Supplémentaires et EV Quotients

Soit E un $\mathbb{K}$-EV et F un sous-EV. Alors

$$\boxed{\begin{array}{c} F \text{ est de codimension finie} \iff F \text{ admet un supplémentaire } S \text{ de dimension finie} \\ \text{Et dans ce cas,} \quad \operatorname{codim}(F) = \dim(S) \end{array}}$$

1. Par restriction de la projection canonique π_F au supplémentaire.

Soit S un sous-ev de E. Alors S est supplémentaire de F si et seulement si :

$$\boxed{F \oplus S = E \iff F + S = E \text{ et } F \cap S = \{0\} \iff \pi_F|_S : S \longrightarrow E/F \ \text{ isomorphisme}}$$

Surjectivité :

$$\begin{aligned}
F + S = E &\iff \forall x \in E,\ \exists f \in F, s \in S \ : \ x = f + s \\
&\iff \forall x \in E,\ \exists s \in S \ : \begin{cases} \quad x - s \in F \\ \iff (x-s) \bmod F = \bar{0} \\ \iff x \bmod F = s \bmod F \\ \iff \pi_F(x) = \pi_F(s) \end{cases} \\
&\iff \forall x \in E,\ \pi_F(x) \in \operatorname{Im}(\pi_F|_S) \\
&\iff \operatorname{Im}(\pi_F) \subset \operatorname{Im}(\pi_F|_S) \\
&\iff F = \operatorname{Im}(\pi_F|_S) \qquad \text{car } \pi_F = \operatorname{Im}(\pi_F) \text{ car sujective} \\
&\iff \pi_F|_S \text{ surjective}
\end{aligned}$$

Injectivité :

$$\begin{aligned}
F \cap S = \{0\} &\iff \operatorname{Ker}(\pi_F) \cap S = \{0\} \quad \text{car} \quad \operatorname{Ker}(\pi_F) = F \\
&\iff \operatorname{Ker}(\pi_F|_S) = \{0\} \qquad \text{par restriction de l'ensemble de départ} \\
&\iff \pi_F|_S \text{ injective}
\end{aligned}$$

Ainsi, si F admet un supplémentaire S de dimension finie, alors $E/F \overset{\text{EV}}{\cong} S$ est de dimension finie, et

$$\dim(S) = \dim(E/F) = \operatorname{codim}(F)$$

Réciproquement, si F est de codimension finie n, posons $(\bar{e_i} = e_i \bmod F)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de E/F, avec des représentants quelconques. Alors en posant $S = \operatorname{Vect}(e_i)_{i=1}^n$, on a que

$$\dim(S) = n = \operatorname{codim}(F)$$

et donc S induit un isomorphisme $\pi_F|_S$, donc S est un supplémentaire de F de dimension finie.

2. Directement avec les bases.

Montrons que :

$$\boxed{(\bar{e_i} = e_i \bmod F)_{1\leqslant i\leqslant n} \text{ base de } {}^{E}\!/\!_{F} \iff (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \text{ base d'un suplémentaire } S \text{ de } F \text{ dans } E}$$

Plus précisémment, on a

$$(\bar{e_i})_i \text{ génératrice de } {}^{E}\!/\!_{F} \iff F + \mathrm{Vect}(e_i)_i = E$$
$$\text{et} \quad (\bar{e_i})_i \text{ libre} \iff F \cap \mathrm{Vect}(e_i)_i = \{0\} \quad \text{et } (e_i)_i \text{ libre}$$

Sens direct : Soit $(\bar{e_i})_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de ${}^{E}\!/\!_{F}$. Posons $S := \mathrm{Vect}(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Alors

- $\boldsymbol{F+S=E}$: Soit $x \in E$. Considérons $\bar{x} = x \bmod F$
  $(\bar{e_i})_i$ base de ${}^{E}\!/\!_{F}$, donc soient $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{K}^n$ tels que $\bar{x} = \sum_i \lambda_i \bar{e_i}$
  Si l'on pose $s := \sum_i \lambda_i e_i \in \mathrm{Vect}(e_i)_i = S$, alors $\bar{s} = \sum_i \lambda_i \bar{e_i} = \bar{x}$ puisque $\bar{\cdot}$ morphisme.
  Donc $x - s \equiv 0 \bmod F$ donc $x - s \in F$. Ainsi, $x = \underbrace{x-s}_{\in F} + \underbrace{s}_{\in S} \in F + S$
- $\boldsymbol{F \cap S = \{0\}}$: Soit $x \in F \cap S$.
  Puisque $x \in S = \mathrm{Vect}(e_i)_i$, soient $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{K}^n$ tels que $x = \sum_i \lambda_i e_i$
  Alors puisque $x \in F$, $x \equiv 0 \bmod F$ donc ($\bar{\cdot}$ morphisme) $\bar{x} = \sum_i \lambda_i \bar{e_i} = \bar{0}$
  Or $(\bar{e_i})_i$ libre, donc $\forall i,\ \lambda_i = 0$. Donc $x = \sum_i \lambda_i e_i = 0$.

Réciproquement : Soit S tel que $F \oplus S = E$, de base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

- $\boldsymbol{(\bar{e_i})_i}$ **génératrice** : Soit $\bar{x} \in {}^{E}\!/\!_{F}$, avec un représentant $x \in E$ quelconque.
  $E = F + S$ donc soit $s \in S$ tel que $x - s \in F$. Donc $x \equiv s \bmod F$.
  $s \in S = \mathrm{Vect}(e_i)_i$ donc ($\bar{\cdot}$ morphisme) $\bar{x} = \bar{s} \in \mathrm{Vect}(\bar{e_i})_i$.
- $\boldsymbol{(\bar{e_i})_i}$ **libre** : Soient $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{K}^n$ tels que $\sum_i \lambda_i \bar{e_i} = \bar{0}$
  Si l'on pose $s := \sum_i \lambda_i e_i$, alors $\bar{s} = \sum_i \lambda_i \bar{e_i} = \bar{0}$ puisque $\bar{\cdot}$ morphisme.
  $s \in \mathrm{Vect}(e_i)_i = S$ et $s \in F$ puisque $s \equiv 0 \bmod F$. Donc $s \in F \cap S = \{0\}$.
  $s = \sum_i \lambda_i e_i = 0$ or $(e_i)_i$ libre donc $\forall i,\ \lambda_i = 0$.