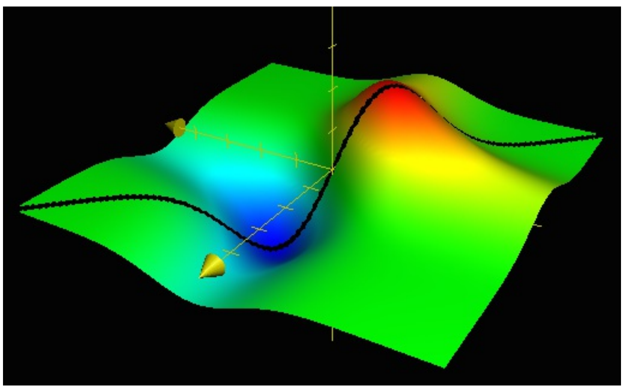
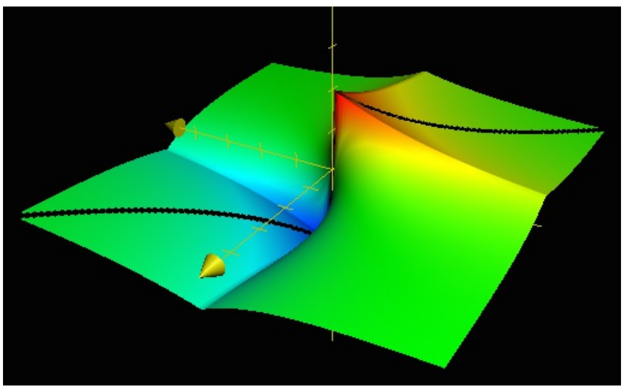
Étude de la fonction-accroissement dans $\mathbb{R}^2$

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Notons $\Delta = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$ et posons la fonction

$$\begin{array}{rcll} F : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{sur } \mathbb{R}^2\backslash\Delta \\ (x,x) & \longmapsto & \partial f(x) & \text{sur } \Delta \end{array}$$



Plot de F pour $f : x \mapsto e^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}^2\backslash\Delta$



Plot de F pour $f : x \mapsto e^{-|x|}$ sur $\mathbb{R}^2\backslash\Delta$

On veut montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa différentielle.

- $(x,y) \mapsto \frac{1}{x-y}$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2\backslash\Delta$, et $(x,y) \mapsto f(x)$ et $(x,y) \mapsto f(y)$ aussi. Donc par somme et produit de fonctions $\mathcal{C}^2$, $\boxed{F \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur l'ouvert } \mathbb{R}^2\backslash\Delta}$.

- Sa différentielle est donc définie, et on calcule que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\Delta$,

$$\text{Jac}\, f(x,y) \;=\; [\; \partial_x f(x,y) \;\; \partial_y f(x,y) \;] \;=\; \left[\; \frac{\partial f(x)}{x-y} - \frac{f(x)-f(y)}{(x-y)^2} \quad -\frac{\partial f(y)}{x-y} + \frac{f(x)-f(y)}{(x-y)^2} \;\right]$$

- Montrons que $\boxed{F \text{ est continue en tout point de } \Delta}$ en effectuant un développement limité de f avec le théorème de Rolle :

$$\forall x,y \in \mathbb{R}, \quad \exists c_{x,y} \in [x,y] \quad : \quad f(y) = f(x) + (y-x)\,\partial f(c_{x,y})$$

  Ainsi, $\forall (a,a) \in \Delta$, F est continue en (a,a) car $\forall x,y \in \mathbb{R}^2\backslash\Delta$,

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \\ &= \frac{f(\cancel{x}) - f(\cancel{x}) + (x-y)\,\partial f(c_{x,y})}{x-y} \\ &= \partial f(c_{x,y}) \xrightarrow[(x,y)\to(a,a)]{} \partial f(a) \;=\; F(a,a) \end{aligned}$$

  puisque $[x,y] \ni c_{x,y} \xrightarrow[(x,y)\to(a,a)]{} a$ et puisque ∂f est continue en a car $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

- F étant continue sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2\backslash\Delta$, il suffit de montrer que sa différentielle se prolonge par continuité en tout point de Δ. On va pour cela passer par les dérivées partielles.

  Effectuons un DL1 de f quand $x \to y$ et $y \to x$ avec la formule de Taylor-Lagrange-Rolle:

$$\forall x,y \in \mathbb{R}, \quad \exists c'_{x,y} \in [x,y] \quad : \quad \begin{aligned} f(y) &= f(x) + (y-x)\,\partial f(x) + \frac{(y-x)^2}{2}\,\partial^2 f(c'_{x,y}) \\ f(x) &= f(y) + (x-y)\,\partial f(y) + \frac{(x-y)^2}{2}\,\partial^2 f(c'_{y,x}) \end{aligned}$$

  Ainsi, $\forall (a,a) \in \Delta$, $\partial_x F$ et $\partial_y F$ sont continues en (a,a) car $\forall x,y \in \mathbb{R}^2\backslash\Delta$,

$$\begin{aligned} \partial_x F(x,y) &= \frac{\partial f(x)}{x-y} - \frac{f(x)-f(y)}{(x-y)^2} \\ &= \frac{\partial f(x)}{x-y} - \frac{f(\cancel{x}) - \left(f(\cancel{x}) + (y-x)\,\partial f(x) + \frac{(y-x)^2}{2}\,\partial^2 f(c'_{x,y})\right)}{(x-y)^2} \\ &= \frac{\partial f(\cancel{x})}{\cancel{x}-y} - \frac{(x-\cancel{y})\cancel{\partial} f(x)}{(x\cancel{-}y)^2} + \frac{1}{2}\,\partial^2 f(c'_{y,x}) \\ &= +\frac{1}{2}\,\partial^2 f(c'_{y,x}) \xrightarrow[(x,y)\to(a,a)]{} +\frac{1}{2}\,\partial^2 f(a) \end{aligned}$$

$$\text{de même} \qquad \partial_y F(x,y) = +\frac{1}{2}\,\partial^2 f(c'_{y,x}) \xrightarrow[(x,y)\to(a,a)]{} +\frac{1}{2}\,\partial^2 f(a)$$

  puisque $[x,y] \ni c'_{x,y} \xrightarrow[(x,y)\to(a,a)]{} a$ et puisque $\partial^2 f$ est continue en a car $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

  Ainsi, puisque $\partial_x F$ et $\partial_y F$ sont continues sur tout $\mathbb{R}^2$, $\boxed{F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)}$ et $\forall (a,a) \in \Delta$,

$$\text{Jac}\, f(a,a) \;=\; \left[\; \frac{1}{2}\,\partial^2 f(a) \;\; \frac{1}{2}\,\partial^2 f(a) \;\right]$$