Intégrales paramétriques

Soient $\Omega \in \mathcal{O}$ ouvert d'un espace métrique, $(X, \mathcal{T}, \mu)$ espace mesuré complet, et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit $f : \Omega \times X \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que $\forall t \in \Omega,\ x \mapsto f(t,x) \in \mathscr{L}^1(X)$ intégrable. Posons alors sur Ω :

$$F : t \longmapsto \int_X f(t,\cdot)$$

1. Limite en un point $a \in \bar{\Omega}$

- $\forall t \in \Omega, \quad f(t,\cdot) \in \mathcal{M}(X)$ mesurable (donc intégrable par domination, donc F bien définie)
- $\forall x \overset{\mu\text{-pp}}{\in} X, \quad f(t,x) \xrightarrow[t \to a]{} \ell(x)$ (sans conditions)
- $\exists \varphi \in \mathscr{L}^1(X) : \quad \forall t \in \Omega, \quad |f(t,\cdot)| \overset{\mu\text{-pp-}X}{\leqslant} \varphi$

  (domination **uniforme** (independante de t) par une fonction **intégrable**)

Alors $\ell \in \mathscr{L}^1(X)$ intégrable et

$$F \xrightarrow[t \to a]{} \int_X \ell \qquad \text{c'est à dire} \qquad \lim_{t \to a} \int_X f(t,\cdot) = \int_X \lim_{t \to a} f(t,\cdot)$$

Démonstration. Soit une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Omega^{\mathbb{N}}$ convergente vers $t_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a \in \bar{\Omega}$.

Posons $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n := f(t_n,\cdot) \in \mathcal{M}(X)$. Alors $\forall x \overset{\mu\text{-pp}}{\in} X,\ f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell(x)$ par limite séquentielle.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N},\ |f_n| = |f(t_n,\cdot)| \overset{\mu\text{-pp-}X}{\leqslant} \varphi$, indépendamment de n et presque partout sur X.

Donc par le THÉORÈME DE CONVERGENCE DOMINÉE, la fonction-limite ℓ est intégrable, $\left(\int_X f_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et

$$\int_X \ell = \int_X \lim_{n \to \infty} f_n = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n = \lim_{n \to \infty} F(t_n)$$

C'est vrai pour toute suite $(t_n)_n \in \Omega^{\mathbb{N}}$, donc $\lim_a F = \int_X \ell$ par limite séquentielle, où l'intégrabilité des $f(t,\cdot)$ est nécessaire pour que F soit définie sur Ω. □

En pratique, on choisit Ω' voisinage de $a \in \bar{\Omega}$ si l'on ne peut vérifier les hypothèses sur Ω entier.

2. Continuité en un point $a \in \Omega$

De plus, si f est continue en a, on a $\ell = \lim_{t \to a} f(t,\cdot) = f(a,\cdot)$ donc $\lim_{t \to a} F(t) = F(a)$, c'est à dire que

$$F \text{ continue en } a$$

3. Continuité de l'intégrale

- $\forall t \in \Omega, \quad x \mapsto f(t,x) \in \mathcal{M}(X)$ mesurable (donc intégrable par domination, donc F bien définie)
- $\forall x \overset{\mu\text{-pp}}{\in} X, \quad t \mapsto f(x,t) \quad \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ (f continue en la variable t, presque partout)
- $\exists \varphi \in \mathscr{L}^1(X) : \quad \forall t \in \Omega, \quad |f(t,\cdot)| \overset{\mu\text{-pp-}X}{\leqslant} \varphi$ (domination **uniforme** par une fonction **intégrable**)

$$F : t \longmapsto \int_X f(t,\cdot) \quad \in \mathcal{C}^0(\Omega) \quad \text{définie et continue}$$

C'est juste la continuité en tout point de Ω. La continuité est un caractère local : lorsqu'on ne peut dominer sur tout Ω, il suffit d'appliquer le théorème sur un voisinage de tout point, ce qui revient à dominer sur ces voisinages :

- $\forall t_0 \in \Omega, \quad \exists V_0 \in \mathrm{Vois}_\Omega(t_0), \quad \exists \varphi \in \mathscr{L}^1(X) : \quad \forall t \in V_0, \quad |f(t,\cdot)| \overset{\mu\text{-pp-}X}{\leqslant} \varphi$

4. Dérivation sous l'intégrale

Ici, $\Omega = I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ (nécessaire pour utiliser le thm. des accroissements finis)

- $\forall t \in I, \quad x \mapsto f(t,x) \in \mathscr{L}^1(X)$ intégrable
- $\forall x \in X, \quad t \mapsto f(x,t) \quad \in \mathcal{CD}^0(I)$ (f dérivable en la variable t)
- $\exists \varphi \in \mathscr{L}^1(X) : \quad \forall t \in I, \quad \left|\partial_t f(t,\cdot)\right| \overset{\mu\text{-pp-}X}{\leqslant} \varphi$

  (pour un voisinage de tout point, domination **uniforme** de la dérivée par une fonction **intégrable**)

  Ou, si possible,

Alors $F \in \mathcal{CD}^0(I)$ dérivable, $\quad \forall t \in I$, $\partial_t f(t,\cdot) \in \mathscr{L}^1(X)$ intégrable, $\quad$ et $\forall t \in I$,

$$\partial F(t) = \partial_t \int_X f(t,\cdot) = \int_X \partial_t f(t,\cdot)$$

Démonstration. Fixons $t \in I$. Soit une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (I \setminus \{t\})^{\mathbb{N}}$ convergente vers $t_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} t \in \bar{I}$.

On suppose sans perte de généralité que $\forall n \in \mathbb{N}, t_n < t$ $\quad$ (sinon, poser $t'_n = t - |t_n - t|$).

Par dérivabilité, $\forall x \in X$, puisque $f(\cdot,x)$ continue sur $[t_n,t]$ et dérivable sur $]t_n,t[$, donc par le THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS (conséquence du théorème de Rolle),

$$\exists c_n \in]t_n,t[: \quad \partial_t f(c_n,x) = \frac{f(t_n,x) - f(t,x)}{t_n - t}$$

Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n < c_n < t$, par encadrement $c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} t$ et les différences finies tendent vers

$$\partial_t f(t,x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(c_n,x) - f(t,x)}{c_n - t}$$

De plus, grâce à la domination de la dérivée, la suite de fonctions $\left(\partial_t f(c_n,\cdot)\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}(X)$ mesurables (car $f(t_n,\cdot)$ et $f(t,\cdot)$ mesurables) vérifie les hypothèses du THÉORÈME DE CONVERGENCE DOMINÉE, et donc

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \partial_t f(c_n,\cdot) = \int_X \lim_{n\to\infty} \partial_t f(c_n,\cdot) = \int_X \partial_t f(t,\cdot)$$

Ensuite, on développe en différences finies, et par linéarité de l'intégrale, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\int_X \partial_t f(c_n,\cdot) = \int_X \frac{f(t_n,\cdot) - f(t,\cdot)}{t_n - t} = \frac{1}{t_n - t}\left(\int_X f(t_n,\cdot) - \int_X f(t,\cdot)\right) = \frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t}$$

C'est vrai pour toute suite $(t_n)_n \in I^{\mathbb{N}}$, donc $\forall t_0 \in I$,

$$\lim_{t\to t_0} \frac{F(t_0) - F(t)}{t_0 - t} = \partial F(t_0) = \int_X \partial_t f(t_0,\cdot)$$

□

On peut étendre le théorème à une dérivabilité presque-partout.

La dérivabilité est un caractère local : Lorsqu'on ne peut dominer sur tout I, il suffit d'appliquer le théorème sur un voisinage de tout point de I, ce qui revient à dominer sur ces voisinages :

- $\forall t_0 \in I, \quad \exists V_0 \in \mathrm{Vois}_I(t_0), \quad \exists \varphi \in \mathscr{L}^1(X) : \quad \forall t \in V_0, \quad \left|\partial_t f(t,\cdot)\right| \overset{\mu\text{-pp-}X}{\leqslant} \varphi$

5. Caractère $\mathcal{C}^k$ de l'intégrale