Soient $p, q \in [1, +\infty[$ conjugués : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On note $\ell^p := \ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ et $\ell^q := \ell^q(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.

1. Inégalité de Hölder et Minkowski dans les espaces ℓ^p.

Remarque : c'est tout à fait similaire à ce que l'on a pour l'espace des fonctions intégrables L^p.

1.1. Inégalité de Young.

Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$. Montrons que $a\,b \leqslant p^{-1}\,a^p + q^{-1}\,b^q$. En effet, puisque $\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est concave, puisque $p^{-1} + q^{-1} = 1$,

$$\ln\big(p^{-1}\,a^p + q^{-1}\,b^q\big) \overset{\text{concave}}{\geqslant} p^{-1}\ln(a^p) + q^{-1}\ln(b^q) \;=\; \ln(a) + \ln(b) \;=\; \ln(a\,b)$$

En composant par l'exponentielle, croissante, on a bien l'inégalité de Young :

$$\boxed{a\,b \;\leqslant\; \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}}$$

Note : Ce n'est rien d'autre que l'inégalité arithmético-géométrique pondérée $\prod_{i=1}^n x_i^{\lambda_i} \leqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i\,x_i$.

1.2. Inégalité de Hölder.

Soient $\boldsymbol{u} \in \ell^p$ et $\boldsymbol{v} \in \ell^q$. Posons les suites unitaires $\tilde{\boldsymbol{u}} = (\tilde{u}_n)_{n\in\mathbb{N}} := \dfrac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|_p}$ et $\tilde{\boldsymbol{v}} = (\tilde{v}_n)_{n\in\mathbb{N}} := \dfrac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|_q}$.
Alors $\forall N \in \mathbb{N}$, par l'inégalité de Young pour les $|\tilde{u}_n|, |\tilde{v}_n| \in \mathbb{R}_+$,

$$\sum_{n=0}^{N} |\tilde{u}_n\,\tilde{v}_n| \overset{\text{Young}}{\leqslant} \sum_{n=0}^{N}\left(\frac{|\tilde{u}_n|^p}{p} + \frac{|\tilde{v}_n|^q}{q}\right) \;=\; \frac{1}{p}\sum_{n=0}^{N}|\tilde{u}_n| + \frac{1}{q}\sum_{n=0}^{N}|\tilde{v}_n| \;\xrightarrow[N\to\infty]{}\; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

En effet, puisque $\tilde{\boldsymbol{u}} \in \ell^p$, $\sum_{n=0}^{N}|\tilde{u}_n| \xrightarrow[N\to\infty]{} \|\tilde{\boldsymbol{u}}\|_p = \frac{\|\boldsymbol{u}\|_p}{\|\boldsymbol{u}\|_p} = 1$, et de même pour $\tilde{\boldsymbol{v}}$. Ainsi,

$$\frac{\|\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}\|_1}{\|\boldsymbol{u}\|_p\,\|\boldsymbol{v}\|_q} \;=\; \left\|\frac{\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|_p\,\|\boldsymbol{v}\|_q}\right\|_1 \;=\; \big\|\tilde{\boldsymbol{u}}\,\tilde{\boldsymbol{v}}\big\|_1 \;=\; \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}|\tilde{u}_n\,\tilde{v}_n| \;\leqslant\; 1$$

On a donc l'inégalité de Hölder :

$$\boxed{\|\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}\|_1 \leqslant \|\boldsymbol{u}\|_p\,\|\boldsymbol{v}\|_q < +\infty} \quad \text{avec} \quad \boxed{\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v} \in \ell^1} \tag{1}$$

1.3. Inégalité de Minkowski dans ℓ^p.

Soient $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \ell^p$. On se demande si $\boldsymbol{u} := \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \overset{?}{\in} \ell^p$, c'est à dire si $\|\boldsymbol{u}\|_p \overset{?}{<} \infty$. On veut pour ça montrer l'inégalité de Minkowski, en utilisant l'inégalité de Hölder.

Soit $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Montrons tout d'abord que, si l'on note la sphère unité $S_q := \mathrm{S}_{\|\cdot\|_q}(\mathbf{0}, 1)$ de ℓ^q, on a

$$\sup_{\boldsymbol{w}\in S_q} \|\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{w}\|_1 = \|\boldsymbol{u}\|_p$$

Soit $N \in \mathbb{N}$. Considérons $\boldsymbol{u}_N := \left(u_n \mathbb{1}_{n \leqslant N}\right)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p$ (car support fini) la suite tronquée au rang N. Alors, par l'inégalité de Hölder,

$$\forall \boldsymbol{w} \in S_q,\ \forall N \in \mathbb{N}, \quad \|\boldsymbol{u}_N \boldsymbol{w}\|_1 \overset{(1)}{\leqslant} \|\boldsymbol{u}_N\|_p \|\boldsymbol{w}\|_q = \|\boldsymbol{u}_N\|_p$$

donc par passage à la limite,

$$\boxed{\forall \boldsymbol{w} \in S_q, \quad \|\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{w}\|_1 = \lim_{N \to \infty} \|\boldsymbol{u}_N \boldsymbol{w}\|_1 \leqslant \lim_{N \to \infty} \|\boldsymbol{u}_N\|_p = \|\boldsymbol{u}\|_p}$$

Montrons maintenant que cette borne peut être atteinte par une suite $(\boldsymbol{w}_N)_{N \in \mathbb{N}} \in S_q^{\mathbb{N}}$, c'est à dire que $\|\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{w}_N\|_1 \xrightarrow[N \to \infty]{} \|\boldsymbol{u}\|_p$. L'idée est de tronquer $(u_n^{p-1})_{n \in \mathbb{N}}$ pour que $\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{w}_N$ soit sommable, de normaliser, et surtout de remarquer que, puisque ${}^1\!/_p + {}^1\!/_q = 1$, on a $(p-1)\,q = p$.

Posons alors $\forall N \in \mathbb{N}$,

$$\boldsymbol{w}_N := \tfrac{1}{\alpha_N}\left(u_n^{p-1} \mathbb{1}_{n \leqslant N}\right)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^q \quad \text{(support fini)}$$

avec les $\alpha_N \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\boldsymbol{w}_N \in S_q$:

$$\left\|\boldsymbol{w}_N\right\|_q^q = \sum_{n=0}^{\infty} \left|\tfrac{1}{\alpha_N} u_n^{p-1} \mathbb{1}_{n \leqslant N}\right|^q = \frac{1}{\alpha_N^q} \sum_{n=0}^{N} |u_n|^{\overbrace{(p-1)q}^{=p}} = \frac{1}{\alpha_N^q} \sum_{n=0}^{N} |u_n|^p =: 1$$

on doit donc prendre

$$\alpha_N = \left(\sum_{n=0}^{N} |u_n|^p\right)^{1/q}$$

Enfin, puisque $1 - {}^1\!/_q = {}^1\!/_p$,

$$\left\|\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{w}_N\right\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{\alpha_N}\left|u_n\, u_n^{p-1} \mathbb{1}_{n \leqslant N}\right| = \frac{1}{\alpha_N} \sum_{n=0}^{N} |u_n|^p = \left(\sum_{n=0}^{N} |u_n|^p\right)^{1 - 1/q} \xrightarrow[N \to \infty]{} \|\boldsymbol{u}\|_p$$

Donc on a bien construit

$$\boxed{\left(\boldsymbol{w}_N\right)_{N \in \mathbb{N}} \in S_q^{\mathbb{N}} \quad \text{telle que} \quad \left\|\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{w}_N\right\|_1 \xrightarrow[N \to \infty]{} \left\|\boldsymbol{u}\right\|_p} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\|\boldsymbol{u}\|_p = \sup_{\boldsymbol{w} \in S_q} \|\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{w}\|_1} \tag{2}$$

On peut enfin montrer linégalité de Minkowski pour $\|\cdot\|_p$. Soient $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \ell^p$.

Avec l'inégalité de Minkowski pour $\|\cdot\|_1$, on a $\forall \boldsymbol{w} \in S_q$ la majoration :

$$\left\|(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\,\boldsymbol{w}\right\|_1 = \|\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{w} + \boldsymbol{y}\,\boldsymbol{w}\|_1 \leqslant \|\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{w}\|_1 + \|\boldsymbol{y}\,\boldsymbol{w}\|_1 = \sup_{\boldsymbol{w}' \in S_q} \|\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{w}'\|_1 + \sup_{\boldsymbol{w}' \in S_q} \|\boldsymbol{y}\,\boldsymbol{w}'\|_1 \tag{3}$$

Donc avec le résulat précédent pour $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$,

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p \overset{(2)}{=} \sup_{\boldsymbol{w} \in S_q} \left\|(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\,\boldsymbol{w}\right\|_1 \overset{(3)}{\leqslant} \sup_{\boldsymbol{w} \in S_q} \|\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{w}\|_1 + \sup_{\boldsymbol{w} \in S_q} \|\boldsymbol{y}\,\boldsymbol{w}\|_1 \overset{(2)}{=} \underbrace{\|\boldsymbol{x}\|_p}_{<\infty} + \underbrace{\|\boldsymbol{y}\|_p}_{<\infty} < +\infty$$

car $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \ell^p$. On a enfin l'inégalité de Minkowski dans ℓ^p :

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \ell^p, \qquad \boxed{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \ell^p} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p \leqslant \|\boldsymbol{u}\|_p + \|\boldsymbol{y}\|_p}$$

Ainsi, $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Si l'on veut juste montrer pour $\boldsymbol{u}\in\ell^p$

Par l'inégalité de Hölder, $\forall \boldsymbol{w}\in S_q$, $\|\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{w}\|_1 \leqslant \|\boldsymbol{u}\|_p\,\|\boldsymbol{w}\|_q = \|\boldsymbol{u}\|_p$.

Montrons maintenant que cette borne est atteinte par un élément $\boldsymbol{w}\in S_q$. L'idée est de poser

$$\boldsymbol{w} \;:=\; \tfrac{1}{\alpha}\,(u_n^{p-1})_{n\in\mathbb{N}}$$

avec $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$ que l'on déterminera. On aura alors

$$\|\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{w}\|_1 \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{\alpha}\left|u_n\,u_n^{p-1}\right| \;=\; \frac{1}{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}|u_n|^p \;=\; \frac{\|\boldsymbol{u}\|_p^p}{\alpha} \;\overset{?}{=}\; \|\boldsymbol{u}\|_p$$

Il faut normaliser pour que $\boldsymbol{w}\in S_q$, en remarquant que puisque $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, on a $(p-1)\,q=p$:

$$\|\boldsymbol{w}\|_q^q \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\left|\tfrac{1}{\alpha}\,u_n^{p-1}\right|^q \;=\; \frac{1}{\alpha^q}\sum_{n=0}^{\infty}|u_n|^{\overbrace{(p-1)\,q}^{=\,p}} \;=\; \frac{\|\boldsymbol{u}\|_p^p}{\alpha^q} \;=:1$$

Il faut donc prendre

$$\alpha \;=\; \|\boldsymbol{u}\|_p^{p/q} \qquad \text{et alors} \qquad \|\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{w}\|_1 \;=\; \frac{\|\boldsymbol{u}\|_p^p}{\|\boldsymbol{u}\|_p^{p/q}} \;=\; \|\boldsymbol{u}\|_p^{p-\frac{p}{q}} \;=\; \|\boldsymbol{u}\|_p$$

car $p-\frac{p}{q}=p\left(1-\frac{1}{q}\right)=\frac{p}{p}=1$. Donc on a bien construit

$$\boxed{\boldsymbol{w}\in S_q \quad \text{tel que} \quad \|\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{w}\|_1=\|\boldsymbol{u}\|_p} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\|\boldsymbol{u}\|_p=\sup_{\boldsymbol{w}\in S_q}\|\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{w}\|_1}$$

2. Identification des formes linéaires continues sur ℓ^p.

Soit $\boldsymbol{v}=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^q$. Notons la forme

$$\begin{aligned} T_{\boldsymbol{v}} \,:\; \ell^p &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} &\longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n\,v_n \end{aligned}$$

$T_{\boldsymbol{v}}$ est linéaire par linéarité de la somme et de la limite.

$\forall\boldsymbol{u}=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^p$, puisque $\boldsymbol{v}\in\ell^q$, par l'inégalité de Hölder,

$$\sum_{n=0}^{\infty}|u_n\,v_n| \;=\; \|\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}\|_1 \;\overset{(1)}{\leqslant}\; \underbrace{\|\boldsymbol{u}\|_p}_{<\infty}\underbrace{\|\boldsymbol{v}\|_q}_{<\infty} \;<\infty$$

Donc la série $\sum (u_n\,v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est absolument convergente, donc convergente. Donc

$$\boxed{T_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{u})=\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}u_n\,v_n \quad \text{est bien défini}}$$

2.1. Continuité de T_v.

Montrons que c'est une forme linéaire continue et déterminons sa norme subordonnée à $\|\cdot\|_p$.

Il suffit en fait de réutiliser le résultat (2) en intervertissant $p\leftrightarrow q$ (car $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ symétrique) :

$$\sup_{\boldsymbol{u}\in S_p}\|\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}\|_1 \;=\; \|\boldsymbol{v}\|_q$$

Il ne reste plus qu'à montrer que l'on peut remplacer $\|\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}\|_1$ par $|T_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{u})|$. On a évidemment

$$\forall\boldsymbol{u}\in S_p,\quad \left|T_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{u})\right| \;=\; \left|\sum_{n=0}^{\infty}u_n\,v_n\right| \;\leqslant\; \sum_{n=0}^{\infty}|u_n\,v_n| \;=\; \|\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}\|_1 \quad \text{donc} \quad \sup_{\boldsymbol{u}\in S_p}\left|T_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{u})\right| \;\leqslant\; \sup_{\boldsymbol{u}\in S_p}\|\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}\|_1$$

Réciproquement, montrons que $\left|T_{\boldsymbol{v}}(\cdot)\right|$ peut atteindre $\sup_{\boldsymbol{u}\in S_p}\|\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}\|_1$. Par caractérisation séquentielle de la borne sup, soit $\big(\boldsymbol{u}_k=:(u_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}\big)_{k\in\mathbb{N}}\in S_p^{\mathbb{N}}$ telle que $\|\boldsymbol{u}_k\,\boldsymbol{v}\|_1\xrightarrow[k\to\infty]{}\sup_{\boldsymbol{u}\in S_p}\|\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}\|_1$.

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \|\boldsymbol{u}_k\,\boldsymbol{v}\|_1=\sum_{n=0}^{\infty}|u_{k,n}\,v_n|=\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\frac{|u_{k,n}\,v_n|}{v_n}}_{=:\,u'_{k,n}}v_n=\sum_{n=0}^{\infty}u'_{k,n}\,v_n=T_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{u}'_k)\in\mathbb{R}_+$$

avec $\boldsymbol{u}'_k:=(u'_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}\in S_p$ car $\forall n\in\mathbb{N}$, $|u'_{k,n}|=\left|\frac{|u_{k,n}\,v_n|}{v_n}\right|=|u_{k,n}|\frac{|v_n|}{|v_n|}=|u_{k,n}|$ donc $\|\boldsymbol{u}'_k\|_p=\|\boldsymbol{u}_k\|_p=1$. On a donc une suite $(\boldsymbol{u}'_k)_{k\in\mathbb{N}}\in S_p^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\left|T_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{u}_k)\right|=\|\boldsymbol{u}_k\,\boldsymbol{v}\|_1\xrightarrow[k\to\infty]{}\sup_{\boldsymbol{u}\in S_p}\|\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}\|_1$$

Finalement,

$$\boxed{|||T_{\boldsymbol{v}}|||\;=\;\sup_{\boldsymbol{u}\in S_p}\left|T_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{u})\right|\;=\;\sup_{\boldsymbol{u}\in S_p}\|\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}\|_1\;=\;\|\boldsymbol{v}\|_q\;<\infty}\tag{4}$$

Donc $T_{\boldsymbol{v}}$ est une forme linéaire continue ($\in$ au dual topologique $(\ell^p)'=\mathcal{L}_{\|\cdot\|_p,|\cdot|_{\mathbb{C}}}(\ell^p,\mathbb{C})$).

2.2. Identification des formes linéaires à $T_{\boldsymbol{v}}$.

Soit $T\in\mathcal{L}_{\|\cdot\|_p,|\cdot|_{\mathbb{C}}}(\ell^p,\mathbb{C})$ une forme linéaire continue sur ℓ^p. Posons $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$\boldsymbol{\delta}_n:=(\delta_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}\in\ell^p\quad\text{et}\quad v_n:=T(\boldsymbol{\delta}_n)$$

Montrons alors que $T=T_{\boldsymbol{v}}$ avec $\boldsymbol{v}:=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il faut tout d'abord montrer que $\boldsymbol{v}\in\ell^q$.

Assertion : $\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{q}}\leqslant|||\boldsymbol{T}|||$.

Posons $\forall N\in\mathbb{N}$, $\boldsymbol{v}_N:=\big(v_n\,\mathbb{1}_{n\leqslant N}\big)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^p$ (support fini). On a alors $\|\boldsymbol{v}_N\|_p\xrightarrow[N\to\infty]{}\|\boldsymbol{v}\|_p$.

De plus, on a vu (4) que $\forall N\in\mathbb{N}$, $\|\boldsymbol{v}_N\|_p=|||T_{\boldsymbol{v}_N}|||=\sup_{u\in S_p}\left|T_{\boldsymbol{v}_N}(u)\right|$. Or $\forall N\in\mathbb{N}$, $\forall\boldsymbol{u}=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in S_p$,

$$\begin{aligned}
\left|T_{\boldsymbol{v}_N}(u)\right|=\left|\sum_{n=0}^{\infty}v_n\,\mathbb{1}_{n\leqslant N}\,u_n\right|\;&=\;\left|\sum_{n=0}^{N}T(\boldsymbol{\delta}_n)\,u_n\right|\\
\text{(linéarité)}\quad&=\;\left|T\left(\sum_{n=0}^{N}u_n\,\boldsymbol{\delta}_n\right)\right|\;=\;\left|T(\boldsymbol{u}\,\mathbb{1}_{\leqslant N})\right|\\
\text{(définition de }|||T|||)\quad&\leqslant\;|||T|||\cdot\|\boldsymbol{u}\,\mathbb{1}_{\leqslant N}\|_p\\
\text{(norme d'un suite tronquée)}\quad&\leqslant\;|||T|||\cdot\|\boldsymbol{u}\|_p\\
(u\in S_p)\quad&=\;|||T|||
\end{aligned}$$

Donc par passage au $\sup_{u\in S_p}$, on a $\|\boldsymbol{v}_N\|_p=|||T_{\boldsymbol{v}_N}|||\leqslant|||T|||$, et donc par passage à la limite $N\to\infty$,

$$\boxed{\|\boldsymbol{v}\|_p\;\leqslant\;|||T|||\;<\infty}\qquad\square$$

$T_{\boldsymbol{v}}$ est donc bien définie et continue. Montrons enfin qu'elle est égale à T. Soit $\boldsymbol{u}=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^p$.

$\forall N\in\mathbb{N}$, évaluons en la suite tronquée $\boldsymbol{u}\,\mathbb{1}_{\leqslant N}$:

$$T_{\boldsymbol{v}}\big(\boldsymbol{u}\,\mathbb{1}_{\leqslant N}\big)\;=\;\sum_{n=0}^{\infty}v_n\,u_n\,\mathbb{1}_{n\leqslant N}\;=\;\sum_{n=0}^{N}T(\boldsymbol{\delta}_n)\,u_n\;=\;T\Bigg(\underbrace{\sum_{n=0}^{N}u_n\,\boldsymbol{\delta}_n}_{=\,\boldsymbol{u}\mathbb{1}_{\leqslant N}}\Bigg)\;=\;T\big(\boldsymbol{u}\,\mathbb{1}_{\leqslant N}\big)$$

De plus,

$$\boldsymbol{u}\,\mathbb{1}_{\leqslant N} \xrightarrow[N\to\infty]{\|\cdot\|_p} \boldsymbol{u} \qquad \text{car} \qquad \left\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}\,\mathbb{1}_{\leqslant N}\right\|_p^p \;=\; \sum_{n=N+1}^{\infty} |u_n|^p \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

(reste d'une série convergente). Donc par continuité de T et de $T_{\boldsymbol{v}}$ pour $\|\cdot\|_p$,

$$T_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{u}) \;=\; \lim_{N\to\infty} T_{\boldsymbol{v}}\big(\boldsymbol{u}\,\mathbb{1}_{\leqslant N}\big) \;=\; \lim_{N\to\infty} T\big(\boldsymbol{u}\,\mathbb{1}_{\leqslant N}\big) \;=\; T(\boldsymbol{u})$$

Ainsi, lorsque T est une forme linéaire continue sur ℓ^p, $\forall \boldsymbol{u}=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^p$,

$$\boxed{T(\boldsymbol{u}) \;=\; T_{\left(T(\boldsymbol{\delta}_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}}(\boldsymbol{u}) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} u_n\, T(\boldsymbol{\delta}_n)}$$

On a ainsi identifié les formes linéaires continues sur ℓ^p à :

$$\boxed{\left(\ell^p\right)' = \left\{T_{\boldsymbol{v}} \,:\, \boldsymbol{v}\in\ell^q\right\}}$$
