Applications des inégalités de Cauchy et du principe du maximum

On munit $\mathbb{C}$ de sa topologie usuelle de $\mathbb{C}$- ou $\mathbb{R}$-EVN.

Théorème 1. (Théorème de Liouville) *Soit $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ holomorphe sur $\mathbb{C}$ (entière).*
Alors si f est bornée, elle est constante :

$$\exists M > 0 : |f| \leqslant M \quad \Longrightarrow \quad f \equiv f(0)$$

Démonstration. Inégalités de Cauchy à l'ordre 1 en tout point :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \forall R > |z|, \quad |\partial f(z)| \;\leqslant\; \frac{1!}{R^1} \sup_{\mathrm{D}(0,R)} |f| \;\leqslant\; \frac{M}{R} \xrightarrow[R \to \infty]{} 0 \qquad \text{donc} \quad \partial f(z) = 0$$

Puisque $\mathbb{C}$ est connexe, on peut intégrer sur $[0, z]$ la dérivée ∂f, de primitive f :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) \;=\; f(0) + \int_{[0,z]} \overbrace{\partial f(\zeta)}^{=0} \mathrm{d}\zeta \;=\; f(0)$$ □

Théorème 2. (Théorème fondamental de l'algèbre)
Tout polynôme non constant $P \in \mathbb{C}[X] : \deg(P) > 0$ possède au moins une racine : $\exists z \in \mathbb{C} : P(z) = 0$.

Démonstration. Supposons par l'absurde que $P =: \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $n := \deg(P) > 0$ ne possède aucune racine : $\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) \neq 0$. Alors $z \mapsto {}^{1}/_{P(z)} \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ holomorphe sur tout $\mathbb{C}$ puisque $z \mapsto P(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.
Montrons qu'elle est bornée pour appliquer le théorème de Liouville. Puisque

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad |P(z)| \underset{|z| \to \infty}{\sim} |a_n|\,|z|^n \xrightarrow[r \to \infty]{} +\infty \quad (\text{car } n \geqslant 1)$$

on a une minoration sur $\mathbb{C} \backslash \bar{\mathrm{D}}(0, R)$:

$$\exists R > 0 : \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \big(\, |z| > R \quad \Longrightarrow \quad |P(z)| \geqslant |P(0)| > 0 \,\big)$$

Par ailleurs, puisque $z \mapsto P(z)$ est continue sur le **compact** $\bar{\mathrm{D}}(0, R)$ sans s'annuler, elle est minorée :

$$\exists z_0 \in \bar{\mathrm{D}}(0, R), \qquad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \big(\, |z| \leqslant R \quad \Longrightarrow \quad |P(z)| \geqslant |P(z_0)| > 0 \,\big)$$

Ainsi, sur $\mathbb{C} = \mathbb{C} \backslash \bar{\mathrm{D}}(0, R) \cup \bar{\mathrm{D}}(0, R)$,

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \frac{1}{|P(z)|} \;\leqslant\; \max\Big(\tfrac{1}{|P(0)|}, \tfrac{1}{|P(z_0)|}\Big) =: M > 0$$

Donc par le théorème de Liouville, puisque $z \mapsto {}^{1}/_{P(z)} \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ est bornée sur $\mathbb{C}$, elle est **constante**. Donc $z \mapsto P(z)$ est constante, donc P est un polynôme constant : $\deg(P) \leqslant 0$. Contradiction. □

Théorème 3. (Principe du maximum n°1) *Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ holomorphe sur Ω ouvert* ***connexe****.*

Si $|f|$ admet un ***maximum local****, alors f* ***constante*** *:*

$$\big(\, \exists V = \bar{\mathrm{D}}(z_{\mathsf{m}}, r) \subset \Omega \quad : \quad \forall z \in V\,,\ |f(z)| \leqslant |f(z_{\mathsf{m}})| \,\big) \quad \Longrightarrow \quad f \equiv f(z_{\mathsf{m}})$$

On note les fonctions holomorphes sur un ouvert Ω et continues sur $\bar{\Omega}$ jusqu'au bord $\partial\Omega$:

$$\overline{\mathcal{C}^0}\,\mathcal{H}(\Omega) = \big\{ f \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) \,:\, f|_{\Omega} \in \mathcal{H}(\Omega) \big\}$$

Théorème 4. (Principe du maximum n°3)
Soit $f \in \overline{\mathcal{C}^0}\,\mathcal{H}(\Omega)$ holomorphe sur Ω ouvert ***connexe borné*** *et continue jusqu'au bord $\partial\Omega$.*
Alors sur le compact $\bar{\Omega}$, le maximum du module est toujours atteint au bord :

$$\max_{\bar{\Omega}} |f| = \max_{\partial\Omega} |f| \qquad \text{c'est à dire} \qquad \forall z \in \bar{\Omega}, \quad |f(z)| \leqslant \max_{\partial\Omega} |f|$$

Démonstration. Par contradiction, supposons que

$$\exists z_0 \in \Omega \quad : \quad |f(z_0)| \;>\; \max_{\partial\Omega} |f| \qquad\qquad (*)$$

Puisque $|f|$ est continue sur le **compact** $\bar{\Omega}$, elle est majorée et atteint sa borne :

$$\exists z_{\mathsf{m}} \in \bar{\Omega} \quad : \quad \forall z \in \bar{\Omega}, \quad |f(z_{\mathsf{m}})| \;\geqslant\; |f(z)|$$

En particulier en z_0,

$$|f(z_{\mathsf{m}})| \;\geqslant\; |f(z_0)| \;>\; \max_{\partial\Omega} |f|$$

donc nécessairement $z_{\mathsf{m}} \notin \partial\Omega$. Donc $|f|$ admet un maximum local en $z_{\mathsf{m}} \in \Omega$ intérieur, donc par le **principe du maximum n°1**, $f|_{\Omega} \equiv f(z_{\mathsf{m}})$ constante, donc f constante par continuité, ce qui contredit $(*)$. □

Théorème 5. *Soient $f, g \in \overline{\mathcal{C}^0}\,\mathcal{H}(\Omega)$ holomorphes sur Ω ouvert* ***connexe borné*** *et continues jusqu'au bord $\partial\Omega$, et ne* ***s'annulant pas****. Alors si elles sont égales en module sur $\partial\Omega$, elles le sont sur tout $\bar{\Omega}$, et sont même égales à une phase globale près :*

$$|f|\big|_{\partial\Omega} = |g|\big|_{\partial\Omega} \quad \Longrightarrow \quad \exists \theta \in \mathbb{R} \,:\, f = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} g$$

Démonstration. Supposons que $|f|\big|_{\partial\Omega} = |g|\big|_{\partial\Omega}$. Posons $h_1 := \dfrac{f}{g}$ et $h_2 := \dfrac{g}{f} = \dfrac{1}{h_1}$.

Puisque f et g ne s'annulent pas, $h_1, h_2 \in \overline{\mathcal{C}^0}\,\mathcal{H}(\Omega)$. Par le **principe du maximum n°3**,

$$\forall z \in \bar{\Omega}, \quad |h_1(z)| \leqslant \max_{\partial\Omega} |h_1| = 1 \qquad \text{car, sur le bord } |h_1|\big|_{\partial\Omega} = \frac{|f|}{|g|}\bigg|_{\partial\Omega} \equiv 1$$

De même, en appliquant le principe du maximum sur h_2, on a

$$\forall z \in \bar{\Omega}, \quad \frac{1}{|h_1(z)|} = |h_2(z)| \leqslant 1 \quad \text{donc} \quad |h_1(z)| \geqslant 1$$

Donc $|h_1| = 1$. Le maximum de h_1 est alors atteint en un point intérieur (n'importe quel $z_{\mathsf{m}} \in \Omega$), donc par le **principe du maximum n°1**, h_1 est constante sur tout $\bar{\Omega}$. Or $|h_1| = 1$ de module unité, donc

$$\exists \theta \in \mathbb{R} \quad : \quad h_1 = \frac{f}{g} \equiv \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \qquad \text{d'où} \qquad f = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} g$$ □

Remarque 6. C'est *faux* si on relâche l'hypothèse de non-annulation : avec $f : z \mapsto 1$ et $g : z \mapsto z$ holomorphes sur $\bar{\mathrm{D}}(0,1)$ connexe borné, on a $|f|\big|_{\mathrm{C}(0,1)} = |g|\big|_{\mathrm{C}(0,1)} \equiv 1$, pourtant $|f| \neq |g|$.

Remarque 7. On applique souvent ce théorème avec $g \equiv 1$.

Corollaire 8. *Soit $f \in \overline{\mathcal{C}^0}\mathcal{H}(\Omega)$ holomorphe sur Ω ouvert **connexe borné** et continue jusqu'au bord. Alors si f prend des valeurs réelles sur $\partial\Omega$, elle est constante sur $\bar{\Omega}$:*

$$f(\partial\Omega) \subset \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad f \equiv \mathrm{cste}$$

Démonstration. Considérons $g : z \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,f(z)} \in \overline{\mathcal{C}^0}\mathcal{H}(\Omega)$ par composition $\overline{\mathcal{C}^0}\mathcal{H}(\Omega)$ de $\exp$ et f.

L'exponentielle ne s'annulant pas, g ne s'annule pas. De plus $z \mapsto 1$ est holomorphe et ne s'annule pas. On peut donc appliquer le théorème précédent à $(g,\, z \mapsto 1)$, car

$$\forall z \in \partial\Omega, \quad |g(z)| = |\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,f(z)}| = 1 \quad \text{car} \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,f(z)} \in \mathrm{C}(0,1) \quad \text{car} \quad f(z) \in \mathbb{R}$$

Ainsi,

$$\exists \theta \in \mathbb{R} \,:\, g \equiv \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \qquad \text{donc} \qquad \forall z \in \bar{\Omega}, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,f(z)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \quad \text{donc} \quad \exists n_z \in \mathbb{Z} :\, f(z) = \theta + 2\pi n_z$$

Donc f est à valeurs dans un ensemble discret :

$$f(\bar{\Omega}) \,\subset\, \theta + 2\pi\mathbb{Z}$$

Or $\bar{\Omega}$ connexe et f continue, donc $f(\bar{\Omega})$ connexe dans un ensemble discret, donc f est constante. □

Théorème 9. *Soit $f \in \overline{\mathcal{C}^0}\mathcal{H}(\Omega)$ holomorphe sur Ω ouvert **connexe borné** et continue jusqu'au bord. Alors si sa partie imaginaire est négative sur $\partial\Omega$ et qu'elle prend une valeur réelle intérieure, elle est constante :*

$$\left(\,\mathfrak{Im}(f)|_{\Omega} \,\leqslant\, 0 \quad \textit{et} \quad \exists z_0 \in \Omega :\, f(z_0) \in \mathbb{R}\,\right) \quad \Longrightarrow \quad f \equiv \mathrm{cste}$$

Démonstration. Considérons $g : z \longmapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,f(z)} \in \overline{\mathcal{C}^0}\mathcal{H}(\Omega)$ par composition $\overline{\mathcal{C}^0}\mathcal{H}(\Omega)$ de $\exp$ et f.

Donc par le **principe du maximum n°3**, $\forall z \in \bar{\Omega}$, $|f(z)| \leqslant \max_{\partial\Omega}|f|$. Majorons ce maximum :

$$\begin{aligned}
\forall z \in \partial\Omega, \quad |g(z)| &= \left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathfrak{Re}\,f(z) + \mathrm{i}\,\mathfrak{Im}\,f(z))}\right| \\
&= \left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\mathfrak{Re}\,f(z)}\right| \left|\mathrm{e}^{\mathfrak{Im}\,f(z)}\right| \\
&= \left|\mathrm{e}^{\mathfrak{Im}\,f(z)}\right| \leqslant 1 \quad \text{car} \quad \mathfrak{Im}\,f(z) \leqslant 0 \\
\text{donc} \quad \max_{\partial\Omega}|g| &\leqslant 1
\end{aligned}$$

Or $f(z_0) \in \mathbb{R}$ donc $|g(z_0)| = |\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,f(z_0)}| = 1 \geqslant \max_{\partial\Omega}|g|$ donc nécessairement $|g(z_0)| = \max_{\partial\Omega}|g| = 1$.

Donc g admet un maximum en $z_0 \in \Omega$ intérieur, donc par le **principe du maximum n°1**, $g \equiv \mathrm{cste}$.

Puisque $|g| \equiv 1$, on a donc $\exists \theta \in \mathbb{R} \,:\, g \equiv \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ donc

$$\forall z \in \bar{\Omega}, \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,f(z)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \qquad \text{donc} \qquad f(\bar{\Omega}) \,\subset\, \theta + 2\pi\mathbb{Z}$$

donc comme dans la preuve précédente, puisque $\bar{\Omega}$ est connexe, f est constante. □