Caractérisation séquentielle de la continuité à droite pour une fonction croissante

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction *croissante* avec I un voisinage de $a \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} f \text{ continue à droite en } a \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}_{\searrow} : x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\searrow} a,\ f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a) \\ &\Longleftrightarrow \quad f\left(a + {}^1\!/_n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a) \end{aligned}$$

Preuve $3 \Rightarrow 1$:

Par contraposée, supposons que $f \underset{a^+}{\not\longrightarrow} f(a)$, c'est à dire que

$$\exists \varepsilon > 0 \ : \ \forall \delta > 0,\ \exists x \in]a, a+\delta[\cap I \ : \ \underbrace{f(x) - f(a)}_{\substack{\geqslant 0 \text{ car } x \geqslant a \\ \text{et par croissance de } f}} \geqslant \varepsilon$$

En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$, si l'on prend $\delta = \frac{1}{n}$, alors $\exists x_n \in]a, a + {}^1\!/_n[\cap I \ : \ f(x_n) - f(a) \geqslant \varepsilon$. Alors

$$f\left(a + {}^1\!/_n\right) - f(a) \ = \ \underbrace{f\left(a + {}^1\!/_n\right) - f(x_n)}_{\substack{\geqslant 0 \text{ car } a + {}^1\!/_n \geqslant \widetilde{x_n} \\ \text{et par croissance de } f}} + \underbrace{f(x_n) - f(a)}_{\geqslant \varepsilon} \ \geqslant \ \varepsilon$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ f\left(a + {}^1\!/_n\right) - f(a) \geqslant \varepsilon$, donc $f\left(a + {}^1\!/_n\right) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} f(a)$.

Preuve $1 \Rightarrow 2$:

Supposons que f est continue à droite en a, c'est à dire que $f \xrightarrow[a^+]{} f(a)$, donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ : \ \forall x \in]a, a+\delta_\varepsilon[\cap I,\ \underbrace{f(x) - f(a)}_{\substack{\geqslant 0 \text{ car } x \geqslant a \\ \text{et par croissance de } f}} < \varepsilon$$

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}_{\searrow} : x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\searrow} a$, c'est à dire que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \geqslant N_\varepsilon,\ 0 \leqslant x_n - a < \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$, posons $N = N_{\delta_\varepsilon}$. Alors $\forall n \geqslant N,\ 0 \leqslant x_n - a < \delta_\varepsilon$, c'est à dire $x_n \in]a, a+\delta_\varepsilon[$. Donc par continuité, $f(x_n) - f(a) < \varepsilon$. Ainsi,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \geqslant N,\ f(x_n) - f(a) < \varepsilon \quad \text{d'où} \quad f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\searrow} f(a)$$

Preuve $2 \Rightarrow 3$: évident car $a + {}^1\!/_n \xrightarrow[n\to\infty]{\searrow} a$.