Études qualitatives générales

1. EDO linéaire d'ordre 1 à coeff constant et second membre

Soit $k\in\mathbb{R}$ et $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad x'-k\,x=f$$

Elle vérifie les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz.

Solutions de (E) :

Solutions maximales de l'équation sans second membre $x'-k\,x=0$:

$$\mathcal{S}_{E\text{ssm}}=\left\{\begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ t & \longmapsto & c\,\mathrm{e}^{kt}\end{array} \;:\; c\in\mathbb{R}\right\}$$

Méthode de la variation de la constante :

Posons $x : t\longmapsto c(t)\,\mathrm{e}^{kt}$ avec $c\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned}x \text{ solution de } (E) &\iff \forall t\in\mathbb{R},\; x'(t) = k\,x(t)+f(t)\\ &\iff \forall t\in\mathbb{R},\; c'(t)\,\mathrm{e}^{kt}+\underline{c(t)\,k\,\mathrm{e}^{kt}} = \underline{k\,c(t)\,\mathrm{e}^{kt}}+f(t)\\ &\iff \forall t\in\mathbb{R},\; c'(t) = f(t)\,\mathrm{e}^{-kt}\\ &\iff c \text{ est une primitive de } g : t\mapsto f(t)\,\mathrm{e}^{-kt}\end{aligned}$$

Donc si G est une primitive de g sur $\mathbb{R}$, on a $\mathcal{S}_E=\mathcal{S}_{E\text{ssm}}+\left\{t\mapsto G(t)\,\mathrm{e}^{kt}\right\}$ car c'est un espace affine de solutions de (E) de dimension 1, et (E) est linéaire d'ordre 1, donc c'est $\mathcal{S}_E$ par le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Donc les solutions maximales de (E) sont

$$\mathcal{S}_E=\left\{\begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ t & \longmapsto & (c+G(t))\,\mathrm{e}^{kt}\end{array} \;:\; c\in\mathbb{R}\right\}$$

Proposition 1. *Supposons f **bornée** et $k>0$. Alors (E) admet une **unique solution bornée** sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. **Unicité** :

Soient $x_1,x_2\in\mathcal{S}_E$ des solutions maximales bornées. Alors

$$x_1'-k\,x_1=f \quad \text{et} \quad x_2'-k\,x_2=f \quad \text{donc} \quad (x_1-x_2)'-k\,(x_1-x_2)=f-f=0$$

donc $x_1-x_2\in\mathcal{S}_{E\text{ssm}}=\{t\mapsto c\,\mathrm{e}^{kt} : c\in\mathbb{R}\}$. De plus, x_1-x_2 est bornée, et l'unique solution bornée sur $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{S}_{E\text{ssm}}$ est $t\mapsto 0$ car $k\neq 0$. Donc $x_1-x_2\equiv 0$, donc $x_1=x_2$.

Existence : Posons

$$G_0 : t\longmapsto -\int_t^{+\infty} f(s)\,\mathrm{e}^{-ks}\,\mathrm{d}s \quad \text{primitive de } g \text{ sur } \mathbb{R}$$

bien définie car f bornée sur $\mathbb{R}$ et $t\mapsto\mathrm{e}^{-kt}$ intégrable en $+\infty$. Alors la solution sur $\mathbb{R}$

$$x : t\longmapsto G_0(t)\,\mathrm{e}^{kt}$$

est bornée : si on note $M := \sup_{\mathbb{R}} |f|$, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
|x(t)| &= \left| -\int_t^{+\infty} f(s)\,\mathrm{e}^{-ks}\,\mathrm{d}s \right| \mathrm{e}^{kt} \\
&\leqslant \mathrm{e}^{kt} \int_t^{+\infty} |f(s)|\,\mathrm{e}^{-ks}\,\mathrm{d}s \\
&\leqslant \mathrm{e}^{kt} M \int_t^{+\infty} \mathrm{e}^{-ks}\,\mathrm{d}s \;=\; \mathrm{e}^{kt} M \left[-\tfrac{1}{k}\,\mathrm{e}^{-ks} \right]_{s=t}^{+\infty} \;=\; -\frac{M}{k}\,\mathrm{e}^{kt}\,(0 - \mathrm{e}^{-kt}) = \frac{M}{k}
\end{aligned}$$

□

Proposition 2. *Supposons que* $\lim\limits_{+\infty} f = 0$ *et* $k < 0$. *Alors* $\forall x \in \mathcal{S}_E$ *solution de* (E), $\lim\limits_{+\infty} x = 0$.

Démonstration. Prenons comme primitive de g sur $\mathbb{R}$

$$G : t \longmapsto \int_0^t f(s)\,\mathrm{e}^{-ks}\,\mathrm{d}s$$

Soit $x \in \mathcal{S}_E$ une solution maximale. $\mathcal{S}_E = \mathcal{S}_{E\mathrm{ssm}} + \left\{ t \mapsto G(t)\,\mathrm{e}^{kt} \right\}$ donc

$$\exists c \in \mathbb{R} : \quad \forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = (c + G(t))\,\mathrm{e}^{kt} = c\,\mathrm{e}^{kt} + \mathrm{e}^{kt} \int_0^t f(s)\,\mathrm{e}^{-ks}\,\mathrm{d}s$$

le premier terme s'annulant en $+\infty$ car $k < 0$. Le point délicat est de montrer que

$$\mathrm{e}^{kt} \int_0^t f(s)\,\mathrm{e}^{-ks}\,\mathrm{d}s \quad \xrightarrow[t \to +\infty]{?} \quad 0$$

car e^{-ks} explose quand $s \to +\infty$ car $k < 0$. Ce comportement est contrebalancé par e^{kt} et le fait que $f(s) \xrightarrow[s \to +\infty]{} 0$. Pour montrer cette limite, on pourrait se donner $\varepsilon > 0$ et découper l'intégrale en une zone $s \geqslant t_\varepsilon$ où $|f(s)| \leqslant \varepsilon$, et l'autre zone où l'on peur contrôler e^{-ks}. Mais on peut faire plus direct :

$$\begin{aligned}
\forall t \geqslant 0, \quad \left| \mathrm{e}^{kt} \int_0^t f(s)\,\mathrm{e}^{-ks}\,\mathrm{d}s \right| &\leqslant \mathrm{e}^{kt} \int_0^t |f(s)|\,\mathrm{e}^{-ks}\,\mathrm{d}s \\
&= \mathrm{e}^{kt} \int_0^{t/2} |f(s)|\,\mathrm{e}^{-ks}\,\mathrm{d}s + \mathrm{e}^{kt} \int_{t/2}^t |f(s)|\,\mathrm{e}^{-ks}\,\mathrm{d}s \\
&\leqslant \mathrm{e}^{kt}\,\frac{\mathrm{e}^{-kt/2} - 1}{-k} \cdot \sup_{\mathbb{R}_+} |f| + \mathrm{e}^{kt}\,\frac{\mathrm{e}^{-kt} - \mathrm{e}^{-kt/2}}{-k} \cdot \sup_{[t/2, +\infty[} |f| \\
&= \underbrace{\frac{\mathrm{e}^{kt} - \mathrm{e}^{kt/2}}{k}}_{\xrightarrow[t \to +\infty]{} 0} \cdot \underbrace{\sup_{\mathbb{R}_+} |f|}_{< \infty} + \underbrace{\frac{\mathrm{e}^{kt/2} - 1}{k}}_{\leqslant \frac{-1}{k} \text{ borné}} \cdot \underbrace{\sup_{[t/2, +\infty[} |f|}_{\xrightarrow[t \to +\infty]{} 0} \quad \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0
\end{aligned}$$

En effet, f est continue et $\lim\limits_{+\infty} f = 0$ donc f bornée sur $\mathbb{R}_+$, et $\sup\limits_{[t, +\infty[} |f| \xrightarrow[t \to +\infty]{} \lim\limits_{+\infty} |f| = 0$.
Ainsi, toujours avec $k < 0$,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad x(t) = \underbrace{c\,\mathrm{e}^{kt}}_{\xrightarrow[t \to +\infty]{} 0} + \mathrm{e}^{kt} \int_0^t f(s)\,\mathrm{e}^{-ks}\,\mathrm{d}s \quad \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

□

2. EDOL1 à coeff non constant et second membre

Soit $q \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad x' - q\,x = f$$

Théorème de Cauchy-Lipschitz :

L'équation différentielle est de la forme $x' = \varphi(\cdot, x)$ avec

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (t, x) & \longmapsto & q(t)\, x + f(t) \end{array}$$

qui est continue : $\varphi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ car $f, q \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. De plus, elle est localement lipschitienne par rapport à la seconde variable : soient $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, alors on peut prendre n'importe quel cylindre fermé $\bar{C} = \bar{I} \times \bar{B} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ centré en (t_0, x_0) sur lequel φ est lipschitzienne par rapport à t :

$$\begin{aligned} \forall (t, x_1), (t, x_2) \in \bar{C}, \quad |\varphi(t, x_1) - \varphi(t, x_2)| &= \big| q(t)\, x_1 + f(t) - q(t)\, x_2 - f(t) \big| \\ &= |q(t)|\, |x_1 - x_2| \\ &\leqslant K |x_1 - x_2| \qquad \text{avec} \qquad K := \sup_{t \in \bar{I}} |q(t)| \end{aligned}$$

q étant bonée sur $\bar{I}$ car continue et $\bar{I}$ compact.

Solutions de (E) :

Solutions maximales de l'équation sans second membre $x' - q\, x = 0$:

$$\mathcal{S}_{E\mathrm{ssm}} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & c\, \mathrm{e}^{-Q(t)} \end{array} \ : \ c \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{avec} \quad Q \text{ primitive de } q \text{ sur } \mathbb{R}$$

Par la méthode de la la variation de la constante, on montre alors que si

$$G \text{ primitive de } t \mapsto f(t)\, \mathrm{e}^{-Q(t)}$$

alors puisque (E) vérifie les hypothèses de Cauchy-Lipschitz, les solutions maximales de (E) sont

$$\mathcal{S}_E = \mathcal{S}_{E\mathrm{ssm}} + \left\{ t \mapsto G(t)\, \mathrm{e}^{-Q(t)} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (c + G(t))\, \mathrm{e}^{-Q(t)} \end{array} \ : \ c \in \mathbb{R} \right\}$$