Critère d'auto-difféomorphisme

On se place dans $(E, \|\cdot\|)$ un EVN de dimension finie. Soit $f : E \longrightarrow E$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\boxed{\exists k > 0 : \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \quad k \|\vec{x} - \vec{y}\| \leqslant \|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\|} \tag{1}$$

Montrons que c'est un difféomorphisme de E dans lui même.

- Soit $\vec{x} \in E$. Montrons que $\mathrm{d}f(\vec{x})$ est inversible.

  Soit $\vec{u} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{d}f(\vec{x}))$. Alors $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $\|f(\vec{x}+t\vec{u}) - f(\vec{x})\| \geqslant k \|\vec{x} + t\vec{u} - \vec{x}\| = k |t| \|\vec{u}\|$, donc, comme $f(\vec{x} + t\,\vec{u}) = f(\vec{x}) + t \cdot \underbrace{\mathrm{d}f(\vec{x})(\vec{u})}_{=0} + \underset{t \to 0}{o}(t)$ puisque f est différentiable, on a

  $$0 \;=\; \|\mathrm{d}f(\vec{x})(\vec{u})\| \;=\; \lim_{t \to 0} \frac{\|f(\vec{x}+t\vec{u}) - f(\vec{x})\|}{|t|} \;\geqslant\; k \|\vec{u}\|$$

  donc $\vec{u} = 0$. Donc $\mathrm{Ker}(\mathrm{d}f(\vec{x})) = \{0\}$ donc $\mathrm{d}f(\vec{x})$ est injective donc bijective (dimension finie).

  $$\boxed{\mathrm{d}f(\vec{x}) \text{ est inversible}}$$

  Ainsi, par le théorème d'inversion locale, f est un **difféomorphisme local** en tout point : $\exists U_{\vec{x}}, V_{\vec{x}} \in \mathcal{O}(E)$ tels que $f|_{U_{\vec{x}}}^{V_{\vec{x}}}$ soit un difféomorphisme. Et alors $f(E)$ est la réunion d'ouverts $f(E) = \bigcup_{\vec{x} \in E} V_{\vec{x}}$, donc est un **ouvert**.

- De plus, f est **injective** : $\forall \vec{x_1}, \vec{x_2} \in E$ tels que $f(\vec{x_1}) = f(\vec{x_2})$,

  $$k \|\vec{x_1} - \vec{x_2}\| \;\leqslant\; \|f(\vec{x_1}) - f(\vec{x_2})\| \;=\; 0$$

  donc $\|\vec{x_1} - \vec{x_2}\| = 0$, donc $\vec{x_1} = \vec{x_2}$.

  Ainsi, f est un difféomorphisme local injectif, donc

  $$\boxed{f : E \longrightarrow f(E) \quad \text{est un } \mathcal{C}^1\text{-difféomorphisme}}$$

- En précomposant par f^{-1} dans (1), on a que $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E$, $\left\|f^{-1}(\vec{x}) - f^{-1}(\vec{y})\right\| \leqslant \frac{1}{k} \|\vec{x} - \vec{y}\|$. Donc

  $$\boxed{f^{-1} \text{ est } {}^1\!/\!_k\text{-lipschitzienne pour } \|\cdot\|}$$

- Montrons que f est un difféomorphisme sur $f(E) = E$ tout entier, par **connexité** de E :
  - $f(E)$ est un **ouvert** (déjà vu, car union des ouverts $V_{\vec{x}}$)
  - $f(E)$ est un **fermé** de E. En effet, par caractérisaton séquentielle :

    Soit $(\vec{y_n})_{n \in \mathbb{N}} \in f(E)^{\mathbb{N}}$ telle que $\vec{y_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \vec{y} \in E$. (⚠ Ne pas écrire $f^{-1}(\vec{y})$)

    Alors $\left(f^{-1}(\vec{y_n})\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente car c'est une **suite de Cauchy** dans l'espace **complet** $(E, \|\cdot\|)$ (car EVN de dimension finie) :

    $$\forall p, q \in \mathbb{N}, \quad \|f^{-1}(\vec{y_p}) - f^{-1}(\vec{y_q})\|_1 \leqslant 2 \cdot \|\vec{y_p} - \vec{y_q}\|_1 \xrightarrow[p,q \to \infty]{} 0$$

    car f^{-1} est 2-lipschitzienne et car $(\vec{y_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente donc de Cauchy.

    Notons $\vec{x} := \lim_{n \to \infty} f^{-1}(\vec{y_n})$. Alors par continuité de f,

    $$f(\vec{x}) = f\left(\lim_{n \to \infty} f^{-1}(\vec{y_n})\right) = \lim_{n \to \infty} f(f^{-1}(\vec{y_n})) = \lim_{n \to \infty} \vec{y_n} = \vec{y}$$

    Donc $\vec{y} = f(\vec{x}) \in f(E)$.
  - $f(E)$ est non vide

  or E est connexe (car espace vectoriel), donc $f(E) = E$:

  $$\boxed{f : E \longrightarrow E \quad \text{est un } \mathcal{C}^1\text{-difféomorphisme}}$$

Exemple

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} & \longmapsto & \begin{bmatrix} \sin(y/2) - x \\ \sin(x/2) - y \end{bmatrix} \end{array}$$

- f est de classe $\mathcal{C}^1$ car ses dérivées partielles, de formules

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathrm{Jac}\, f(x,y) \;=\; \left[\; \partial_x f(x,y) \,\middle|\, \partial_y f(x,y) \;\right] \;=\; \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2}\cos\left(\frac{y}{2}\right) \\ \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right) & -1 \end{bmatrix}$$

  sont définies et **continues**. On peut alors montrer que $\forall \vec{u} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\det \mathrm{Jac}\, f(\vec{u}) \;=\; 1 - \frac{1}{4}\cos\left(\frac{y}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) \;\geqslant\; \frac{3}{4} \;> 0$$

  donc que $\mathrm{d}f(\vec{u})$ est inversible. Mais on le sait déjà grâce à la propriété (1) que l'on vérifie :

- Soient et $\vec{u_1} = (x_1, y_1), \vec{u_2} = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. On a alors par définition de f que

$$f(\vec{u_1}) - f(\vec{u_2}) \;=\; \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{y_2}{2}\right) - x_2 \\ \sin\left(\frac{x_2}{2}\right) - y_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{y_1}{2}\right) - x_1 \\ \sin\left(\frac{x_1}{2}\right) - y_1 \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{y_2}{2}\right) - \sin\left(\frac{y_1}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{x_2}{2}\right) - \sin\left(\frac{x_1}{2}\right) \end{bmatrix} + (\vec{u_2} - \vec{u_1})$$

  donc

$$\begin{aligned} \|\vec{u_1} - \vec{u_2}\|_1 \;&=\; \left\| f(\vec{u_2}) - f(\vec{u_1}) - \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{y_2}{2}\right) - \sin\left(\frac{y_1}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{x_2}{2}\right) - \sin\left(\frac{x_1}{2}\right) \end{bmatrix} \right\|_1 \\ &\leqslant\; \|f(\vec{u_2}) - f(\vec{u_1})\|_1 \;+\; \left|\sin\left(\frac{y_2}{2}\right) - \sin\left(\frac{y_1}{2}\right)\right| + \left|\sin\left(\frac{x_2}{2}\right) - \sin\left(\frac{x_1}{2}\right)\right| \\ (*_1) \qquad &\leqslant\; \|f(\vec{u_2}) - f(\vec{u_1})\|_1 \;+\; \frac{1}{2}|y_2 - y_1| + \frac{1}{2}|x_2 - x_1| \\ &=\; \|f(\vec{u_2}) - f(\vec{u_1})\|_1 \;+\; \frac{1}{2}\|\vec{u_2} - \vec{u_1}\|_1 \end{aligned}$$

  [$(*_1)$: puisque $|\partial \sin| \leqslant 1$, par accroissements finis, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $|\sin(a/2) - \sin(b/2)| \leqslant |a/2 - b/2|$]
  donc

$$\forall \vec{u_1}, \vec{u_2} \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{1}{2}\|\vec{u_1} - \vec{u_2}\|_1 \leqslant \|f(\vec{u_1}) - f(\vec{u_2})\|_1$$

Ainsi, en utilisant le théorème précédent $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.