Complétude de l'espace de convergence uniforme des suites bornées

(E,d) espace métrique complet $\implies$ $(E^{\mathbb{N}}\ell^{\infty}, d_{\infty})$ complet

avec $E^{\mathbb{N}}\ell^{\infty} := \Big\{ (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}} : \mathrm{diam}_d\big(\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}\big) < +\infty \Big\}$

et avec $d_{\infty}\big((x_k)_k, (y_k)_k\big) := \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} d(x_k, y_k)$

Démonstration. C'est l'espace de convergence uniforme des fonctions bornées $\mathbb{N} \longrightarrow E$, avec $\mathbb{N}$ muni de la topologie discrète. □

Démonstration. Dans un EVN $(E, |.|)$ complet.

Soit $(\boldsymbol{x}_n = (x_{n,k})_{k\in\mathbb{N}})_{n\in\mathbb{N}} \in (E^{\mathbb{N}}\ell^{\infty})^{\mathbb{N}}_{\mathrm{cauchy}_{\|\cdot\|_\infty}}$ suite de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. On a donc que

$$\exists N_{\mathrm{c},\varepsilon} \in \mathbb{N} : \forall p,q \geqslant N_{\mathrm{c},\varepsilon},\ \underbrace{\|\boldsymbol{x}_p - \boldsymbol{x}_q\|_\infty}_{= \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \underbrace{|x_{p,k} - x_{q,k}|}_{\text{donc } < \varepsilon}} < \varepsilon$$

Convergence ponctuelle. Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$\exists N_{\mathrm{c},\varepsilon} \in \mathbb{N} : \forall p,q \geqslant N_{\mathrm{c},\varepsilon},\ |x_{p,k} - x_{q,k}| < \varepsilon$. Donc $(x_{n,k})_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}_{\mathrm{cauchy}_{|\cdot|}}$ est de Cauchy.

Or $(E, |\cdot|)$ est complet, donc on a convergence ponctuelle $(x_{n,k})_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}_{\mathrm{cv}_{|\cdot|}}$

Posons alors $x_{\infty,k} := \lim\limits_{n\to\infty} x_{n,k}$ et $\boldsymbol{x}_\infty = (x_{\infty,k})_{k\in\mathbb{N}}$ □

Convergence uniforme. On a vu que

$\forall p,q \geqslant N_{\mathrm{c},\varepsilon},\ \forall k \in \mathbb{N},\ |x_{p,k} - x_{q,k}| < \varepsilon$ donc par passage à la limite $p \to \infty$,

$\forall q \geqslant N_{\mathrm{c},\varepsilon},\ \forall k \in \mathbb{N},\ \Big|\lim\limits_{p\to\infty} x_{p,k} - x_{q,k}\Big| = |x_{\infty,k} - x_{q,k}| \leqslant \varepsilon$

donc $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N,\ \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_\infty\|_\infty \leqslant \varepsilon$ donc $\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_\infty\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ □

Convergence uniforme. Alternativement, par convergence ponctuelle on a que

$\forall k \in \mathbb{N},\ \exists N_{k,\varepsilon} : \forall n \geqslant N_{k,\varepsilon},\ |x_{n,k} - x_{\infty,k}| < \varepsilon$

Alors $\forall n \geqslant N_{\mathrm{c},\varepsilon},\ \forall k \in \mathbb{N}$, en posant $N(k) := \max(N_{\mathrm{c},\varepsilon}, N_{k,\varepsilon})$,

$$\big|x_{n,k} - x_{\infty,k}\big| \leqslant \underbrace{\big|x_{n,k} - x_{N(k),k}\big|}_{\substack{< \varepsilon\ (\textbf{Cauchy}) \\ \text{car } n, N(k) \geqslant N_{\mathrm{c},\varepsilon}}} + \underbrace{\big|x_{N(k),k} - x_{\infty,k}\big|}_{\substack{< \varepsilon\ (\textbf{conv. ponct.}) \\ \text{car } N(k) \geqslant N_{k,\varepsilon}}} < 2\,\varepsilon$$

Donc $\forall n \geqslant N_{\mathrm{c},\varepsilon},\ \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |x_{n,k} - x_{\infty,k}| = \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_\infty\|_\infty \leqslant 2\,\varepsilon$ donc $\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_\infty\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ □

Bornée. Il reste à montrer que $\boldsymbol{x}_\infty \in E^{\mathbb{N}}\ell^{\infty}$. Avec $n := N_{\mathrm{c},\varepsilon}$

$$\|\boldsymbol{x}_\infty\|_\infty = \underbrace{\|\boldsymbol{x}_\infty - \boldsymbol{x}_n\|_\infty}_{\substack{\leqslant 2\varepsilon < +\infty \\ \text{(convergence)}}} + \underbrace{\|\boldsymbol{x}_n\|_\infty}_{\substack{< +\infty \\ \text{car } E^{\mathbb{N}}\ell^{\infty}}} < +\infty$$

Vérification dans un espace métrique (E,d) :

$$\forall k,l \in \mathbb{N},\quad d(x_{\infty,k}, x_{\infty,l}) \leqslant \underbrace{d(x_{\infty,k}, x_{n,k})}_{\leqslant 2\varepsilon < +\infty} + \underbrace{d(x_{n,k}, x_{n,l})}_{\substack{\leqslant \mathrm{diam}(\{x_{n,k}\}_k) \\ < +\infty}} + \underbrace{d(x_{n,l}, x_{\infty,l})}_{\leqslant 2\varepsilon < +\infty}$$

Donc $\mathrm{diam}\big(\{x_{\infty,k}\}_k\big) = \sup\limits_{k,l\in\mathbb{N}} d(x_{\infty,k}, x_{\infty,l}) < +\infty$ □

Finalement, on a que $\boldsymbol{x}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_\infty} \boldsymbol{x}_\infty \in E^{\mathbb{N}}\ell^{\infty}$, donc toute suite de Cauchy est convergente. □

Complétude de l'espace de convergence uniforme des fonctions

(E,d_E) espace métrique et (F,d_F) espace **complet** $\implies$ $(\mathcal{FB}_{d_F}(E,F),d_\infty)$ complet

avec $\mathcal{FB}_{d_F}(E,F) := \left\{ f\in\mathcal{F}(E,F) \,:\, \operatorname{diam}_{d_F}\big(f(E)\big) < +\infty \right\}$

et avec $d_\infty(f,g) := \sup\limits_{x\in E} d\big(f(x),g(x)\big)$

Démonstration. Dans un EVN $(E,|.|)$ complet.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \big(\mathcal{FB}_{d_F}(E,F)\big)^{\mathbb{N}}_{\text{cauchy}_{\|\cdot\|_\infty}}$ suite de Cauchy. Soit $\varepsilon>0$. On a donc que

$$\exists N_{c,\varepsilon}\in\mathbb{N} \,:\, \forall p,q\geqslant N_{c,\varepsilon},\ \underbrace{\|f_p-f_q\|_\infty}_{=\sup\limits_{x\in E}\underbrace{|f_p(x)-f_q(x)|}_{\text{donc } <\varepsilon}} < \varepsilon$$

Convergence ponctuelle. Ainsi, $\forall x\in E$,

$\exists N_{c,\varepsilon}\in\mathbb{N} \,:\, \forall p,q\geqslant N_{c,\varepsilon},\ \big|f_p(x)-f_q(x)\big|<\varepsilon.$ Donc $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}\in F^{\mathbb{N}}_{\text{cauchy}_{|\cdot|}}$ est de Cauchy.

Or $(F,|\cdot|)$ complet, donc on a convergence ponctuelle $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}\in F^{\mathbb{N}}_{\text{cv}_{|\cdot|}}$

Posons alors $f: x\longmapsto f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ □

Convergence uniforme. Par convergence ponctuelle on a que

$\forall x\in E,\ \exists N_{x,\varepsilon} \,:\, \forall n\geqslant N_{x,\varepsilon},\ \big|f_n(x)-f(x)\big|<\varepsilon$

Alors $\forall n\geqslant N_\varepsilon := N_{c,\varepsilon},\ \forall x\in E,$ en posant $N := \max(N_{c,\varepsilon},N_{x,\varepsilon})$

$$\big|f_n(x)-f(x)\big| \leqslant \underbrace{\big|f_n(x)-f_N(x)\big|}_{\substack{<\varepsilon\ (\textbf{Cauchy})\\ \text{car } n,N\geqslant N_{c,\varepsilon}}} + \underbrace{\big|f_N(x)-f(x)\big|}_{\substack{<\varepsilon\ (\textbf{conv. ponct.})\\ \text{car } N\geqslant N_{x,\varepsilon}}} < 2\varepsilon$$

Donc $\forall n\geqslant N_\varepsilon,\ \sup\limits_{x\in E}\big|f_n(x)-f(x)\big| = \|f_n-f\|_\infty \leqslant 2\varepsilon$ donc $\|f_n-f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ □

Bornée. Il reste à montrer que f est bornée. Dans un espace métrique (E,d) :

On a par convergence uniforme, et puisque $\forall n\in\mathbb{N},\ f_n$ bornée,

$$\forall x,y\in E,\quad d\big(f(x),f(y)\big) \leqslant \underbrace{d\big(f(x),f_{N_\varepsilon}(x)\big)}_{\leqslant 2\varepsilon<+\infty} + \underbrace{d\big(f_{N_\varepsilon}(x),f_{N_\varepsilon}(y)\big)}_{\substack{\leqslant \operatorname{diam}(f_{N_\varepsilon}(E))\\ <+\infty}} + \underbrace{d\big(f_{N_\varepsilon}(y),f(y)\big)}_{\leqslant 2\varepsilon<+\infty}$$

Donc $\operatorname{diam}\big(f(E)\big) = \sup\limits_{x,y\in E} d\big(f(x),f(y)\big) < +\infty$ □

Finalement, on a que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_\infty} f\in\mathcal{FB}_{d_F}(E,F)$, donc toute suite de Cauchy est convergente. □

Fonctions continues sur un compact

(K,d_K) espace **compact** et (F,d_F) espace **complet** $\implies$ $(\mathcal{C}^0_{d_K,d_F}(K,F),d_\infty)$ complet

Démonstration. Toute fonction continue sur un compact est bornée, donc

$\mathcal{C}^0_{d_K,d_F}(K,F)\subset\mathcal{FB}_{d_F}(K,F)$. De plus, c'est une partie **fermée** de $(\mathcal{FB}_{d_F}(E,F),d_\infty)$:

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathcal{C}^0_{d_K,d_F}(K,F)^{\mathbb{N}} \xrightarrow{d_\infty} f$. C'est une limite uniforme de fonctions continues,

donc elle même continue : $f\in\mathcal{C}^0_{d_K,d_F}(K,F)$. □

Non-complétude de $(\mathrm{L}^p(E,F), d_\infty)$

Même si $(E,|\cdot|)$ complet, $(E^{\mathbb{N}}\ell^p, \|\cdot\|_\infty)$ pas forcément complet pour $p\in[1,+\infty[$

avec $E^{\mathbb{N}}\ell^p := \left\{(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\in E^{\mathbb{N}} : \left\|(x_k)_k\right\|_p^p := \sum_{k=0}^{+\infty} |x_k|^p < +\infty\right\}$

Contre-exemple. En effet, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\ell^p \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\ell^\infty$

(car par contraposée, si $\|(x_k)_k\|_\infty = +\infty$, alors $\left(|x_k|^p\right)_k$ non bornée et sa série $\sum_{k=0}^{+\infty}|x_n|^p$ diverge grossièrement)

Pourtant, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\ell^p$ est **non fermé** dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$:

Considérons $\forall n,k\in\mathbb{N},\ x_{n,k} := \dfrac{\mathbb{1}_{[\![0,n]\!]}(k)}{\sqrt[p]{k+1}}$ et $\boldsymbol{x}_n = (x_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$

Alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $\|\boldsymbol{x}_n\|_p^p = \sum_{k=0}^{+\infty}\left|x_{n,k}\mathbb{1}_{[\![0,n]\!]}(k)\right|^p = \sum_{k=0}^{n}|x_{n,k}|^p < +\infty$ (somme finie) donc $\boldsymbol{x}_n\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\ell^p$

Or $\boldsymbol{x}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_\infty} \boldsymbol{x}_\infty := \left(\dfrac{1}{\sqrt[p]{k+1}}\right)_k \notin \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\ell^p$ car $\|\boldsymbol{x}_\infty\|_p^p = \sum_{k=0}^{+\infty}\left|\dfrac{1}{\sqrt[p]{k+1}}\right|^p = \sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{k} = +\infty$ □

Non-complétude de $(\mathcal{C}^0(K,F), \|\cdot\|_1)$

$(\mathcal{C}^0(K,F),\|\cdot\|_1)$ n'est pas forcément complet, avec $\|f\|_1 := \int_K |f|$ (vraie norme sur $\mathcal{C}^0(K,F)$ car $\forall f\in\mathcal{C}^0(K,F) : \|f\|_1 = 0$, $|f|$ est positive continue d'intégrale nulle, donc $|f|=0$ donc $f=0$)

Démonstration. Considérons $\left(\mathrm{L}^1 = \mathscr{L}^1/_{\mathrm{Ker}\|\cdot\|_1}, \|\cdot\|_{1\sim}\right)$ et $\Phi : \mathscr{L}^1 \longrightarrow \mathrm{L}^1 : f\longmapsto \tilde{f}$ proj. canonique

Alors $\left(\mathcal{C}^0(K,F),\|\cdot\|_1\right)$ est isométrique à $\left(\Phi\left(\mathcal{C}^0(K,F)\right),\|\cdot\|_{1\sim}\right)$

($\Phi\big|_{\mathcal{C}^0}^{\Phi(\mathcal{C}^0)}$ bijective car Φ injective, et $\|\cdot\|_{1\sim} = \|\cdot\|_1\circ\Phi$ donc isométrique)

Or $\Phi\left(\mathcal{C}^0([0,2],\mathbb{R})\right)$ non fermé dans l'espace métrique $\left(\mathrm{L}^1([0,2],\mathbb{R}),\|\cdot\|_{1\sim}\right)$ donc non complet.

Ainsi, par isométrie, $\left(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}),\|\cdot\|_1\right)$ est non complet. □

Contre-exemple. Posons la suite de fonctions continues
$$f_n : \begin{array}{l} [0,2]\longrightarrow\mathbb{R} \\ x\longmapsto x^n \quad \text{si } x\in[0,1] \\ x\longmapsto 1 \quad \text{sinon}\end{array}$$

Supposons que $\exists f\in\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}) : f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_1} f$. On a que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{1}_{[1,2]}$

Alors $(|f_n - f|)_{n\in\mathbb{N}}$ suite décroissante de fonctions mesurables (car continues) donc par convergence monotone $\int|\mathbb{1}_{[1,2]} - f| = \int\left|\lim_{n\to\infty} f_n - f\right| = \lim_{n\to\infty}\int|f_n - f| = \lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_1 = 0$

$|\mathbb{1}_{[1,2]} - f|$ positive d'intégrale nulle donc $f \overset{\mu\text{-pp}}{=} \mathbb{1}_{[1,2]}$. Or $0 = \lim_{1^-}\mathbb{1}_{[1,2]} \neq \lim_{1^+}\mathbb{1}_{[1,2]} = 1$.

donc $\mathbb{1}_{[1,2]}$ possède une <u>discontinuité d'ordre 1</u> donc f ne peut être que discontinue. Absurde.

Donc $\left(\Phi(f_n)\right)_{n\in\mathbb{N}} \notin \Phi\left(\mathcal{C}^0([0,2],\mathbb{R})\right)^{\mathbb{N}}_{\mathrm{cv}_{\|\cdot\|_{1,\sim}}}$ donc $\Phi\left(\mathcal{C}^0([0,2],\mathbb{R})\right)$ partie non fermé. □

Complétude d'un espace produit

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ (E_i, d_i) \text{ complet} \quad \Longrightarrow \quad \left(E_\times := \bigtimes_{i=1}^{n} E_i,\ d_\times \right) \text{complet, avec } d_\times = d_\infty, d_1, \dots \text{ équivalentes}$$

Démonstration. Posons π_i les projections canoniques.

Soit $(\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (E_\times)^{\mathbb{N}}_{\text{cauchy}_{d_\times}}$ suite de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. On a donc que

$$\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall p, q \geqslant N_\varepsilon,\ \underbrace{d_\infty(\boldsymbol{x}_p, \boldsymbol{x}_q)}_{= \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \underbrace{d_i\big(\pi_i(\boldsymbol{x}_p), \pi_i(\boldsymbol{x}_q)\big)}_{\text{donc } < \varepsilon}} < \varepsilon$$

Ainsi, $\forall i \in [\![1, n]\!]$,

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall p, q \geqslant N_\varepsilon,\ d_i\big(\pi_i(\boldsymbol{x}_p), \pi_i(\boldsymbol{x}_q)\big) < \varepsilon$ donc $\big(\pi_i(\boldsymbol{x}_n)\big)_n \in (E_i)^{\mathbb{N}}_{\text{cauchy}_{d_i}}$ de Cauchy.

Or (E_i, d_i) complet, donc $\pi_i(\boldsymbol{x}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} x_{\infty,i} \in E_i$

Chaque composante converge, donc par topologie produit, $\boldsymbol{x}_n \xrightarrow[n\to\infty]{d_\times} (x_{\infty,i})_{1\leqslant i\leqslant n} \in (E_\times)^{\mathbb{N}}$ $\square$