Fonction propre surjective

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un EVN de dimension finie et $(F, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien muni de sa norme $\|\cdot\|_2$.

Soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction **propre** :

$$\|f(x)\|_2 \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} +\infty$$

On suppose de plus que f est **différentiable** et telle que $\forall x \in E,\ \mathrm{d}f(x)$ est **surjective**. Lorsque f est de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, cette condition équivaut au fait que sa dérivée ne s'annule jamais. Lorsque f est de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, il suffit de montrer l'injectivité de la différentielle, car $\forall x \in E,\ \mathrm{d}f(x)$ injective $\Leftrightarrow$ surjective $\Leftrightarrow$ bijective.

Montrons alors que ***f* est surjective**. Soit $y_0 \in F$, cherchons un antécédent de y_0. Pour cela, posons

$$\begin{array}{rccl} \phi_{y_0} : E & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ x & \longmapsto & \|f(x) - y_0\|_2^2 & \geqslant 0 \end{array}$$

On a $\phi_{y_0} = \|\cdot\|_2^2 \circ g_{y_0} \circ f$ avec $\|\cdot\|_2^2$ différentiable, $g_{y_0} : x \mapsto x - y_0$ différentiable et f différentiable. Donc ϕ_{y_0} est différentiable (donc continue) de différentielle : $\forall x \in E$,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\phi_{y_0}(x) &= \mathrm{d}\|\cdot\|_2^2\big(f(x) - y_0\big) \circ \mathrm{d}g_{y_0}\big(f(x)\big) \circ \mathrm{d}f(x) \\ &= 2\,\langle f(x) - y_0 | \cdot \rangle \circ \mathrm{id} \circ \mathrm{d}f(x) \\ &= h \mapsto 2\,\big\langle f(x) - y_0 | \mathrm{d}f(x)(h) \big\rangle \end{aligned}$$

Montrons que ϕ_{y_0} admet un minimum global (on ne sait pas que c'est 0 a priori) par l'argument classique de compacité. En effet, c'est encore une fonction propre :

$$|\phi_{y_0}(x)| = \|f(x) - y_0\|_2^2 \geqslant \big|\|f(x)\|_2 - \|y_0\|_2\big|^2 \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} +\infty$$

Donc $\forall r > 0,\ \exists \delta_r > 0 : \forall x \in E,\ \big(\|x\| > \delta_r \Rightarrow |\phi_{y_0}(x)| > r\big)$.

Soit $m := \inf_E \phi_{y_0} \geqslant 0$. Alors pour $r = m + 1$, on a $\forall x \in {}^{\complement}\mathrm{B}^{\mathsf{f}}(0, \delta_m),\ \phi_{y_0}(x) > m + 1$.

$B := \mathrm{B}^{\mathsf{f}}(0, \delta_m)$ étant une partie fermée et bornée de l'EVN de dimension finie E, c'est une partie **compacte**, donc ϕ_{y_0}, qui est continue, y est bornée et atteint son minimum :

$$\exists x_0 \in E \ : \ \phi_{y_0}(x_0) = \min_B \phi_{y_0}$$

Alors ϕ_{y_0} atteint son minimum global en x_0 :

$$m = \inf_E \phi_{y_0} = \min\Big(\underbrace{\inf_{{}^{\complement}B} \phi_{y_0}}_{\geqslant m+1}, \inf_B \phi_{y_0}\Big) = \inf_B \phi_{y_0} = \phi_{y_0}(x_0)$$

Ainsi, puisque ϕ_{y_0} est différentiable, x_0 est un **point critique**, donc $\mathrm{d}\phi_{y_0}(x_0) = 0$, donc

$$\{0\} = \mathrm{d}\phi_{y_0}(x_0)(E) = 2\,\big\langle f(x_0) - y_0 | \mathrm{d}f(x_0)(E) \big\rangle = 2\,\big\langle f(x_0) - y_0 | F \big\rangle$$

car $\mathrm{d}f(x_0)$ est **surjective** : son image est F tout entier. Donc $\forall y \in F,\ \langle f(x_0) - y_0 \,|\, y \rangle = 0$, donc

$$f(x_0) - y_0 = 0$$

par orthogonalité à tout F. On a donc trouvé un antécédant à y_0 :

$$\boxed{x_0 := \underset{x \in E}{\arg\min} \big\| f(x) - y_0 \big\|_2^2 \quad \text{existe} \qquad \text{et} \qquad y_0 = f(x_0)}$$