Critère de différentiabilité par arcs

On se place dans $(E, \|\cdot\|_E)$ un EVN de dimension finie, et dans $(F, \|\cdot\|_F)$ un EVN. Soit $U \subset E$ un voisinage ouvert non vide de 0_E.

Notons l'ensemble des arcs γ continus dérivables en 0 tels que $\gamma(0) = 0_E$

$$\Gamma := \left\{ \gamma \in \mathcal{C}^0([0,1], E) \,:\, \gamma \text{ dérivable en } 0 \text{ et } \gamma(0) = 0_E \right\}$$

Soient $g : U \setminus \{0\} \longrightarrow F$ et $\ell \in F$. Alors

$$\left(\forall \gamma \in \Gamma, \quad (g \circ \gamma)(t) \xrightarrow[t \to 0]{} \ell \right) \implies g(x) \xrightarrow[x \to 0]{} \ell$$

Démonstration. On utilise la caractérisation séquentielle de la limite.

Soit $r > 0$ tel que $B := \mathrm{B}^{\mathrm{f}}_E(0, r) \subset U$, voisinage de 0_E. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in B^{\mathbb{N}} \,:\, x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0_E$.

Le but est de construire un arc dérivable en 0 interpolant les x_n. Mais on ne peut le faire directement en général, il faut extraire une sous-suite approchant 0 par une direction définie, sans quoi l'arc ne serait pas dérivable. Et cette extraction pose le problème supplémentaire de montrer la convergence pour la suite $(g(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ entière. Ainsi, considérons

$$\limsup_{n \to \infty} \|g(x_n) - \ell\| = \lim_{n \to \infty} \|g(x_{\varphi(n)}) - \ell\| \quad \text{avec} \quad \varphi \text{ l'extraction associée}$$

Supposons que $\lim\limits_{n \to \infty} \|g(x_{\varphi(n)}) - \ell\| \neq 0$. Construisons l'arc après extraction :

La sphère $S := \mathrm{S}_E(0, r)$ est un compact (dimension finie).

Ainsi, $\|g(x_{\varphi \circ \psi(n)}) - \ell\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, ce qui rentre en contradiction avec le fait que toute sous-suite converge vers la limite de la suite $\lim\limits_{n \to \infty} \|g(x_{\varphi(n)}) - \ell\| \neq 0$.

On a la même chose pour la limite inférieure, d'où :

$$\limsup_{n \to \infty} \|g(x_n) - \ell\| = \liminf_{n \to \infty} \|g(x_n) - \ell\| = 0$$

Donc $\lim\limits_{n \to \infty} \|g(x_n) - \ell\| = 0$. C'est vrai pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in B^{\mathbb{N}}_{\mathsf{CV}(0)}$, donc $g(x) \xrightarrow[x \to 0]{} \ell$. □

Il s'ensuit que si $f \in \mathcal{C}^0(U, F)$, $f(0) = 0$ et qu'il existe $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que

$$\forall \gamma \in \Gamma, \quad f \circ \varphi \text{ dérivable en } 0 \text{ et } (f \circ \gamma)'(0) = \varphi\big(\gamma'(0)\big)$$

alors f différentiable en 0_E et $\mathrm{d}f(0_E) = \varphi$.

Démonstration. Soit une telle application linéaire φ. Posons

$$\begin{array}{rccc} \Delta : & U \setminus \{0\} & \longrightarrow & F \\ & h & \longmapsto & \dfrac{f(h) - \varphi(h)}{\|h\|_E} \end{array}$$

Soit $\gamma \in \Gamma$. L'hypothèse et la dérivabilité de γ en 0 donnent avec $t \in \mathbb{R}^*$ que

$$\begin{aligned} \frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(0))}{t} &= \frac{f(\gamma(t))}{t} \xrightarrow[t \to 0]{} \varphi(\gamma'(0)) \quad \text{et} \quad \gamma(t) \underset{t \to 0}{\sim} t\,\gamma'(0) \\ \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t} &= \frac{\gamma(t)}{t} \xrightarrow[t \to 0]{} \gamma'(0) \end{aligned}$$

Donc, avec $t \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} \big\|\Delta(\gamma(t))\big\|_F = \frac{\big\|f(\gamma(t)) - \varphi(\gamma(t))\big\|_F}{\|\gamma(t)\|_E} &\underset{t \to 0}{\sim} \|\gamma'(0)\|_E \frac{\big\|f(\gamma(t)) - \varphi(\gamma(t))\big\|_F}{t} \\ \text{(linéarité de } \varphi\text{)} \quad &= \|\gamma'(0)\|_E \left\| \frac{f(\gamma(t))}{t} - \varphi\!\left(\frac{\gamma(t)}{t} \right) \right\|_F \\ \text{(continuité de } \|\cdot\|_F \text{ et de } \varphi\text{)} \quad &\xrightarrow[t \to 0]{} \|\gamma'(0)\|_E \big\|\varphi(\gamma'(0)) - \varphi(\gamma'(0))\big\|_F = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall \gamma \in \Gamma$, $(\Delta \circ \gamma)(t) \xrightarrow[t \to 0]{} 0_F$, donc en utilisant le résulat précédent, $\Delta(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0_F$.

Donc $f(0 + h) - f(0) - \varphi(h) = \underset{h \to 0}{o}(\|h\|_E)$, donc f différentiable en 0 et $\mathrm{d}f(0) = \varphi$. □