Fonctions holomorphes et Calcul différentiel

1. Rappels sur le plan complexe

$$\mathfrak{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} \qquad \mathfrak{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2\,\mathrm{i}} \qquad |\mathfrak{Re}(z)|, |\mathfrak{Im}(z)| \leqslant |z|$$

$$|z|^2 = z\,\bar{z}$$

Une multiplication complexe $z \mapsto a\,z = |a|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg(a)}\,z$ est une similitude : composition d'une rotation et d'une homothétie.

La topologie de $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ est équivalente à la topologie produit en tant que $\mathbb{R}$-EV, c'est à dire $\cong$ à celle de $\mathbb{R}^2$:

$$z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \lim_{n\to\infty} |z_n - z| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \mathfrak{Re}(z_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathfrak{Re}(z) \\ \mathfrak{Im}(z_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathfrak{Im}(z) \end{cases}$$

C'est un espace complet.

2. Dérivées par rapport à z et $\bar{z}$

Soit $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ différentiable et $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ sa fonction associée dans le plan complexe :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+\mathrm{i}y) = \tilde{f}(x,y) \qquad \text{c'est à dire} \qquad \forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \tilde{f}(\mathfrak{Re}(z), \mathfrak{Im}(z))$$

On définit les dérivées par rapport à la partie imaginaire et réelle ∂_{i} et ∂_{r} par : $\forall x_0, y_0 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\partial_{\mathrm{r}} f(x+\mathrm{i}y) &:= \partial_1 \tilde{f}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\tilde{f}(x_0+h, y_0) - \tilde{f}(x_0,y_0)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(x+\mathrm{i}y+h) - f(x+\mathrm{i}y)}{h} \\
\partial_{\mathrm{i}} f(x+\mathrm{i}y) &:= \partial_2 \tilde{f}(x, y) = \lim_{h\to 0} \frac{\tilde{f}(x_0, y_0+h) - \tilde{f}(x_0,y_0)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(x+\mathrm{i}y+\mathrm{i}\,h) - f(x+\mathrm{i}y)}{h}
\end{aligned}$$

On pose

$$\boxed{\partial_z f := \tfrac{1}{2}\left(\partial_{\mathrm{r}} f - \mathrm{i}\,\partial_{\mathrm{i}} f\right) \quad \text{et} \quad \partial_{\bar{z}} f := \tfrac{1}{2}\left(\partial_{\mathrm{r}} f + \mathrm{i}\,\partial_{\mathrm{i}} f\right)}$$

3. Fonctions holomorphes $\leftrightarrow$ Cauchy-Riemann

Supposons que f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0, c'est à dire que

$$f'(z_0) := \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{C}}} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} \quad \text{existe}$$

En particulier, on a la même limite quelque soient les directions dans le plan complexe :

$$\partial_{\mathrm{r}} f(z_0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} \overset{\text{def}}{=} f'(z_0)$$

$$\partial_{\mathrm{i}} f(z_0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(z_0+\mathrm{i}\,h) - f(z_0)}{h} = \mathrm{i} \cdot \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(z_0+\mathrm{i}\,h) - f(z_0)}{\mathrm{i}\,h} = \mathrm{i} \cdot \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathrm{i}\mathbb{R}}} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{i}\,f'(z_0)$$

Et alors, puisque $\mathrm{i}^2 = -1$, on a

$$\partial_z f(z_0) = \tfrac{1}{2}\big(f'(z_0) - \mathrm{i}^2 f'(z_0)\big) = f'(z_0) \quad \text{et} \quad \partial_{\bar{z}} f(z_0) = \tfrac{1}{2}\big(f'(z_0) + \mathrm{i}^2 f'(z_0)\big) = 0$$

Réciproquement, supposons que $\partial_{\bar{z}} f(z_0) = 0$.
Donc $(\partial_\mathrm{r} f + \mathrm{i}\,\partial_\mathrm{i} f)(z_0) = 0$, donc $\partial_\mathrm{r} f(z_0) = -\mathrm{i}\,\partial_\mathrm{i} f(z_0)$, et $\partial_z f(z_0) = \partial_\mathrm{r} f(z_0)$.

Soient $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ et $z_0 = x + \mathrm{i}y$. Puisque $\tilde{f}$ est différentiable en (x_0, y_0), sa jacobienne vaut

$$\operatorname{Jac} \tilde{f}(x_0, y_0) = [\ \partial_1 \tilde{f} \ \ \partial_2 \tilde{f}\ ](x_0, y_0) = [\ \partial_\mathrm{r} f \ \ \partial_\mathrm{i} f\ ](z_0)$$

donc $\forall h_x, h_y \in \mathbb{R}$, en posant $h = h_x + \mathrm{i}h_y$ et $\vec{h} = (h_x, h_y)$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\tilde{f}(x_0, y_0)(\vec{h}) &= \partial_1 \tilde{f}(x_0, y_0)\, h_x + \partial_2 \tilde{f}(x_0, y_0)\, h_y \\
&= \partial_z f(z_0)\, h_x + \mathrm{i}\,\partial_z f(z_0)\, h_y \\
&= \partial_z f(z_0)\, h
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & \tilde{f}(x_0+h_x, y_0+h_y) & - & \tilde{f}(x_0, y_0) & - & \mathrm{d}\tilde{f}(x_0, y_0)(\vec{h}) & = & \underset{\vec{h}\to\vec{0}}{o}(\|\vec{h}\|_2^2) \\
= & f(z_0+h) & - & f(z_0) & - & \partial_z f(z_0)\, h & = & \underset{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{C}}}{o}(h^2)
\end{array}$$

donc f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 et $f'(z_0) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{C}}} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \partial_z f(z_0)$.

En résumé,

$$\boxed{f \text{ holomorphe} \iff \partial_{\bar{z}} f \equiv 0 \iff \partial_\mathrm{r} f = -\mathrm{i}\,\partial_\mathrm{i} f}$$

(« f est indépendante de $\bar{z}$ ») et alors

$$\boxed{f' = \partial_z f = \partial_\mathrm{r} f}$$

On reformule la condition d'holomorphie en décomposant $f = u + \mathrm{i}\,v$ avec $u := \mathfrak{Re}(f)$ et $v := \mathfrak{Im}(f)$:

$$f \text{ holomorphe} \iff \partial_\mathrm{r} f = -\mathrm{i}\,\partial_\mathrm{i} f \iff \partial_\mathrm{r} u + \mathrm{i}\,\partial_\mathrm{r} v = -\mathrm{i}\big(\partial_\mathrm{i} f + \mathrm{i}\,\partial_\mathrm{i} v\big) = -\mathrm{i}\,\partial_\mathrm{i} u + \partial_\mathrm{i} v$$

donc en identifiant la partie rélle et imaginaire, on obtient les **équations de Cauchy-Riemann** :

$$\boxed{f \text{ holomorphe} \iff \left\{\begin{array}{rcr} \partial_\mathrm{r} u & = & \partial_\mathrm{i} v \\ \partial_\mathrm{i} u & = & -\partial_\mathrm{r} v \end{array}\right.}$$

⚠ Ne pas oublier de vérifier que $\tilde{f}$ soit différentiable.

4. Difféomorphismes holomorphes