Complétude de la sphère unité

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. Montrons que

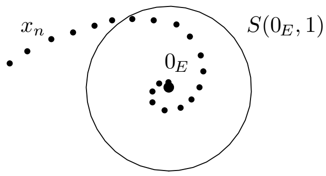
$$\boxed{(E, \|\cdot\|) \text{ complet } \iff \big(S := \mathrm{S}_{\|\cdot\|}(0_E, 1), \|\cdot\|\big) \text{ complet}}$$

$\Longrightarrow$. Comme $S = \partial\, \mathrm{B}_{\|\cdot\|}(0_E, 1)$ étant une partie fermée de $(E, \|\cdot\|)$ complet, elle l'est aussi. $\square$

$\Longleftarrow$. Supposons que $(S, \|\cdot\|)$ est complet. Montrons la complétude de $(E, \|\cdot\|)$.

Soit $\boldsymbol{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}_{\mathsf{cauchy}_{\|\cdot\|}}$ une suite de Cauchy de E. Montrons qu'elle converge.

On a bien envie de poser $\widetilde{x_n} := x_n / \|x_n\| \in \mathrm{S}(0_E, 1)$, mais ce n'est pas forcément une suite de Cauchy, par exemple dans le cas où la suite tend vers 0_E en spirale, où $\widetilde{x_n}$ trourne indéfiniment :



- Cas $0_E \in \mathrm{Adh}(\boldsymbol{x})$. C'est une suite de Cauchy possédant une valeur d'adhérence, donc elle converge vers cette valeur : $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0_E$. C'est gagné.
- Cas $0_E \notin \mathrm{Adh}(\boldsymbol{x})$: par négation,

$$\exists \varepsilon_{\mathsf{a}} > 0,\ \exists N_{\mathsf{a}} \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N_{\mathsf{a}},\ \|x_n\| \geqslant \varepsilon_{\mathsf{a}}$$

Fixons de tels ε_{a} et N_{a}. Posons alors $\forall n \geqslant N_{\mathsf{a}}$,

$$\widetilde{x_n} := \frac{x_n}{\|x_n\|} \in \mathrm{S}(0_E, 1)$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy,

$$\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall p, q \geqslant N_\varepsilon,\ \underbrace{\|x_p - x_q\|}_{\big|\|x_p\| - \|x_q\|\big| \,\leqslant} < \varepsilon$$

On remarque donc que la suite des normes $\big(\|x_n\|\big)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathsf{cauchy}_{|\cdot|}}$ est une suite de Cauchy. Or $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet, donc elle converge :

$$\|x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \in \mathbb{R}$$

Montrons que $(\widetilde{x_n})_{n \geqslant N_{\mathsf{a}}}$ est de Cauchy. Posons $N := \max(N_{\mathsf{a}}, N_\varepsilon)$. Alors $\forall p, q \geqslant N$,

$$\begin{aligned}
\|\tilde{x_p} - \tilde{x_q}\| = \left\| \frac{x_p}{\|x_p\|} - \frac{x_q}{\|x_q\|} \right\| &= \left\| \frac{x_p - x_q}{\|x_p\|} + x_q \left(\frac{1}{\|x_p\|} - \frac{1}{\|x_q\|} \right) \right\| \\
&\leqslant \frac{\|x_p - x_q\|}{\|x_p\|} + \|x_q\| \left(\frac{1}{\|x_p\|} - \frac{1}{\|x_q\|} \right) \\
&= \frac{\|x_p - x_q\| + \|x_q\| - \|x_p\|}{\|x_p\|} \\
&\leqslant \frac{\|x_p - x_q\| + \big|\|x_q\| - \|x_p\|\big|}{\|x_p\|} \\
(\|x_n\| \geqslant \varepsilon_{\mathsf{a}} + \text{Cauchy}) \qquad &\leqslant \frac{\varepsilon + \varepsilon}{\varepsilon_{\mathsf{a}}} \leqslant \mathrm{cste}_{/\varepsilon} \cdot \varepsilon \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{cste} = \frac{2}{\varepsilon_{\mathsf{a}}}
\end{aligned}$$

Ainsi, $(\widetilde{x_n})_{n \geqslant N_{\mathsf{a}}} \in S^{\mathbb{N}}_{\mathsf{cauchy}_{\|\cdot\|}}$ est une suite de Cauchy. Or $(S, \|\cdot\|)$ est complet, donc

$$\widetilde{x_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|} \tilde{x} \in S \qquad \text{donc} \qquad x_n = \widetilde{x_n} \cdot \|x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|} \tilde{x} \cdot \alpha \in E$$

par produit de limites. Ainsi, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. $\square$