Si $R\in\mathbb{C}(X,Y)$ est une fraction rationnelle n'ayant pas de pôle sur le cercle unité $C=\mathrm{C}(0,1)$, alors

$$\boxed{\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta \;=\; \oint_C f_R(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 2\pi\mathrm{i}\sum_{z\in D}\mathrm{res}(f_R)(z) \quad \text{avec} \quad f_R\colon z\longmapsto \tfrac{1}{\mathrm{i}\,z}R\Big(\tfrac{z^2+1}{2\,z},\tfrac{z^2-1}{2\,\mathrm{i}\,z}\Big)}$$

fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, sans pôle sur C, et avec $D=\mathrm{D}(0,1)$.

Démonstration. En effet,

$$\begin{aligned}\oint_C f_R(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \int_0^{2\pi} f_R(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta \;&=\; \int_0^{2\pi}\frac{1}{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}R\Big(\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}+1}{2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}},\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}-1}{2\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\Big)\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta\\ &=\; \int_0^{2\pi} R\Big(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2},\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\,\mathrm{i}}\Big)\mathrm{d}\theta\\ &=\; \int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

Et par le théorème des résidus sur un disque à peine plus grand que D et contenant uniquement les pôles de f_R sur D (toujours possible car R n'a qu'un nombre fini de pôles, et aucuns sur ∂D),

$$\oint_C f_R(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 2\pi\mathrm{i}\sum_{z\in D}\mathrm{res}(f_R)(z) \quad \text{(somme finie)}$$ □

Exemple. Soit $a>1$ réel, alors

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{a+\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = \oint_C f_R(z)\,\mathrm{d}z \quad \text{avec} \quad R=\frac{1}{a+Y}$$

(intégrale bien définie car $a+\sin\theta>0$ car $a>1$) c'est à dire

$$f_R(z) \;=\; \frac{1}{\mathrm{i}\,z}\,\frac{1}{a+\frac{z^2-1}{2\,\mathrm{i}\,z}} \;=\; \frac{2}{z^2+2\mathrm{i}a\,z-1} \;=:\; \frac{2}{Q(z)} \quad \text{avec} \quad Q=X^2+2\mathrm{i}a\,X-1$$

de déterminant $\Delta_Q=(2\mathrm{i}a)^2-4\cdot-1=4\,(1-a^2)<0$ car $a>1$, donc ayant deux racines simples en

$$z_\pm=\frac{-2\mathrm{i}a\pm\mathrm{i}\sqrt{-4\,(1-a^2)}}{2}=-\mathrm{i}\,\big(a\pm\sqrt{a^2-1}\big) \quad \text{avec} \quad |z_-|<1<|z_+|$$

(en effet, $a-\sqrt{a^2-1}<1$ car $a-1<\sqrt{a^2-1}$ car $(a-1)^2=\cancel{a}^2-2\,a+1<\cancel{a}^2-1$ car $-2\,a<-2$ car $a>1$, et $a+\sqrt{a^2-1}\geqslant a>1$)

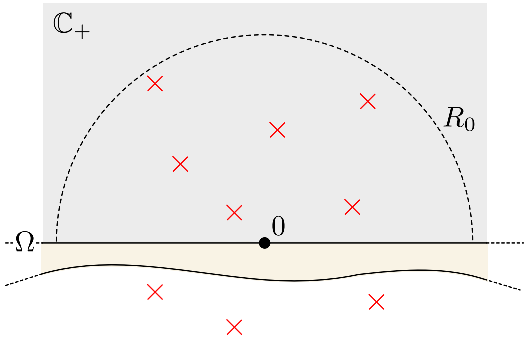
Et alors $f(z)=\frac{2}{(z-z_-)\,(z-z_+)}$ a deux pôles simples z_+ et z_- et

$$\mathrm{res}(f)(z_-)=\lim_{z\to z_-}(z-z_-)\,f(z)=\frac{2}{z_--z_+}=\frac{2}{-\mathrm{i}}\,\frac{1}{(\cancel{a}-\sqrt{a^2-1})-(\cancel{a}+\sqrt{a^2-1})}=\frac{1}{\mathrm{i}\sqrt{a^2-1}}$$

Donc, comme seul z_- est dans D,

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{a+\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta \;=\; \frac{2\,\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega \backslash Z)$ une fonction méromorphe sur un ouvert Ω tel que $\overline{\mathbb{C}_+} \subset \Omega$ et possédant un ensemble *fini* de pôles $Z \subset \mathbb{C}_+$ dans le demi-plan supérieur $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \mathfrak{Im}(z) > 0\}$ (donc pas de pôles sur l'axe réel). On pose alors $R_0 > \max_{z \in Z} |z|$.



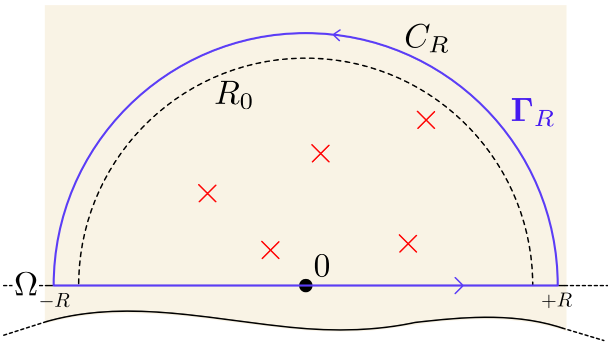
On suppose que f tend vers 0 à l'infini sur $\mathbb{C}_+$:

$$\lim_{\substack{|z| \to \infty \\ z \in \mathbb{C}_+}} |f(z)| = 0$$

Montrons alors que $\forall k \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\, \mathrm{d}x \;=\; 2\pi \mathrm{i} \sum_{z \in Z} \mathrm{res}(f_k)(z) \quad \text{avec} \quad f_k : z \mapsto f(z)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}}$$

De façon similaire, pour $k \in \mathbb{R}_-^*$, on se place sur le demi-plan inférieur $\mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C} : \mathfrak{Im}(z) < 0\}$ et on considère les pôles qui sont dans ce demi-plan.



Soit $R > R_0$. Le théorème des résidus appliqué à f sur le contour fermé Γ_R tel que $\overline{(\Gamma_R)_{\mathrm{int}}} \subset \Omega$ et $(\Gamma_R)_{\mathrm{int}}$ simplement connexe, sur lequel f est méromorphe, donne (puisque $Z \subset (\Gamma_R)_{\mathrm{int}}$ puisque $R > R_0$)

$$\begin{aligned}
\oint_{\Gamma_R} f_k(z)\, \mathrm{d}z &= 2\pi \mathrm{i} \sum_{z_0 \in Z} \mathrm{res}(f_k)(z_0) \\
&= \int_{-R}^{+R} f_k(x)\, \mathrm{d}x + \int_{C_R} f_k(z)\, \mathrm{d}z
\end{aligned}$$

Il reste à montrer que l'intégrale sur le demi-cercle C_R disparait lorsque $R \to \infty$:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{C_R} f_k(z)\, \mathrm{d}z \right| &= \left| \int_0^\pi f_k(R\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\, \mathrm{i}\, R\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\, \mathrm{d}\theta \right| \quad \text{avec} \quad z \mapsto R\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \\
&\leqslant R \int_0^\pi \left| f(R\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kR\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \right| \mathrm{d}\theta \\
&\leqslant R\, M_R \int_0^\pi \left| \mathrm{e}^{\mathrm{i}kR(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)} \right| \mathrm{d}\theta \quad \text{avec} \quad M_R := \max_{0 < \theta < \pi} \left| f(R\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \right| \\
(|\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR\cos\theta}| = 1) \qquad &= R\, M_R \int_0^\pi \mathrm{e}^{-kR\sin\theta}\, \mathrm{d}\theta \\
(\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)) \qquad &= R\, M_R\, 2 \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-kR\sin\theta}\, \mathrm{d}\theta \\
&\leqslant R\, M_R\, 2\, \frac{\pi}{2kR} \;=\; \frac{1}{k} M_R\, \pi \xrightarrow[R \to \infty]{} 0
\end{aligned}$$

En effet, puisque l'on a l'inégalité de corde $\forall \theta \in [0, \pi/2]$, $\sin(\theta) \geqslant \frac{2}{\pi}\theta$, on a $-k\, R \sin\theta \leqslant -\frac{2kR}{\pi}\theta$ donc

$$\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-kR\sin\theta}\, \mathrm{d}\theta \;\leqslant\; \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-\frac{2kR}{\pi}\theta}\, \mathrm{d}\theta \;=\; \left[-\frac{\pi}{2kR}\, \mathrm{e}^{-\frac{2kR}{\pi}\theta} \right]_{\theta=0}^{\pi/2} \;=\; \frac{\pi}{2kR} \underbrace{(1 - \mathrm{e}^{-kR})}_{\leqslant 1 \text{ car } k > 0} \;\leqslant\; \frac{\pi}{2kR}$$

et de plus,

$$M_R := \max_{0<\theta<\pi} \left| f(R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \right| \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \qquad \text{car} \qquad |f(z)| \xrightarrow[\substack{|z|\to\infty \\ z\in\mathbb{C}_+}]{} 0$$

Ainsi, on a bien

$$2\pi\mathrm{i} \sum_{z_0\in Z} \operatorname{res}(f_k)(z_0) \;=\; \int_{-R}^{+R} f_k(x)\,\mathrm{d}x + \int_{C_R} f_k(z)\,\mathrm{d}z \;\xrightarrow[R\to\infty]{}\; \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x$$

avec la somme des résidus constante par rapport à R, que l'on peut donc identifier avec l'intégrale limite.