\phi(f, x)}_{= 0 \text{ (b)}} + \underbrace{\Phi(x)}_{= 0 \text{ (c)}} = 0$ donc $\Phi|_G = 0$.
   (a) car $\Phi|_F = 0$ car F_2 SETI
   (b) $x \in F_2^\perp$, $f \in F_2$ donc $x \perp f$
   (c) x est isotrope : $x \in S_1$ donc $x \in F + S_1 = F_1$ or F_1 SETI donc $\Phi(x) = 0$

4. G est un SETI et $F_2 \subset G$. Or F_2 est un SETIM. Donc $F_2 = G$.

5. Donc $F_2 = F_2 + \mathbb{K}\, x$, donc nécessairement $x \in F_2$.

6. On a vu que $x \in F_1$ et $x \in F_2$ donc $x \in F$. Alors $x \in F \cap S_1 = \{0\}$ car $F \oplus S_1$.

Ainsi, et par symétrie des rôles,

$$S_1 \cap S_2^\perp = \{0\} \quad \text{et} \quad S_2 \cap S_1^\perp = \{0\}$$

Montrons enfin que $\dim F_1 = \dim F_2$. Par les sommes directes, on a

$$\begin{array}{rcl} \dim F + \dim S_1 & = & \dim F_1 \\ \dim F + \dim S_2 & = & \dim F_2 \end{array}$$

Il suffit donc de montrer que $\dim S_1 = \dim S_2$:

$$\underbrace{\dim(S_1 + S_2^\perp)}_{= \dim E} = \dim(S_1) + \dim(S_2^\perp) - \underbrace{\dim(S_1 \cap S_2^\perp)}_{= 0}$$

En effet, $(S_1 + S_2^\perp)^\perp \overset{(**)}{=} S_1^\perp \cap S_2^{\perp\perp} \overset{(*)}{=} S_1^\perp \cap S_2 = \{0\}$ donc $S_1 + S_2^\perp \overset{(*)}{=} (S_1 + S_2^\perp)^{\perp\perp} = \{0\}^\perp = E$
   $(*)$ car $F^{\perp\perp} = F$ pour tout sous-EV Φ est *non dégénérée*
   $(**)$ identité toujours vraie

Donc $\dim S_1 \underset{\text{(dimension de l'orthogonal)}}{=} \dim E - \dim S_2^{\perp} = \dim S_2$ car $\operatorname{Ker}\Phi = \{0\}$ car Φ est *non dégénérée*. □

Dimension des SETIMs et signature

Alors, toujours lorsque Φ est *non dégénérée*, et si sa signature est $\operatorname{sig}(\Phi) = (p, q)$, on a que

$$\forall F \text{ SETIM de } (E, \Phi), \quad \dim F = \min(p, q)$$

Démonstration. □