Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique $\neq 2$. On se place dans le $\mathbb{K}$-espace quadratique (E,Φ), avec ϕ la forme polaire associée à la forme quadratique Φ. Par défaut, $\perp$ dénote la Φ-orthogonalité.

1 Sommes directes orthogonales

Soient $(F_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ des sous-EV de E et $(\pi_{F_i})_{1\leqslant i\leqslant k}$ les projections associées. On a que

$$\boxed{E=\bigoplus_{i=1}^{k}{}^{\perp} F_i \quad\Longleftrightarrow\quad E=\bigoplus_{i=1}^{k} F_i \text{ et } \exists(\Phi_i : F_i\mapsto \mathbb{K} \text{ quadratique})_{1\leqslant i\leqslant k} : \Phi=\sum_{i=1}^{k}\Phi_i\circ\pi_{F_i}} \tag{1}$$

et alors $\forall i\in[\![1,k]\!]$, $\boxed{\Phi_i=\Phi|_{F_i}}$ et on note $(E,\Phi)=\bigoplus_{i=1}^{k}(F_i,\Phi_i)$.

Démonstration. Supposons $E=\bigoplus_{i=1}^{k}F_i$.

$\Longrightarrow$ Posons $\forall i\in[\![1,k]\!]$, la forme quadratique $\Phi_i:=\Phi|_{F_i}=\phi|_{F_i\times F_i}(\cdot,\cdot)$.

Soit $x\in E$ et $\forall i\in[\![1,k]\!]$, $x_i=\pi_{F_i}(x)\in F_i$. Alors $\forall (i,j)\in[\![1,k]\!]^2_{\neq}$, puisque $F_i\perp F_j$, $x_i\perp x_j$.
Donc $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ est une famille orthogonale, donc par Pythagore,

$$\Phi(x)=\Phi\left(\sum_{i=1}^{k}x_i\right)=\sum_{i=1}^{k}\Phi(x_i)=\sum_{i=1}^{k}(\Phi_i\circ\pi_{F_i})(x)$$

$\Longleftarrow$ Soient $(\Phi_i : F_i\mapsto\mathbb{K}\text{ quadratique})_{1\leqslant i\leqslant k}$ telles que $\Phi=\sum_{i=1}^{k}\Phi_i\circ\pi_{F_i}$.
Alors $\forall (i,j)\in[\![1,k]\!]^2_{\neq}$, $\quad\forall x\in F_i$, $\forall y\in F_j$,

$$\begin{aligned}\phi(x,y) &= \frac14\big(\Phi(x+y)-\Phi(x-y)\big)\\ &= \frac14\sum_{l=1}^{k}\Big(\Phi_l\big(\pi_{F_l}(x+y)\big)-\Phi_l\big(\pi_{F_l}(x-y)\big)\Big)\\ &= \frac14\big(\Phi_i(x)-\Phi_i(x)+\Phi_j(y)-\Phi_j(-y)\big) \quad\text{car}\quad \pi_{F_l}(x\pm y)=\begin{cases}x & \text{si } l=i\\ \pm y & \text{si } l=j\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}\\ &= 0 \quad\text{car}\quad \Phi_j(-y)=\Phi_j(y)\end{aligned}$$

Donc $F_i\perp F_j$. Donc la somme est orthogonale.

De plus, $\forall i\in[\![1,k]\!]$, on a que $\Phi_i=\Phi|_{F_i}$ puisque $\forall x\in F_i$,

$$\Phi(x) = \sum_{l=1}^{k}\Phi_l\big(\pi_{F_l}(x)\big)=\Phi_i(x)\quad\text{car}\quad \pi_{F_l}(x)=\delta_{i,l}\,x$$

□

Soient F,G sous-EV de E. Alors

$$\boxed{(E,\Phi)=(F,\Phi_F)\oplus(G,\Phi_G)\ \text{ avec }\ \Phi_F\text{ non dégénérée}\quad\Longrightarrow\quad G=F^{\perp}} \tag{2}$$

Démonstration. Supposons que $E=F\oplus^{\perp}G$ et que $\Phi_F=\Phi|_F=\phi|_{F\times F}(\cdot,\cdot)$ est non dégénérée.
En particulier, $F\perp G$ donc $G\subset F^{\perp}$ par définition.
Réciproquement, soit $x\in F^{\perp}$. $x\in E=F\oplus G$ donc soient $x_F\in F$, $x_G\in G$: $x=x_F+x_G$.
On a que $\forall y\in F$, $\phi(x,y)=\phi(x_F,y)+\underbrace{\phi(x_G,y)}_{=0 \text{ car } F\perp G}=0$, $\quad$ donc $\phi(x_F,\cdot)=0$.
Donc $x_F\in\operatorname{Ker}\big(x\mapsto\phi|_{F\times F}(x,\cdot)\big)=\operatorname{Ker}(\Phi_F)=\{0\}$ car $\Phi|_F$ est non dégénérée. Donc $x_F=0$.
Donc $x=x_G\in G$. Ainsi, $F^{\perp}\subset G$. □

Soit $x\in E$,

$$\boxed{x\text{ non isotrope}\quad\Longrightarrow\quad E=\mathbb{K}x\oplus^{\perp}\{x\}^{\perp}} \tag{3}$$

Démonstration. On a évidemment que $\mathbb{K}x\perp\{x\}^{\perp}$ par définition.
Montrons que $E=\mathbb{K}x+\{x\}^{\perp}$. Soit $y\in E$. Puisque x est non isotrope, $\Phi(x)\neq 0$ et on peut poser :

$$z := \frac{\phi(x,y)}{\phi(x,x)}x \in \mathbb{K}\,x$$

Maintenant, $y-z\in\{x\}^{\perp}$ puisque $\phi(x,y-z)=\phi(x,y)-\phi(x,z)=\phi(x,y)-\frac{\phi(x,y)}{\phi(x,x)}\phi(x,x)=0$.
Donc $y=z+(y-z)\in\mathbb{K}x+\{x\}^{\perp}$.
Enfin, montrons que $\mathbb{K}x\cap\{x\}^{\perp}=\{0\}$. Soit $y\in\mathbb{K}x\cap\{x\}^{\perp}$
Alors $\exists\lambda\in\mathbb{K}$: $y=\lambda x$. De plus $y\in\{x\}^{\perp}$ donc $\phi(y,x)=\lambda\overbrace{\phi(x,x)}^{\neq 0\text{ car non isotrope}}=0$, donc $\lambda=0$ donc $y=0$ □

Soit F un sous-EV de E,

$$\boxed{\operatorname{Ker}(\Phi|_F)=F\cap F^{\perp}} \tag{4}$$

Démonstration. C'est simplement une réécriture des définitions :

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}(\Phi|_F) &= \operatorname{Ker}\big(x\mapsto\phi|_{F\times F}(x,\cdot)\big)\\ &= \big\{x\in F : \phi|_{F\times F}(x,\cdot)=0\big\}\\ &= \big\{x\in F : \forall y\in F,\ \phi(x,y)=0\big\}\\ &= F\cap\big\{x\in E : \forall y\in F,\ \phi(x,y)=0\big\}\\ &= F\cap F^{\perp}\end{aligned}$$

□

Tout espace quadratique non dégénéré et non nul possède un vecteur non isotrope :

$$\boxed{E\neq\{0\}\text{ et }\Phi\text{ non dégénérée}\quad\Longrightarrow\quad\operatorname{Cone}(\Phi)\neq E} \tag{5}$$

Démonstration. Par l'absurde, supposons que $\operatorname{Cone}(\Phi)=E$ (tout vecteur est isotrope) et que $\operatorname{Ker}(\Phi)=\{0\}$ (non dégénérée). Soit $x\in E$. $\forall y\in E$, $\phi(x,y)=\frac14\big(\underbrace{\Phi(x+y)}_{=0}-\underbrace{\Phi(x-y)}_{=0}\big)=0$.
Donc $\phi(x,\cdot)=0$, donc $x\in\operatorname{Ker}(\Phi)$, donc $x=0$. Contradiction. □

Finalement, soit $x\in E$,

$$\boxed{x\text{ non isotrope}\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}E=\mathbb{K}x\oplus^{\perp}\{x\}^{\perp}\\ \Phi|_{\mathbb{K}x}\text{ et }\Phi|_{\{x\}^{\perp}}\text{ non dégénérée}\end{cases}} \tag{6}$$

Ainsi, on obtient que tout espace quadratique (E,Φ) non dégénéré non nul est décomposable en une somme directe orthogonale de deux sous-espaces sur lesquels Φ est encore non dégénérée.

Démonstration. On a déjà vu (3) que $E=\mathbb{K}x\oplus^{\perp}\{x\}^{\perp}$ puisque x est isotrope. De plus, avec le résultat (4) précedent, $\operatorname{Ker}\big(\Phi|_{\mathbb{K}x}\big)=\mathbb{K}x\cap(\mathbb{K}x)^{\perp}=\mathbb{K}x\cap\{x\}^{\perp}=\{0\}$ (somme directe).
Donc $\Phi|_{\mathbb{K}x}$ non dégénérée. De même, $\operatorname{Ker}\big(\Phi|_{\{x\}^{\perp}}\big)=\{x\}^{\perp}\cap\{x\}^{\perp\perp}\subset\{x\}^{\perp}\cap\mathbb{K}x=\{0\}$. □

2 Isométries

On notera systématiquement $\phi_{[\dots]}$ la forme polaire associée à une forme quadratique $\Phi_{[\dots]}$.

a.i) Soient

$$(E,\Phi_E)\xrightarrow{\ f\ }(F,\Phi_F)\xrightarrow{\ g\ }(G,\Phi_G)$$

des isométries. Alors f^{-1} est une isométrie, car f isomorphisme donc f^{-1} isomorphisme, et car

$$\forall x,y\in F,\quad \phi_E\big(f^{-1}(x),f^{-1}(y)\big)\overset{f\text{ isométrie}}{=}\phi_F\big(f(f^{-1}(x)),f(f^{-1}(y))\big)=\phi_F(x,y)$$

Et $g\circ f$ est une isométrie, car une composition d'isomorphismes est un isomorphisme et que

$$\forall x,y\in F,\quad \phi_G\big(g(f(x)),g(f(y))\big)\overset{g\text{ isométrie}}{=}\phi_F(f(x),f(y))\overset{f\text{ isométrie}}{=}\phi_E(x,y)$$

a.ii) Soient $f:(E,\Phi)\longrightarrow(E,\Phi')$ une isométrie et F un sous-EV de E. Alors

$$f|_F:\big(F,\Phi|_F\big)\longrightarrow\big(f(F),\Phi'|_{f(F)}\big)$$

est une isométrie. En effet, la restriction et co-restriction associée d'un isomorphisme reste un isomorphisme, et

$$\forall x,y\in F,\quad \phi'|_{f(F)\times f(F)}\big(f|_F(x),f|_F(y)\big)=\phi'\big(f(x),f(y)\big)\overset{f\text{ isométrie}}{=}\phi(x,y)=\phi|_F(x,y)$$

b) Soit (E,Φ) un espace quadratique et $x_0,y_0\in E$ tels que $\Phi(x_0)=\Phi(y_0)\neq 0$, non isotropes.

i) Par contraposée, supposons que x_0+y_0 et x_0-y_0 sont isotrope, alors

$$4\,\phi(x_0,y_0)=\Phi(x_0+y_0)-\Phi(x_0-y_0)=0\quad\text{donc}\quad\phi(x_0,y_0)=0$$

Donc par Pythagore $\Phi(x_0+y)=\Phi(x_0)+\Phi(y_0)=2\,\Phi(x_0)=0$ donc $\Phi(x_0)=0$. Contradiction.
Donc x_0+y_0 ou x_0-y_0 non isotrope.

ii) On fait une distinction suivant ces deux cas :

- **Cas x_0+y_0 isotrope :** Par le résultat précédent (3), en notant $F:=\mathbb{K}\,(x_0+y_0)$, on a

$$E = F\oplus^{\perp}F^{\perp}$$

Notons $\pi:=\pi_F$ et $\pi_{\perp}:=\pi_{F^{\perp}}$ les projections associées sur cette somme directe. Posons

$$s := \pi-\pi_{\perp}$$

C'est une involution car c'est un endomorphisme et

$$\begin{aligned}s\circ s &= \pi\circ s-\pi_{\perp}\circ s\\ &= \pi\circ(\pi-\pi_{\perp})-\pi_{\perp}\circ(\pi-\pi_{\perp})\\ &= \underbrace{\pi\circ\pi}_{=\pi}-\underbrace{\pi\circ\pi_{\perp}}_{=0}-\underbrace{\pi_{\perp}\circ\pi}_{=0}+\underbrace{\pi_{\perp}\circ\pi_{\perp}}_{=\pi_{\perp}}\\ &= \pi+\pi_{\perp} = \mathrm{id}_E\end{aligned}$$

donc s est un isomorphisme (et $s^{-1}=s$). De plus, c'est une isométrie : $\forall x,y\in E$,

$$\begin{aligned}\phi\big(s(x),s(y)\big) &= \phi\big(\pi(x),\pi(y)\big)-\underbrace{\phi\big(\pi_{\perp}(x),\pi(y)\big)}_{=0\text{ car }F\perp F^{\perp}}-\underbrace{\phi\big(\pi(x),\pi_{\perp}(y)\big)}_{=0\text{ car }F\perp F^{\perp}}+\phi\big(\pi_{\perp}(x),\pi_{\perp}(y)\big)\\ &= \phi\big(\pi(x),\pi(y)\big)+\overbrace{\phi\big(\pi_{\perp}(x),\pi(y)\big)}+\overbrace{\phi\big(\pi(x),\pi_{\perp}(y)\big)}+\phi\big(\pi_{\perp}(x),\pi_{\perp}(y)\big)\\ &= \phi\big((\pi+\pi_{\perp})(x),(\pi+\pi_{\perp})(y)\big)\\ &= \phi(x,y)\end{aligned}$$

C'est donc une isométrie. Enfin, x_0 se décompose en $x_0=\frac12(x_0+y_0)+\frac12(x_0-y_0)$.
Or $\frac{x_0+y_0}{2}\in F$, donc par unicité (somme directe), $\pi(x_0)=\frac{x_0+y_0}{2}$ et $\pi_{\perp}(x_0)=\frac{x_0-y_0}{2}$ donc

$$s(x_0) = \pi(x_0)-\pi_{\perp}(x_0) = y_0$$

ce qui était voulu.

- **Cas x_0-y_0 isotrope :** Même chose, avec $F:=\mathbb{K}\,(x_0-y_0)$ et $s:=\pi_{\perp}-\pi$, on a

$$\pi(x_0)=\tfrac12(x_0-y_0)\quad\text{et}\quad\pi_{\perp}(x_0)=\tfrac12(x_0+y_0)\quad\text{d'où}\quad s(x_0)=y_0$$

Ainsi,

$$\boxed{\Phi(x_0)=\Phi(y_0)\neq 0\quad\Longrightarrow\quad\exists\,s:E\to E\ \Phi\text{-isométrie} : s(x_0)=y_0} \tag{7}$$

c) Soient $f:(E,\Phi_E)\longrightarrow(F,\Phi_F)$ une isométrie et G un sous-EV de E. Alors

$$\boxed{f(G)^{\perp_F}=f\big(G^{\perp_E}\big)} \tag{8}$$

Démonstration. Par double inclusion (cachet d'aspirine non inclus) :

- $\boxed{\supset}$ Soit $x\in f\big(G^{\perp_E}\big)$. $f^{-1}(x)\in G^{\perp_E}$ donc $\forall g\in G$, $\phi_E\big(f^{-1}(x),g\big)=0$.
Alors $\forall y\in f(G)$, $\phi_F(x,y)\overset{\text{isom.}}{=}\phi_E\big(f^{-1}(x),f^{-1}(y)\big)=0$ car $f^{-1}(y)$. Donc $x\in f(G)^{\perp_F}$.

- $\boxed{\subset}$ Posons $G':=G^{\perp_E}$. Alors, en appliquant ce que l'on vient de démontrer sur G', on a $f(G')^{\perp_F}\supset f\big(G'^{\perp_E}\big)$ $(*)$. Or $G'^{\perp_E}\overset{\text{def}}{=}G^{\perp_E\perp_E}\supset G$, donc $f(G)\subset f\big(G'^{\perp_E}\big)\overset{(*)}{\subset}f(G')^{\perp_F}$ $(**)$.
Ainsi, $f\big(G^{\perp_E}\big)\overset{\text{def}}{=}f(G')\subset f(G')^{\perp_F\perp_F}\overset{(**)}{\subset}f(G)^{\perp_F}$. □

3 Théorème de simplification de Witt

Supposons que l'on a des espaces quadratiques tels que

$$\begin{tikzcd}\big(E_1,\Phi_1\big) \arrow[d, leftrightarrow, "u"] & = & \big(F_1,\Psi_1\big) \arrow[d, leftrightarrow, "v"] & \oplus & \big(G_1,\Xi_1\big)\\ \big(E_2,\Phi_2\big) & = & \big(F_2,\Psi_2\big) & \oplus & \big(G_2,\Xi_2\big)\end{tikzcd}$$

(c'est à dire $\Psi_{1,2}=\Phi_{1,2}|_{F_{1,2}}$ et $\Xi_1=\Phi_{1,2}|_{G_{1,2}}$ grâce au résultat (1)) et :

– $\exists\,u:(E_1,\Phi_1)\longrightarrow(E_2,\Phi_2)$ et $\exists\,v:(F_1,\Psi_1)\longrightarrow(F_2,\Psi_2)$ isométries

– (F_1,Ψ_1) et (F_2,Ψ_2) sont de dimension finie et non dégénérés

Alors on a une isométrie

$$(G_1,\Xi_1)\xrightarrow{\ w\ }(G_2,\Xi_2)$$

Démonstration. Puisque F_1 est de dimension finie, on raisonne par récurrence sur $\dim F_1$.

- Si $F_1=\{0\}$, alors $F_2=\{0\}$ par isomorphisme, et le théorème est trivial en prenant $w:=u$.
- Supposons le théorème vrai en dimensions n. Prenons des espaces quadratiques vérifiant les hypothèses du théorème et $\dim F_1=\dim F_2=n+1>0$.

Puisque (F_1,Ψ_1) est un espace non dégénéré non nul, par le résultat (5), il possède un vecteur non isotrope $x_1\in F_1\backslash\operatorname{Cone}(\Psi_1)$. Posons $x_2:=v(x_1)\in F_2$.
Alors par l'isométrie v, $\Phi_2(x_2)=\Psi_2(x_2)=\Psi_2\big(v(x_1)\big)=\Psi_1(x_1)\neq 0$ donc x_2 non isotrope.
Le résultat (6) indique alors que

$$\begin{cases}F_1=D_1\oplus^{\perp}H_1\\ \Phi_1|_{D_1}\text{ et }\Phi_1|_{H_1}\text{ non dégénérée}\end{cases}\quad\text{et}\quad\begin{cases}F_2=D_2\oplus^{\perp}H_2\\ \Phi_2|_{D_2}\text{ et }\Phi_2|_{H_2}\text{ non dégénérée}\end{cases}$$

avec $D_i:=\mathbb{K}x_i$ et $H_i:=(D_i)^{\perp_{F_i}}\subset F_i$ pour $i=1,2$, d'où

$$\begin{aligned}\big(E_i,\Phi_i\big) &= \big(D_i,\Phi_i|_{D_i}\big)\oplus\big(H_i,\Phi_i|_{H_i}\big)\oplus\big(G_i,\Xi_i\big)\\ \text{avec}\quad\Phi_i &= \Phi_i|_{D_i}\circ\pi_{D_i}+\Phi_i|_{H_i}\circ\pi_{H_i}+\Xi_i\circ\pi_{G_i}\end{aligned}$$

puisque par hypothèse, $\Phi_i=\Psi_i\circ\pi_{F_i}+\Xi_i\circ\pi_{G_i}$.
De plus, en posant $y_1:=u^{-1}(x_2)\in E_1$, avec ce que l'on vient de voir et puisque u^{-1} est une isométrie, $\Phi_1(y_1)=\Phi_1\big(u^{-1}(x_2)\big)=\Phi_2(x_2)=\Phi_1(x_1)\neq 0$. Le résultat (7) nous donne alors une isométrie

$$s:(E_1,\Phi_1)\longrightarrow(E_1,\Phi_1)\quad\text{telle que}\quad s(x_1)=y_1$$

Posons alors $f:=u\circ s|_{H_1\oplus G_1}$, qui est à valeurs dans $H_2\oplus G_2$. En effet,

$$\begin{aligned}u\circ s\,(H_1\oplus G_1) &= u\circ s\,\big(D_1^{\perp_{E_1}}\big) && \text{avec (2) car }\Phi_1|_{D_1}\text{ non dégénérée}\\ &= u\circ s\,(D_1)^{\perp_{E_2}} && \text{avec (8) car } u \text{ et } s\text{, donc } u\circ s \text{ isométries}\\ &= u\circ s\,(\mathbb{K}x_1)^{\perp_{E_2}} = (\mathbb{K}x_2)^{\perp_{E_2}} && \text{car } u\big(s(x_1)\big)=u(y_1)=x_2\\ &= D_2^{\perp_{E_2}} = H_2\oplus G_2 && \text{avec (2) car }\Phi_2|_{D_2}\text{ non dégénérée}\end{aligned}$$

Alternativement, sans utiliser (8), avec $\phi_{1,2}$ les formes polaires associées à $\Phi_{1,2}$: $\forall x\in H_1\oplus G_1$,

$$\begin{aligned}\phi_2\big(f(x),x_2\big) &= \phi_2\big(u(s(x)),v(x_1)\big) && \text{par définition}\\ &= \phi_2\big(u(s(x)),u(s(x_1))\big) && \text{car } u(s(x_1))=u(y_1)=x_2=v(x_1)\\ &= \phi_1\big(s(x),s(x_1)\big) && \text{car } u \text{ isométrie}\\ &= \phi_1(x,x_1) && \text{car } s \text{ isométrie}\\ &= 0 && \text{car } x\perp x_1 \text{ car } x\in H_1\oplus G_1\perp D_1\end{aligned}$$

donc $f(x)\in(\mathbb{K}x_2)^{\perp_{E_2}}=D_2^{\perp_{E_2}}=H_2\oplus G_2$ en utilisant le résultat (2) car $\Phi_2|_{D_2}$ non dégénérée.
Par composition des isométries u et s, c'est donc une isométrie

$$f:\big(H_1\oplus^{\perp}G_1,\Phi_1\big)\longrightarrow\big(H_2\oplus^{\perp}G_2,\Phi_2\big)$$

De plus, $v|_{H_1}$ est à valeurs dans H_2. En effet,

$$\begin{aligned}v(H_1) &= v\big(D_1^{\perp_{F_1}}\big) && \text{avec (2) car }\Psi_1|_{D_1}\text{ non dégénérée}\\ &= v(D_1)^{\perp_{F_2}} && \text{avec (8) car } v \text{ isométrie}\\ &= v(\mathbb{K}x_1)^{\perp_{F_2}}=(\mathbb{K}x_2)^{\perp_{F_2}} && \text{car } v(x_1)=x_2\\ &= D_2^{\perp_{F_2}}=H_2 && \text{avec (2) car }\Psi_2|_{D_2}\text{ non dégénérée}\end{aligned}$$

Ainsi, en posant v' la co-restriction de $v|_{H_1}$ à H_2, on a une isométrie $v':\big(H_1,\Phi_1\big)\longrightarrow\big(H_2,\Phi_2\big)$.

En résumé :

$$\begin{tikzcd}\big(H_1\oplus^{\perp}G_1,\Phi_1'\big) \arrow[d, leftrightarrow, "f"] & = & \big(H_1,\Psi_1'\big) \arrow[d, leftrightarrow, "v'"] & \oplus & \big(G_1,\Xi_1\big)\\ \big(H_2\oplus^{\perp}G_2,\Phi_2'\big) & = & \big(H_2,\Psi_2'\big) & \oplus & \big(G_2,\Xi_2\big)\end{tikzcd}$$

avec $\Phi_i':=\Phi_i|_{H_i\oplus G_i}$ et $\Psi_i':=\Phi_i'|_{H_i}$ pour $i=1,2$. On se retrouve donc dans les hypothèses du théorème avec $\dim H_2 = \dim H_1 = \dim F_1-\underbrace{\dim D_1}_{=\dim\mathbb{K}x_1=1}+\dim(\underbrace{\operatorname{Ker}(\Phi_1|_{D_1})}_{=\{0\}\text{ (non dégénérée)}}) = n+1-1 = n$.

Donc $\big(G_1,\Xi_1\big)$ et $\big(G_2,\Xi_2\big)$ isomorphes par hypothèse de récurrence. □