Théorème d'Euler

Fonctions α-homogènes

On se place dans $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ des $\mathbb{K}$-EVNs pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Théorème d'Euler

Soit $U \in \mathcal{O}(E)$ un $\mathbb{R}_+^*$-cône ouvert (c'est à dire que $\forall t > 0$, $\forall \vec{x} \in U$, $t\,\vec{x} \in U$) et un exposant $\alpha \in \mathbb{K}$.

Soit $f : U \longrightarrow F$ différentiable sur U. Alors

$$\boxed{\begin{array}{c} f \text{ positivement } \textbf{homogène} \text{ de degré } \alpha : \\ \forall \vec{x} \in U,\ \forall t > 0,\ \ f(t\,\vec{x}) = t^\alpha f(\vec{x}) \end{array} \iff \begin{array}{c} f \text{ vérifie la } \textbf{condition d'Euler} \text{ pour } \alpha : \\ \forall \vec{x} \in U,\ \ \mathrm{d}f(\vec{x})(\vec{x}) = \alpha\, f(\vec{x}) \end{array}}$$

Si $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ euclidien et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ réelle différentiable, puisque $\forall \vec{x} \in U$, $\langle \vec{\nabla} f(\vec{x}) | \cdot \rangle := \mathrm{d}f(\vec{x})$,

$$\boxed{f \text{ positivement } \textbf{homogène} \text{ de degré } \alpha \quad \iff \quad \forall \vec{x} \in U,\ \ \alpha\, f(\vec{x}) = \big\langle \vec{x} \,|\, \vec{\nabla} f(\vec{x}) \big\rangle = \sum_{i=1}^n x_i\, \partial_i f(\vec{x})}$$

dans une base orthonormée $(\vec{e_i})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de E.

Démonstration. Soit $\vec{x} \in U$.

$$\begin{array}{rcl} f \text{ positivement } \alpha\text{-homogène en } \vec{x} & \iff & \forall t > 0,\ \ t^{-\alpha} f(t\,\vec{x}) = f(\vec{x}) \\ & \iff & \phi_{\vec{x}} : t \longmapsto t^{-\alpha} f(t\,\vec{x}) \text{ est constante à } f(\vec{x}) \\ (\Leftarrow \checkmark \text{ car on a toujours } \phi_{\vec{x}}(1) = f(\vec{x})) & \iff & \partial\phi_{\vec{x}} = 0 \\ (*) & \iff & \forall t > 0,\ \ \alpha\, t^{-\alpha-1} f(t\,\vec{x}) = t^{-\alpha}\, \mathrm{d}f(t\,\vec{x})(\vec{x}) \\ & \iff & \forall t > 0,\ \ \alpha\, f(t\,\vec{x}) = \underbrace{t\, \mathrm{d}f(t\,\vec{x})(\vec{x})} \\ (\text{linéarité de différentielle}) & & \qquad\qquad\qquad\quad = \mathrm{d}f(t\,\vec{x})(t\,\vec{x}) \\ & \iff & \forall \vec{y} \in C_{\vec{x}},\ \ \mathrm{d}f(\vec{y})(\vec{y}) = \alpha\, f(\vec{y}) \\ & \iff & f \text{ vérifie la condition d'Euler sur } C_{\vec{x}} := \{\, t\,\vec{x} \ :\ t > 0 \,\} \end{array}$$

Puisque U est un $\mathbb{R}_+^*$-cône, $U = \bigcup_{\vec{x} \in U} C_{\vec{x}}$ donc

$$\begin{array}{rcl} f \text{ vérifie la condition d'Euler sur } U & \iff & \forall \vec{x} \in U,\ \ f \text{ vérifie la condition d'Euler sur } C_{\vec{x}} \\ & \iff & \forall \vec{x} \in U,\ \ f \text{ est positivement } \alpha\text{-homogène en } \vec{x} \end{array}$$

$(*)$ Calcul de la dérivée à $\vec{x} \in U$ fixé de $\phi_{\vec{x}} : t \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto t^{-\alpha} f(t\,\vec{x})$:

$\phi_{\vec{x}}$ est dérivable par produit de $t \mapsto t^{-\alpha}$ avec la fonction dérivable $\psi_{\vec{x}} : t \mapsto f(t\,\vec{x})$:

$$\begin{array}{rcl} 0 \ = \ \partial\phi_{\vec{x}}(t) & = & -\alpha\, t^{-\alpha-1} f(t\,\vec{x}) + t^{-\alpha}\, \partial\psi_{\vec{x}}(t) \\ & = & -\alpha\, t^{-\alpha-1} f(t\,\vec{x}) + t^{-\alpha}\, \mathrm{d}f(t\,\vec{x})(\vec{x}) \end{array}$$

En effet, $\psi_{\vec{x}}$ est différentiable par différentiabilité de f sur U :

$$\begin{array}{rcl} \psi_{\vec{x}} & = & f \circ \tau_{\vec{x}} \quad \text{avec} \quad \tau_{\vec{x}} : t \longmapsto t\,\vec{x} \\ \text{donc} \quad \mathrm{d}\psi_{\vec{x}}(t) & = & \mathrm{d}f(\tau_{\vec{x}}(t)) \circ \mathrm{d}\tau_{\vec{x}}(t) \\ & = & \mathrm{d}f(t\,\vec{x}) \circ (\partial\tau_{\vec{x}}(t)\, \mathrm{id}) \\ & = & \mathrm{d}f(t\,\vec{x}) \circ (\vec{x}\, \mathrm{id}) \\ \text{donc} \quad \partial\psi_{\vec{x}}(t) = \mathrm{d}\psi_{\vec{x}}(t)(1) & = & \mathrm{d}f(t\,\vec{x})(\vec{x}) \end{array}$$

□

2. Applications

2.1. Fonctions $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ homogènes de degré 0

On se place dans $E = \mathbb{R}^2$ et dans le demi-plan $U = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\big\}$ qui est bien un $\mathbb{R}_+^*$-cône.

Déterminons les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ positivement homogènes de degré 0, c'est à dire les fonctions constantes sur les rayons provenant de l'origine :

$$\boxed{\mathscr{H}_0 := \big\{ f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}) \ :\ \forall \vec{u} \in U,\ \forall t > 0,\ \ f(t\,\vec{u}) = f(\vec{u}) \big\}}$$

Soit $f \in \mathscr{H}_0$ homogène de degré 0, différentiable car de classe $\mathcal{C}^1$. Par le théorème d'Euler,

$$\forall (x, y) \in U, \quad \boxed{x\, \partial_x f(x, y) + y\, \partial_y f(x, y) = 0} = 0\, f(x, y)$$

c'est à dire, avec le changement de variable polaire $\phi : (r, \theta) \mapsto (x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta)$ sur $\tilde{U} =]0, +\infty[\times]-\pi/2, +\pi/2[$ tel que $U = \phi(\tilde{U})$, $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme, et avec $\tilde{f} = f \circ \phi$ de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\forall (r, \theta) \in \tilde{U}, \quad r\, \partial_r \tilde{f}(r, \theta) = 0 \quad ; \quad \iff \quad \boxed{\partial_r \tilde{f}(r, \theta) = 0}$$

$\left(« \ r\,\frac{\partial}{\partial r} = r\,\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + r\,\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial y} = r\cos\theta\,\frac{\partial}{\partial x} + r\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial y} = x\,\frac{\partial}{\partial x} + y\,\frac{\partial}{\partial y} \ »\right)$. Donc en intégrant $/r$, il existe

$$h :]-\pi/2, +\pi/2[\longrightarrow \mathbb{R} \text{ différentiable} \quad : \quad \forall (r, \theta) \in \tilde{U}, \quad \boxed{\tilde{f}(r, \theta) = h(\theta)}$$

Et puisque $\tilde{f}$ est $\mathcal{C}^1$, $\partial h = \partial_\theta \tilde{f}(1, \cdot)$ est continue, donc h est $\mathcal{C}^1$. Ainsi, $\forall (x, y) \in U$,

$$f(x, y) = \tilde{f} \circ \phi^{\leftarrow}(x, y) = h\Big(\arctan\Big(\frac{y}{x}\Big)\Big)$$

$\left(« \ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \ »\right)$. Puisque $h = h \circ \arctan \circ \tan$ et $\tan \in \mathcal{C}^1\big(]-\pi/2, +\pi/2[, \mathbb{R}\big)$, on a de façon équivalente que $\exists g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f = (x, y) \in U \longmapsto g\big(\frac{y}{x}\big)$.

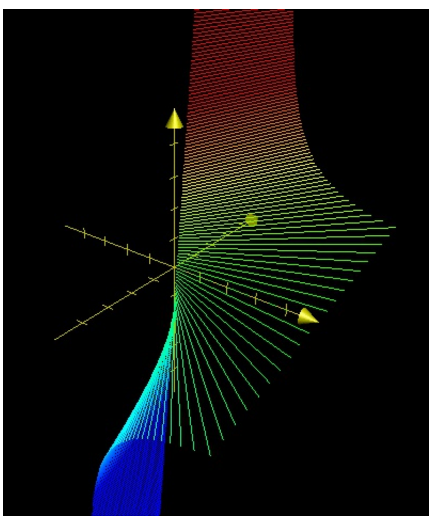
Réciproquement, on vérifie que $\forall g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, en posant $f : (x, y) \in U \longmapsto g\big(\frac{y}{x}\big)$, on a

$$x\, \partial_x f(x, y) + y\, \partial_y f(x, y) = x\,\tfrac{-y}{x^2}\, \partial g\big(\tfrac{y}{x}\big) + y\,\tfrac{1}{x}\, \partial g\big(\tfrac{y}{x}\big) = (1 - 1)\,\tfrac{y}{x}\, \partial g\big(\tfrac{y}{x}\big) = 0 = 0\, f(x, y)$$

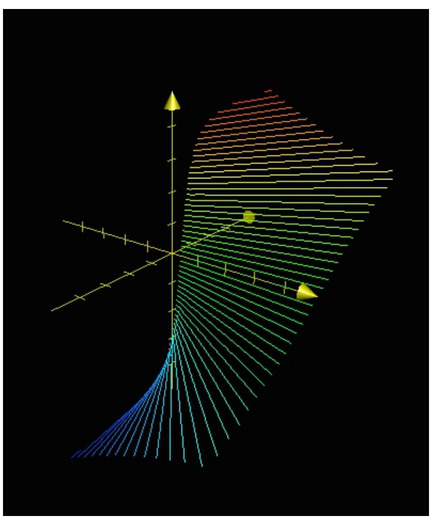
et f différentiable de classe $\mathcal{C}^1$ sur U par composition. Donc d'après le théorème d'Euler, $f \in \mathscr{H}_0$.

Ainsi,

$$\boxed{\mathscr{H}_0 = \Big\{ (x, y) \mapsto g\Big(\frac{y}{x}\Big) \ :\ g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \Big\}}$$



Exemple. $(x, y) \longmapsto \frac{y}{x}$ (niveaux)



Exemple. $(x, y) \longmapsto \arctan\big(\frac{y}{x}\big)$ (niveaux)