Convolution

1. Définitions et propriétés

Soient $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ deux fonctions mesurables.

$$\boxed{f \text{ et } g \textbf{ convolables} \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \forall x \overset{\text{pp}}{\in} \mathbb{R}^d, \quad y \mapsto f(x-y)\, g(y) \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)}$$

On définit alors la **convoluée** / le produit de convolution de f et g par

$$\boxed{f * g : x \longmapsto \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}y\, f(x-y)\, g(y)}$$

défini sur $\mathbb{R}^d \backslash N$ avec N négligeable. Par la suite, lorsque $f : \mathbb{R}^d \backslash N_f \longrightarrow F$ et $g : \mathbb{R}^d \backslash N_g \longrightarrow F$ définies en dehors de parties négligeables N_f, N_g, $N_f \cup N_g$ étant négligeable, on utilisera la notation

$$f \doteq g \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \forall x \in {}^{\complement}N_f \cap {}^{\complement}N_g, \quad f(x) = g(x)$$

Par le changement de variable $y \to x - y$, on a alors $\int \mathrm{d}y\, f(x-y)\, g(y) = \int \mathrm{d}y\, f(y)\, g(x-y)$. Le produit de convolution est donc **commutatif** :

$$\boxed{f * g = g * f}$$

Par linéarité de l'intégrale, le produit de convolution est **bilinéaire** : lorsque f, g et f, h sont convolables, et $\lambda \in \mathbb{K}$, f et $\lambda\, g + h$ sont convolables et

$$\boxed{f * (\lambda\, g + h) \doteq \lambda\, f * g + f * h}$$

Compatibilité avec les translations. Soient f, g deux fonctions convolables. Alors :

$$\forall a \in \mathbb{R}^d, \quad \boxed{\mathrm{trsl}_a(f) * g \doteq \mathrm{trsl}_a(f * g)}$$

Support. Soient f, g deux fonctions convolables. Alors :

$$\boxed{\mathrm{supp}_{\mathrm{ess}}\, f * g \ \subset\ \overline{\mathrm{supp}_{\mathrm{ess}}\, f + \mathrm{supp}_{\mathrm{ess}}\, g}}$$

[rappel : si $f \in \mathcal{M}(\Omega)$, le support est le complémentaire du plus gros ouvert sur lequel f est nulle presque partout : $\mathrm{supp}_{\mathrm{ess}}(f) = \Omega \backslash \bigcup \left\{U \in \mathcal{O}(\Omega) : f|_U \overset{\text{pp}}{=} 0\right\}$]

2. Convolution dans L^p

Algèbre de convolution L^1. Soient $f, g \in \mathscr{L}^1$, alors f et g convolables et $f * g \in \mathscr{L}^1$. De plus, $f * g$ est indépendant des représentants choisis pour $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathrm{L}^1$, donc $* : \mathrm{L}^1 \times \mathrm{L}^1 \to \mathrm{L}^1$ est bien défini.

De plus, le produit de convolution est **associatif** dans L^1 et $\|\cdot\|_1$ est une norme d'algèbre :

$$\boxed{\forall f, g, h \in \mathrm{L}^1, \quad f * (g * h) \doteq (f * g) * h} \quad \text{et} \quad \boxed{\forall f, g \in \mathrm{L}^1, \quad \|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \cdot \|g\|_1}$$

Soient $f, g \in \mathscr{L}^1$. On montre alors que $(x, y) \mapsto |f(x-y)\, g(x)|$ est mesurable, donc par le théorème de Fubini-positif puis par le changement de variable $x - y \mapsto x$, on a

$$\big\| |f| * |g| \big\|_1 = \int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y\, |f(x-y)\, g(y)| = \int \mathrm{d}y\, |g(y)| \int \mathrm{d}x\, |f(x-y)| = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 < +\infty$$

donc $(x, y) \mapsto f(x-y)\, g(x)$ est intégrable. Donc par Fubini-L^1, $\forall x \overset{\text{pp}}{\in} \mathbb{R}^d$, $y \mapsto f(x-y)\, g(x) \in \mathscr{L}^1$ donc f et g sont convolables, et $x \mapsto \int \mathrm{d}y\, f(x-y)\, g(x) = (f * g)(x) \in \mathscr{L}^1$. Alors par inégalité triangulaire,

$$\|f * g\|_1 = \int \mathrm{d}x \left| \int \mathrm{d}y\, f(x-y)\, g(y) \right| \leqslant \int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y\, |f(x-y)\, g(y)| = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$$

Ainsi, $\boxed{\left(\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d), +, \cdot_{\mathbb{K}}, *, \|\cdot\|_1\right) \quad \text{algèbre de Banach commutative non-unitaire}}$

Non existence d'un neutre : En effet, si $\exists u \in \mathscr{L}^1 : \forall f \in \mathscr{L}^1$, $u * f = f$, avec $f = \mathbb{1}_{[0,1]} \in \mathscr{L}^1 \cap \mathscr{L}^\infty$ fonction porte, par régularisation L^∞, $f = u * f$ devrait être continue, ce qui n'est pas le cas.

On a même par Fubini-L^1 que

$$\boxed{\int f * g = \int f \cdot \int g}$$

Convolution dans L^p. Soient $f \in \mathscr{L}^p$ et $g \in \mathscr{L}^1$ avec $p \in [1, +\infty]$. Alors f et g convolables et

$$\boxed{f * g \in \mathscr{L}^p \quad \text{et} \quad \|f * g\|_p \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_1}$$

Pour $p < 1$ (sinon déjà vu). **Convolabilité** : $\forall K \subset \mathbb{R}^d$ compact, par l'inégalité de Hölder, on a

$$\forall y \in \mathbb{R}^d, \quad \big\| |\mathrm{trsl}_y f| \cdot \mathbb{1}_K \big\|_1 \leqslant \|\mathrm{trsl}_y f\|_p \cdot \|\mathbb{1}_K\|_q = \|f\|_p \cdot |K|^{1/q}$$

avec q conjugué à p. Donc après avoir montré la mesurabilité, par Fubini-positif,

$$\int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y\, |f(x-y)\, g(y)|\, \mathbb{1}_K(x) = \int \mathrm{d}y\, |g(y)| \int |\mathrm{trsl}_y f|\, \mathbb{1}_K = \int \mathrm{d}y\, |g(y)|\, \big\| |\mathrm{trsl}_y f|\, \mathbb{1}_K \big\|_1 \leqslant \|f\|_p \cdot |K|^{1/q} \cdot \|g\|_1 < +\infty$$

Donc par Fubini-L^1, $\forall x \overset{\text{pp}}{\in} K$, $y \mapsto f(x-y)\, g(y)\, \cancel{\mathbb{1}_K(x)} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$. Donc $\forall x \overset{\text{pp}}{\in} \mathbb{R}^d$, en choisissant $K_x \ni x$, $y \mapsto f(x-y)\, g(y) \in \mathscr{L}^1$ donc f et g convolables.

Pour L^∞ :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad |f * g|(x) \leqslant \int \mathrm{d}y\, \overbrace{|f(x-y)|}^{\leqslant \|f\|_\infty} |g(y)| \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_1 \quad \text{donc} \quad \|f * g\|_\infty \overset{(\mathrm{supp}_{\mathrm{ess}} \leqslant \mathrm{supp})}{\leqslant} \|f\|_\infty \cdot \|g\|_1 < +\infty$$

Pour L^p avec $1 < p < +\infty$: $\forall x \in \mathbb{R}^d$, puisque $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ et par l'inégalité de Hölder,

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \big\| |f(x-\cdot)\, g(\cdot)| \big\|_1 = \big\| |f(x-\cdot)|\, |g|^{1/p} \cdot |g|^{1/q} \big\|_1 \leqslant \big\| |f(x-\cdot)|\, |g|^{1/p} \big\|_p \cdot \underbrace{\big\| g^{1/q} \big\|_q}_{= \|g\|_1^{1/q}}$$

Donc

$$\begin{aligned} \|f * g\|_p^p &\leqslant \int \mathrm{d}x \left(\int \mathrm{d}y\, |f(x-y)\, g(y)| \right)^p \\ \text{(inégalité précédente)} \quad &\leqslant \int \mathrm{d}x \left(\int \mathrm{d}y\, |f(x-y)\, g^{1/p}(y)|^p \right)^{p/p} \|g\|_1^{p/q} \\ \text{(Fubini)} \quad &= \|g\|_1^{p/q} \int \mathrm{d}y\, |g(y)| \int \mathrm{d}x\, |f(x-y)|^p \\ ({}^{p}/_{q} + 1 = p + \text{ch.var.}) \quad &= \|g\|_1^{p/q+1} \cdot \|f\|_p^p = \left(\|f\|_p \cdot \|g\|_1\right)^p < +\infty \end{aligned}$$

Inégalité de Young. Soient $1 \leqslant p, q \leqslant r \leqslant +\infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ et $f \in \mathscr{L}^p$ et $g \in \mathscr{L}^q$. Alors f et g convolables et

$$\boxed{f * g \in \mathscr{L}^r \quad \text{et} \quad \|f * g\|_r \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q}$$

Quand $1 < p, q \leqslant r < +\infty$ (sinon déjà vu), on a, grâce à l'inégalité de Hölder à trois termes appliquée avec $1 = \frac{1}{r} + \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'}$ avec p', q' conjugués à p, q, que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \left((|f| * |g|)(x)\right)^r \leqslant \|f\|_p^{r-p} \cdot \|g\|_q^{r-q} \cdot (|f|^p * |g|^q)(x)$$

avec $|f|^p * |g|^q \in \mathscr{L}^1$ puisque $\mathrm{L}^1 * \mathrm{L}^1 \subset \mathrm{L}^1$ et $|f|^p, |g|^q \in \mathscr{L}^1$. Donc $(|f| * |g|)^r \in \mathscr{L}^1$ donc f et g convolables par Fubini-L^1, et $f * g \in \mathscr{L}^r$. De plus, en utilsant cette inégalité et $\|\cdot * \cdot\|_1 \leqslant \|\cdot\|_1 \cdot \|\cdot\|_1$,

$$\|f * g\|_r^r \leqslant \big\| |f| * |g| \big\|_r^r \leqslant \|f\|_p^{r-p} \cdot \|g\|_q^{r-q} \cdot \underbrace{\big\| |f|^p * |g|^q \big\|_1}_{\leqslant \|f\|_p^p \cdot \|g\|_q^q} \leqslant \|f\|_p^r \cdot \|g\|_q^r$$

Approximations de l'unité dans L^1.

Une approximation de l'unité pour la convolution est un noyau $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathscr{L}^1$ tel que :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$ positif et $\|u_n\|_1 = \int u_n = 1$ unitaire (c'est à dire une loi de proba)
- $\forall \delta > 0$ arbitrairement petit, $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \int_{{}^{\complement}\mathrm{B}(\delta)} u_n = 0$

Et alors, on a

- la **convergence uniforme** (ponctuelle) de la suite des convolées avec f bornée uniformément continue :

$$\boxed{\forall f \in \mathcal{CU}^0 \cap \mathscr{L}^\infty, \quad u_n * f \xrightarrow[n \to \infty]{\mathsf{CU}} f} \qquad \left(\lim_{n \to \infty} \|u_n * f - f\|_\infty = 0\right)$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est uniformément continue, $\exists \eta = \eta_\varepsilon > 0 : \forall a, b$, $|a - b| \leqslant \eta \Rightarrow |f(a) - f(b)| \leqslant \varepsilon$.

$$\begin{aligned} \left|(u_n * f)(x) - f(x)\right| &= \left| \int \mathrm{d}y\, (f(x-y) - f(x))\, u_n(y) \right| \quad \text{car} \quad 1 = \textstyle\int u_n \\ (f \in \mathscr{L}^\infty + \text{cont.u.}) \quad &\leqslant \int_{|y| < \eta} \mathrm{d}y\, \underbrace{|f(x-y) - f(x)|}_{\leqslant \varepsilon \text{ car } |y| < \eta_\varepsilon} u_n(y) + \int_{|y| \geqslant \eta} \mathrm{d}y\, \underbrace{|f(x-y) - f(x)|}_{\leqslant 2\|f\|_\infty} u_n(y) \\ (\textstyle\int u_n = 1) \quad &\leqslant \varepsilon \cdot \int u_n + 2\|f\|_\infty \cdot \int_{{}^{\complement}\mathrm{B}(\eta)} u_n \leqslant \varepsilon \cdot (1 + 2\|f\|_\infty) \end{aligned}$$

lorsque $n \geqslant N_\varepsilon$ de la limite $\int_{{}^{\complement}\mathrm{B}(\eta)} u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$. Donc $\|u_n * f - f\|_\infty = \sup |u_n * f - f| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

On peut aussi utiliser directement la continuité des translations d'une fonction uniformément continue.

- la **convergence L^p** (intégrale) de la suite des convolées lorsque $p \in [1, +\infty[$:

$$\boxed{\forall f \in \mathscr{L}^p, \quad u_n * f \xrightarrow[n \to \infty]{\|\cdot\|_p} f} \qquad \left(\lim_{n \to \infty} \|u_n * f - f\|_p = 0\right)$$

Pour L^1. En utilisant la continuité de la translation pour $\|\cdot\|_1$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|u_n * f - f\|_1 &= \int \mathrm{d}x \left| \int \mathrm{d}y\, (f(x-y) - f(x))\, u_n(y) \right| \quad \text{car} \quad 1 = \textstyle\int u_n \\ &\leqslant \int \mathrm{d}y\; u_n(y) \int \left|\mathrm{trsl}_y f - f\right| \qquad \text{(Inégalité triangulaire + Fubini)} \\ &\leqslant \int_{|y| < 1/n} \mathrm{d}y\, u_n(y)\, \|\mathrm{trsl}_y f - f\|_1 + \int_{|y| \geqslant 1/n} \mathrm{d}y\; u_n(y) \left(\|\mathrm{trsl}_y f\|_1 + \|f\|_1\right) \\ &\leqslant \underbrace{\sup_{y \in \mathrm{B}(1/n)} \|\mathrm{trsl}_y f - f\|_1}_{\xrightarrow[n \to \infty]{} 0} \cdot \underbrace{\int u_n}_{= 1} + 2\|f\|_1 \cdot \underbrace{\int_{{}^{\complement}\mathrm{B}(1/n)} u_n}_{\xrightarrow[n \to \infty]{} 0} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \end{aligned}$$

En général. Par densité de $\mathcal{C}^0_{\mathsf{ksupp}}$ dans L^p.
[TODO]

Exemples d'approximations de l'unité :

- Sur $\mathbb{R}$: $u \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$ telle que $\|u\|_1 = 1 \implies \boxed{u_n := n\, \mathrm{dil}_{1/n}(u) = x \mapsto n\, u(n\, x)}$

Lorentzienne (loi de Cauchy)	Exponentielle (loi de Laplace)	Gaussienne (loi normale)
$x \mapsto \frac{1}{\pi} \frac{1}{x^2 + 1}$	$x \mapsto \frac{1}{2} \mathrm{e}^{-\lvert x \rvert}$	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2}$

On peut montrer directement la convergence L^1 de $u_n = n\, \mathrm{dil}_{1/n}(u) * f$ par convergence dominée :

$$\|u_n * f - f\|_1 \underset{t = ny}{\leqslant} \int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}t\, \left|\mathrm{trsl}_{t/n} f - f\right|(x)\, u(t) \underset{\text{Fubini}}{\leqslant} \int \mathrm{d}t\, \underbrace{\|\mathrm{trsl}_{t/n} f - f\|_1\, u(t)}_{\leqslant 2\|f\|_1 \cdot u \in \mathscr{L}^1 \quad \forall n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

puisque $\|\mathrm{trsl}_{\cdot/n} f - f\|_1 \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ par continuité de la translation.

- Sur $\mathbb{T}$: noyau de Féjer $\quad u_n := \theta \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n - |k|}{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta} = \begin{cases} \frac{1}{n} \left(\frac{\sin(\theta\, n/2)}{\sin(\theta/2)}\right)^2 & \text{si } \theta \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ n & \text{si } \theta \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$

  noyau de Poisson $\quad u_r := \theta \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} r^{|k|} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta} = \dfrac{1 - r^2}{1 - 2\, r \cos(\theta) + r^2} \quad (r \in [0, 1[)$

3. Régularisation

Régularisation $\mathcal{CU}^0$. Soient $p, q \in [1, +\infty]$ conjugués ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) et $f \in \mathscr{L}^p$ et $g \in \mathscr{L}^q$

$$\boxed{f * g \in \mathcal{CU}^0 \cap \mathscr{L}^\infty(\mathbb{R}^d) \text{ définie partout bornée uniformément continue} \quad \text{et} \quad \|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q}$$

en particulier lorsque $f \in \mathscr{L}^1$ et $g \in \mathscr{L}^\infty$.

Convolabilité et norme : Par inégalité triangulaire puis inégalité de Hölder, $\forall x \in \mathbb{R}^d$,

$$|f * g|(x) \leqslant \|f(x - \cdot)\, g(\cdot)\|_1 \leqslant \|f(x - \cdot)\|_p \cdot \|g\|_q = \|f\|_p \cdot \|g\|_q < +\infty$$

donc $f * g$ définie partout et $\|f * g\| = \sup_x |f * g|(x) \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q$.

Continuité uniforme par densité de $\mathcal{C}^0_{\mathsf{ksupp}}$ dans L^p :

- Supposons que $f \in \mathcal{C}^0_{\mathsf{ksupp}}$ continue sur le compact $K := \mathrm{supp}\, f$, donc uniformément continue $\Leftrightarrow$

  $$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta_\varepsilon > 0 : \forall a, b \in \mathbb{R}^d, \ \left(|a - b| \leqslant \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(a) - f(b)| \leqslant \varepsilon \cdot (\mathbb{1}_K(a) + \mathbb{1}_K(b)) \right)$$

  donc lorsque $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d : |x_1 - x_2| \leqslant \eta_\varepsilon$,

  $$\begin{aligned} \left|(f * g)(x_1) - (f * g)(x_2)\right| &\leqslant \int \mathrm{d}y\, |f(x_1 - y) - f(x_2 - y)|\, |g(y)| \\ &\leqslant \varepsilon \cdot \left(\int \mathrm{d}y\, \mathbb{1}_K(x_1 - y)\, |g(y)| + \int \mathrm{d}y\, \mathbb{1}_K(x_2 - y)\, |g(y)| \right) \\ &\leqslant 2\, \varepsilon\, |K|^{1/p} \|g\|_q = \mathrm{cste}_{/x_1, x_2} \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

  car, par l'inégalité de Hölder, $\int \mathrm{d}y\, \mathbb{1}_K(x_1 - y)\, |g(y)| = \big\| \mathbb{1}_K(x_1 - \cdot)\, |g(\cdot)| \big\|_1 \leqslant \|\mathbb{1}_K\|_p \cdot \|g\|_q$.
  Donc, quitte à choisir η plus petit, $f * g \in \mathcal{CU}^0$ uniformément continue lorsque $f \in \mathcal{C}^0_{\mathsf{ksupp}}$.

- Quitte à $p \leftrightarrow q$, prenons $p < +\infty$. Supposons que $f \in \mathscr{L}^p$. Par densité, $\exists (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in {\mathcal{C}^0_{\mathsf{ksupp}}}^{\mathbb{N}}$:

  $$f_n \xrightarrow[n \to \infty]{\|\cdot\|_p} f \quad \text{donc} \quad \|f * g - f_n * g\|_\infty = \|(f - f_n) * g\|_\infty \overset{\text{ineg. convo.}}{\leqslant} \|f - f_n\|_p \cdot \|g\|_q \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

  Convergence uniforme d'une suite de fonctions uniformément continues :

  $$f_n * g \xrightarrow[n \to \infty]{\mathsf{CU}} f * g \quad \text{et} \quad \forall n, \ f_n * g \in \mathcal{CU}^0 \text{ car } f_n \in \mathcal{C}^0_{\mathsf{ksupp}} \implies f * g \in \mathcal{CU}^0$$

Dérivation d'ordre 1. Soient $f \in \mathcal{C}^1_{\mathsf{ksupp}}$ à support compact, ou $f \in \mathcal{S}$ de Schwartz, et $g \in \mathscr{L}^1$. Alors

$$\boxed{f * g \in \mathcal{C}^1 \quad \text{et} \quad \forall i, \ \partial_i(f * g) = (\partial_i f) * g}$$

c'est à dire que la dérivation passe sous le signe d'intégration.

Cas $d = 1$. Puisque $f \in \mathscr{L}^\infty$ et $g \in \mathscr{L}^1$, $f * g$ est définie partout (et continue). Si $f \in \mathcal{C}^1_{\mathsf{ksupp}}$, alors $\partial f \in \mathcal{C}^0_{\mathsf{ksupp}}$ est continue à support compact donc uniformément continue. Si $f \in \mathcal{S}$, $\partial f \in \mathcal{S}$ aussi, donc unif. continue. Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta_\varepsilon > 0 : \forall z \in \mathbb{R}, \forall |h| \leqslant \eta_\varepsilon, \ |\partial f(z + h) - \partial f(z)| \leqslant \varepsilon\, h$$

Par le théorème fondamental de l'analyse (∂f continue), $f(z + h) - f(z) = \int_0^h \partial f(z + t)\, \mathrm{d}t$ donc

$$\begin{aligned} \left|\mathrm{reste}_1(f)(z, h)\right| &= \left|f(z + h) - f(z) - h\, \partial f(z)\right| = \left| \int_0^h \partial f(z + t)\, \mathrm{d}t - \int_0^h \partial f(z)\, \mathrm{d}t \right| \\ &\leqslant \int_0^h |\partial f(z + t) - \partial f(z)|\, \mathrm{d}t \underset{|t| \leqslant \eta_\varepsilon}{\overset{\mathsf{UC}}{\leqslant}} \int_0^h \varepsilon\, \mathrm{d}t = h\, \varepsilon \end{aligned}$$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall |h| \leqslant \eta_\varepsilon$, [$\partial f \in \mathscr{L}^\infty$ et $g \in \mathscr{L}^1$ donc convolables et $\partial f * g$ définie partout et $\mathcal{CU}^0 \cap \mathscr{L}^\infty$]

$$\begin{aligned} \left|(f * g)(x + h) - (f * g)(x) - h\, (\partial f * g)(x)\right| &= \left| \int \mathrm{d}y\, \left(f(x - y + h) - f(x - y) - h\, \partial f(x - y) \right) g(y) \right| \\ &\leqslant \int \left|\mathrm{reste}_1(f)(x - y, h)\right| \left|g(y)\right| \mathrm{d}y \leqslant h\, \varepsilon\, \|g\|_1 = \underset{h \to 0}{o}(h) \end{aligned}$$

Donc $f * g$ est dérivable et $\partial(f * g) = \partial f * g \in \mathcal{CU}^0 \cap \mathscr{L}^\infty$ donc $f * g \in \mathcal{C}^1$.

Le théorème reste vrai pour lorsque $g \in \mathscr{L}^p$ avec $1 \leqslant p < +\infty$.

Par récurrence, on obtient un théorème similaire pour f de classe $\mathcal{C}^k_{\mathsf{ksupp}}$ et les dérivées d'ordre k.

Régularisation. Soient $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_{\mathsf{ksupp}}$ lisse à support compact, et $f \in \mathscr{L}^p$ avec $1 \leqslant p < +\infty$. Alors

$$\boxed{f * \varphi \in \mathcal{C}^\infty \quad \text{et} \quad \forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^d, \ \partial^{\boldsymbol{k}}(f * \varphi) = f * \partial^{\boldsymbol{k}} \varphi}$$

On dit alors que $f * \varphi$ est la **régularisée** de f.

Espace de Schwartz

L'espace de Schwartz est l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de dérivées à décroissance rapide à tout ordre :

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) := \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d) : \forall \boldsymbol{k}, \boldsymbol{l} \in \mathbb{N}^d, \ \|f\|_{\mathcal{S}|\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}} < +\infty \right\} \quad \text{avec} \quad \|f\|_{\mathcal{S}|\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}} := \left\| x \mapsto x^{\boldsymbol{k}}\, \partial^{\boldsymbol{l}} f(x) \right\|_\infty$$

- stable par addition, dérivation, multiplication interne
- stable multiplication par les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de dérivées à croissance polynomiale, en particulier par les polynômes
- contient $\mathcal{D} := \mathcal{C}^\infty_{\mathsf{ksupp}}$ (donc les fonctions plateau) et les gaussiennes $x \mapsto \mathrm{e}^{-a|x|}$ pour $a > 0$.

Les fonctions de l'espace de Schwartz sont uniformément continues car, par le théorème des accroissements finis,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |||\mathrm{d}f(x)|||_\infty \leqslant \max_{i \in [\![1, d]\!]} \|\partial_i f\|_\infty < +\infty \quad \Rightarrow \quad f \text{ lipschitzienne} \quad \Rightarrow \quad f \text{ uniformément continue}$$

On a $\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathscr{L}^p$ pour $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, et l'espace de Schwartz est dense dans L^p pour $1 \leqslant p < +\infty$.

En effet, on utilise souvent l'astuce suivante : $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \left\| x \mapsto x^k\, \partial^l f(x) \right\|_1 &= \int_{|x| \leqslant 1} \mathrm{d}x\, |x|^k\, |\partial^l f(x)| + \int_{|x| > 1} \mathrm{d}x\, \frac{|x|^{k+2}}{|x|^2}\, |\partial^l f(x)| \\ &\leqslant \left\| x \mapsto x^k\, \partial^l f(x) \right\|_\infty \cdot \int_{-1}^{1} 1 + \left\| x \mapsto x^{k+2}\, \partial^l f(x) \right\|_\infty \cdot \int_{|x| > 1} \frac{\mathrm{d}x}{|x|^2} \\ &\leqslant 2\left(\|f\|_{\mathcal{S}|k, l} + \|f\|_{\mathcal{S}|k+2, l} \right) \end{aligned}$$

Autre majoration utile :

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \forall \alpha > 0, \quad \exists C > 0 : \quad |f| \leqslant \frac{C}{(1 + |y|)^\alpha} \qquad \Big(C = \|\overbrace{(1 + |\cdot|)^\alpha f}^{\in \mathcal{S}}\|_{\mathcal{S}|0,0} \Big)$$

Convolution dans l'espace de Schwartz. L'espace de Schwartz est stable par convolution :

$$\boxed{f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \implies f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}$$

Dans l'espace de Schwartz, tout est intégrable et les convolutions sont définies partout.

Pour $d = 1$. Puisque $f \in \mathcal{S}$ et $g \in \mathscr{L}^1$, par dérivation à tout ordre, on a encore $f * g \in \mathcal{C}^\infty$, ainsi que $\forall l \in \mathbb{N}$, $\partial^l(f * g) = \partial^l f * g$ avec $\partial^l f \in \mathcal{S}$. Donc $\forall k, l \in \mathbb{N}$,

$$\|f * g\|_{\mathcal{S}|k, l} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^k\, \partial^l(f * g)(x) \right| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^k\, (\overbrace{\partial^l f}^{\in \mathcal{S}} * g)(x) \right| \overset{?}{<} +\infty$$

Il suffit donc de le montrer pour $l = 0$: $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\left| x^k\, (f * g)(x) \right| \leqslant \int \mathrm{d}y\, |x^k\, f(x - y)| \cdot |g(y)| \leqslant \int \mathrm{cste}\, (1 + |y|)^k \cdot \frac{\mathrm{cste}}{(1 + |y|)^{k+2}}\, \mathrm{d}y = \int \frac{\mathrm{cste} \cdot \mathrm{d}y}{(1 + |y|)^2} = \mathrm{cste}_{/x}$$

En effet, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, par la formule du binôme,

$$x^k = (x - y + y)^k = \textstyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (x - y)^i\, y^{k-i} \qquad \text{donc}$$

$$\begin{aligned} \left| x^k\, f(x - y) \right| &\leqslant \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \underbrace{\left|(x - y)^i\, f(x - y)\right|}_{\leqslant \|f\|_{\mathcal{S}|i,0}} |y|^{k-i} \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant k} \|f\|_{\mathcal{S}|i,0} \cdot \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} |y|^{k-i} \\ &= \mathrm{cste} \cdot (1 + |y|)^k \end{aligned}$$

4. Convolution des distributions