Une norme sur $\mathbb{K}[X]$

Soit $\mathbb{K}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes sur $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, muni de la norme

$$\begin{array}{rcl} \|\cdot\|_{\mathsf{s}} : \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ P & \longmapsto & \displaystyle\sup_{k\in\mathbb{N}^*} \left|P(1/k)\right| = \left\|\boldsymbol{S}(P)\right\|_\infty \end{array} \qquad \text{avec} \qquad \begin{array}{rcl} \boldsymbol{S} : \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{\mathbb{N}}_{\mathsf{cv}} \\ P & \longmapsto & \left(P(1/k)\right)_{k\in\mathbb{N}^*} \end{array}$$

C'est une norme sup, bien définie car $\boldsymbol{S}(P)$ est une suite convergente donc bornée. En effet,
$\forall P\in\mathbb{K}[X]$, $x\longmapsto P(x)$ est polynomiale donc continue, donc $P\left(\frac{1}{k}\right)\xrightarrow[k\to\infty]{} P\left(\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k}\right)=P(0)\in\mathbb{K}$

Non complétude de $\left(\mathbb{K}[X],\|\cdot\|_{\mathsf{s}}\right)$

L'espace $\left(\mathbb{K}[X],\|\cdot\|_{\mathsf{s}}\right)$ n'est pas complet. En effet, montrons que $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{K}[X]^{\mathbb{N}}$
est une suite de Cauchy pour $\|\cdot\|_{\mathsf{s}}$ et qu'elle ne converge pas pour $\|\cdot\|_{\mathsf{s}}$.

Suite de Cauchy :

⚠ $(x\mapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une suite de Cauchy pour $\|\cdot\|_{\infty,[0,1]}$. Alors que pour $\|\cdot\|_{\mathsf{s}}$:

$$\forall p,q\in\mathbb{N},\qquad \left\|X^p-X^q\right\|_{\mathsf{s}} = \sup_{k\geqslant 1}\left|\left(\frac{1}{k}\right)^p-\left(\frac{1}{k}\right)^q\right| = \max\left(\underbrace{|1^p-1^q|}_{=0},\ \sup_{k\geqslant 2}\left|\frac{1}{k^p}-\frac{1}{k^q}\right|\right)$$

Or $\forall p,q\geqslant N$, $\forall k\geqslant 2$, $\frac{1}{k^p},\frac{1}{k^q}\leqslant\frac{1}{k^N}\leqslant 2^{-N}$. Donc

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N} : \forall p,q\geqslant N,\ \|X^p-X^q\|_{\mathsf{s}}\ \leqslant\ 2^{-N}<\varepsilon$$

Non convergence :

Supposons par l'absurde qu'il existe $P\in\mathbb{K}[X]$ tel que $X^n\xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_{\mathsf{s}}} P$.
Alors $\left\|X^n-P\right\|_{\mathsf{s}}=\left\|\boldsymbol{S}(X^n-P)\right\|_\infty\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. Donc (C.U. $\Rightarrow$ C.S.) $\forall k\geqslant 1$,

$$\boldsymbol{S}(X^n-P)_k = \frac{1}{k^n}-P\left(\frac{1}{k}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad\text{donc}\qquad P\left(\frac{1}{k}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{k^n} = \begin{cases} 0 & \text{si } k\geqslant 2\\ 1 & \text{si } k=1\end{cases}$$

Ainsi, P possède une infinité de racines ($[\![2,\infty[\![$) donc c'est le polynôme nul.
Or $P(1)=1\neq 0$. Contradiction. Donc $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente pour $\|\cdot\|_{\mathsf{s}}$.

On remarque du même coup que $\boldsymbol{S}$ n'est pas surjective :
on vient de montrer que $\boldsymbol{S}^{\leftarrow}\left(\{\boldsymbol{\delta}_0\}\right)=\varnothing$, et plus généralement $\boldsymbol{S}^{\leftarrow}\left(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}_{\mathsf{ksupp}}\setminus\{\boldsymbol{0}\}\right)=\varnothing$.

Mais…

Densité des "suites polynomiales" $\boldsymbol{S}(\mathbb{K}[X])$ dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}_{\mathsf{cv}}$

On se place dans l'EVN $\left(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}_{\mathsf{cv}}, \|\cdot\|_\infty\right)$.

$\boldsymbol{S}$ étant linéaire de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}_{\mathsf{cv}}$, $\boldsymbol{S}(\mathbb{K}[X])$ est un sous-EV de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}_{\mathsf{cv}}$. Montrons qu'il est dense :

- On va utiliser le fait que l'EV des suites à support compact $\mathbb{K}^{\mathbb{N}^*}_{\mathsf{ksupp}}$ est dense dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}^*}_{\mathsf{cv}(0)}$
- Mais $\mathbb{K}^{\mathbb{N}^*}_{\mathsf{ksupp}} \not\subset \boldsymbol{S}(\mathbb{K}[X])$. On veut alors montrer que $\mathbb{K}^{\mathbb{N}^*}_{\mathsf{ksupp}} \subset \overline{\boldsymbol{S}(\mathbb{K}[X])}$, c'est à dire que l'on peut approcher une suite à support compact par des suites polynomiales.
- Pour cela, on utilise la base $(\mathbb{1}_{[\![1,p]\!]})_{p\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}^*}_{\mathsf{ksupp}}$ et la linéarité de $\boldsymbol{S}$, après avoir montré que les $\mathbb{1}_{[\![1,p]\!]}$ peuvent être approchées par des suites polynomiales $\boldsymbol{S}(R_{n,p})$.

Soit $p\in\mathbb{N}^*$. On veut une suite polynomiale $\boldsymbol{S}(R_{n,p})$ telle que $\boldsymbol{S}(R_{n,p}) \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_\infty} \mathbb{1}_{[\![1,p]\!]}$.
Posons les polynômes interpolateurs :

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad R_{n,p} := \left(1-\prod_{j=1}^{p}(1-j\,X)\right)^n$$

Alors, $\forall k\geqslant 1$, $R_{n,p}(1/k) := \left(1-\prod_{j=1}^{p}\left(1-\frac{j}{k}\right)\right)^n$, et

- si $1\leqslant k\leqslant p$, pour $j=k$, on a $1-\frac{j}{k}=0$, donc $\prod_{j=1}^{p}\left(1-\frac{j}{k}\right)=0$, donc $\left|R_{n,p}(1/k)\right| = 1^n = 1$
- si $p+1\leqslant k$, $\forall j\in[\![1,p]\!]$, $\frac{j}{k}\leqslant\frac{p}{p+1}$ donc $1-\frac{j}{k}\geqslant\frac{1}{p+1}$ donc $\prod_{j=1}^{p}\left(1-\frac{j}{k}\right)\geqslant\frac{1}{(p+1)^p}$
  donc $\left|R_{n,p}(1/k)\right|\leqslant\left(1-\frac{1}{(p+1)^p}\right)^n$ avec $1-\frac{1}{(p+1)^p}\in\,]0,1[$

On a alors que

$$\begin{aligned}
\left\|\boldsymbol{S}(R_{n,p})-\mathbb{1}_{[\![1,p]\!]}\right\|_\infty &= \max\left(\sup_{1\leqslant k\leqslant p}\overbrace{\left|R_{n,p}(1/k)-1\right|}^{=0},\ \sup_{k>p}\left|R_{n,p}(1/k)-0\right|\right)\\
&= \sup_{k>p}\left|R_{n,p}(1/k)\right|\\
&\leqslant \left(1-\frac{1}{(p+1)^p}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0
\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall p\in\mathbb{N}^*$, $\boxed{\boldsymbol{S}(R_{n,p}) \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_\infty} \mathbb{1}_{[\![1,p]\!]}}$.

Soit $\boldsymbol{u}=(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}^*}_{\mathsf{ksupp}}$ suite à support fini. Notons $N=\max(\operatorname{supp}(\boldsymbol{u}))$ et posons la suite :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \boldsymbol{s}_n := \boldsymbol{S}\left(\sum_{p=1}^{N}\alpha_p\cdot R_{n,p}\right)\in\boldsymbol{S}(\mathbb{K}[X])\qquad\text{avec}\qquad \begin{aligned}\forall p\in[\![1,N[\![,\ \alpha_p &:= u_p-u_{p+1}\\ \alpha_N &:= u_N\end{aligned}$$

Alors par linéarité de $\boldsymbol{S}$ et de la limite,

$$\boldsymbol{s}_n = \sum_{p=1}^{N}\alpha_p\,\boldsymbol{S}(R_{n,p}) \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_\infty} \sum_{p=1}^{N}\alpha_p\,\mathbb{1}_{[\![1,p]\!]} = \boldsymbol{u}$$

En effet, $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{s}_n\right)_k = \sum_{p=1}^{N} \alpha_p \left(\mathbb{1}_{[\![1,p]\!]}\right)_k = \sum_{p=1}^{N} \alpha_p \begin{cases} 1 \text{ si } k \leqslant p \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} = \sum_{p=k}^{N} \alpha_p$$
$$= \underbrace{\sum_{p=k}^{N-1} (u_p - u_{p+1})}_{\substack{\text{(télescope)} \\ = u_k - u_N}} + u_N = u_k$$

Ou encore, puisque $T := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}_N^N$ est inversible ($\det T = 1$ car matrice triangulaire), il existe un vecteur $(\alpha_p)_{p=1}^N \in \mathbb{K}^N$ tel que $\forall k \in [\![1, N]\!]$, $\sum_{p=1}^{N} \alpha_p \left(\mathbb{1}_{[\![1,p]\!]}\right)_k = \sum_{p=1}^{N} \alpha_p T_{k,p} = \left(T \cdot (\alpha_p)_{p=1}^N\right)_k = u_k$

Ainsi, $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}^*}_{\text{ksupp}}$, $\exists (\boldsymbol{s}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \boldsymbol{S}(\mathbb{K}[X]) \,:\, \boldsymbol{s}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_\infty} \boldsymbol{u}$. Donc $\boxed{\mathbb{K}^{\mathbb{N}}_{\text{ksupp}} \subset \operatorname{Adh}_{\|\cdot\|_\infty}\left(\boldsymbol{S}(\mathbb{K}[X])\right)}$.

Enfin, soit $\boldsymbol{c} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}_{\text{cv}}$ une suite convergente vers $\ell = \lim \boldsymbol{c}$.

Posons $\boldsymbol{\ell} := (\ell)_{k\in\mathbb{N}}$. Alors $\boldsymbol{c}_0 := \boldsymbol{c} - \boldsymbol{\ell} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}_{\text{cv}(0)}$.

Or $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}_{\text{ksupp}}$ est dense dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}_{\text{cv}(0)}$ pour $\|\cdot\|_\infty$, donc $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}_{\text{cv}(0)} = \overline{\mathbb{K}^{\mathbb{N}}_{\text{ksupp}}} \subset \overline{\boldsymbol{S}(\mathbb{K}[X])}$. Donc $\boldsymbol{c}_0 \in \overline{\boldsymbol{S}(\mathbb{K}[X])}$.

Maintenant, $\boldsymbol{\ell} \in \overline{\boldsymbol{S}(\mathbb{K}[X])}$ car $\boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{S}(\ell \cdot 1_{\mathbb{K}[X]})$ est l'image d'un polynôme constant.

$\boldsymbol{S}(\mathbb{K}[X])$ étant un espace vectoriel, son adhérence $\overline{\boldsymbol{S}(\mathbb{K}[X])}$ est aussi un espace vectoriel.

Donc $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}_0 + \boldsymbol{\ell} \in \overline{\boldsymbol{S}(\mathbb{K}[X])}$. Ainsi, $\overline{\boldsymbol{S}(\mathbb{K}[X])} = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}_{\text{cv}}$:

$$\boxed{\boldsymbol{S}(\mathbb{K}[X]) = \left\{\left(P({}^1\!/_k)\right)_{k\in\mathbb{N}^*} \,:\, P \in \mathbb{K}[X]\right\} \quad \text{est dense dans} \quad \left(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}_{\text{cv}}, \|\cdot\|_\infty\right)}$$