Résolution d'équations différentielles

Séparation de variables de $\dot{x} = t\, e^{t^2 - x}$

$$(\mathcal{E}) \quad \dot{x} = f(\cdot, x) \qquad \text{avec} \qquad f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (t, \mathrm{x}) \longmapsto t\, \mathrm{e}^{t^2 - \mathrm{x}}$$

$f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ donc f satisfait les hypothèses de Cauchy-Lipschitz. Soit $(t_0, \mathrm{x}_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $x : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une solution maximale de $(\mathcal{E})$ de condition initiale $x(t_0) = \mathrm{x}_0$. Alors $\forall t \in I,\ \dot{x}(t) = t\, \mathrm{e}^{t^2 - x(t)}$ donc

$$\dot{x}(t)\, \mathrm{e}^{x(t)} = t\, \mathrm{e}^{t^2}$$

Donc en intégrant entre t_0 et $t \in I$ (car I intervalle), on a

$$\begin{array}{ccccc} & & \displaystyle\int_{t_0}^{t} \dot{x}(s)\, \mathrm{e}^{x(s)}\, \mathrm{d}s & = & \displaystyle\int_{t_0}^{t} s\, \mathrm{e}^{s^2}\, \mathrm{d}s & & \\ & & \| & & \| & & \\ \mathrm{e}^{x(t)} - \mathrm{e}^{\mathrm{x}_0} & = & \Big[\mathrm{e}^{x(s)}\Big]_{s=t_0}^{t} & & \Big[\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{s^2}\Big]_{s=t_0}^{t} & = & \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{t^2} - \mathrm{e}^{t_0^2}\right) \end{array}$$

donc

$$\mathrm{e}^{x(t)} \;=\; \mathrm{e}^{\mathrm{x}_0} + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{t^2} - \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{t_0^2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^{x(t)} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{e}^{t^2} > a_0 := \mathrm{e}^{t_0^2} - 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{x}_0}$$

Donc $\forall t \in I$, vérifiant nécessairement $\mathrm{e}^{t^2} > a_0$ puisque $\mathrm{e}^{x(t)}$ est strictement positif, on a

$$x(t) = \ln\!\Big(\tfrac{1}{2}\,(e^{t^2} - a_0)\Big) = \ln(e^{t^2} - a_0) - \ln 2$$

On a alors deux cas suivant que la solution explose ou non en temps fini :

- **cas $a_0 < 1$** : alors $\mathrm{e}^{t^2} > a_0$ est vrai $\forall t \in \mathbb{R}$, et alors on vérifie que

  $$\begin{array}{rccl} x_? : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \ln(e^{t^2} - a_0) - \ln 2 \end{array}$$

  est une solution (maximale car globale) : $\forall t \in \mathbb{R}$,

  $$t\, \mathrm{e}^{t^2 - x_?(t)} \;=\; t\, \mathrm{e}^{t^2 - \ln(e^{t^2} - a_0) + \ln 2} \;=\; t \cdot \mathrm{e}^{t^2} \cdot \frac{1}{\mathrm{e}^{t^2} - a_0} \cdot 2 \;=\; 2\,t\, \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{\mathrm{e}^{t^2} - a_0} \;=\; \partial_t \ln(e^{t^2} - a_0) \;=\; \dot{x}_?(t)$$

  vérifiant $x_?(t_0) = \ln(2\,\mathrm{e}^{\mathrm{x}_0}) - \ln 2 = \mathrm{x}_0 = x(t_0)$, donc par unicité au problème de Cauchy, $x = x_?$.

- **cas $a_0 \geqslant 1$** : alors $\mathrm{e}^{t^2} > a_0 \implies |t| > \sqrt{\ln a_0}$, donc nécessairement $I \subset {}^{\complement}\big]-\sqrt{\ln a_0}, +\sqrt{\ln a_0}\big[$.

  - si $t_0 > 0$, on vérifie que

    $$\begin{array}{rccl} x_? : & \big]+\sqrt{\ln a_0}, +\infty\big[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \ln(e^{t^2} - a_0) - \ln 2 \end{array}$$

    est une solution (même calcul) vérifiant la condition initiale $x_?(t_0) = \mathrm{x}_0 = x(t_0)$, et maximale car maximale à gauche (on ne peut prolonger après $\sqrt{\ln a_0}$ car $x_? \xrightarrow[\sqrt{\ln a_0}^+]{} \lim\limits_{0^+} \ln = -\infty$), donc par unicité au problème de Cauchy, $x = x_?$.

  - si $t_0 < 0$, on a la même chose avec

    $$\begin{array}{rccl} x_? : & \big]-\infty, -\sqrt{\ln a_0}\big[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \ln(e^{t^2} - a_0) - \ln 2 \end{array}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est (avec description injective car $\forall a_0, a_1 \in \mathbb{R},\ a_0 \neq a_1 \implies x_{a_0} \neq x_{a_1}$) :

$$\mathcal{S}_{(\mathcal{E})} = \left\{ x_{a_0}\big|_{]+\sqrt{\ln a_0}, +\infty[} \ : a_0 \in [1, +\infty[\right\} \cup \left\{ x_{a_0}\big|_{]-\infty, -\sqrt{\ln a_0}[} \ : a_0 \in [1, +\infty[\right\} \cup \left\{ x_{a_0} \ : a_0 \in]-\infty, 1[\right\}$$

avec $\boxed{\begin{array}{rcl} x_{a_0} : I_{a_0} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \ln(e^{t^2} - a_0) - \ln 2 \end{array}}$ avec $I_{a_0} = \begin{cases} \complement]-\sqrt{\ln a_0}, +\sqrt{\ln a_0}[& \text{si } a_0 \in [1, +\infty[\\ \mathbb{R} & \text{si } a_0 \in]-\infty, 1[\end{cases}$

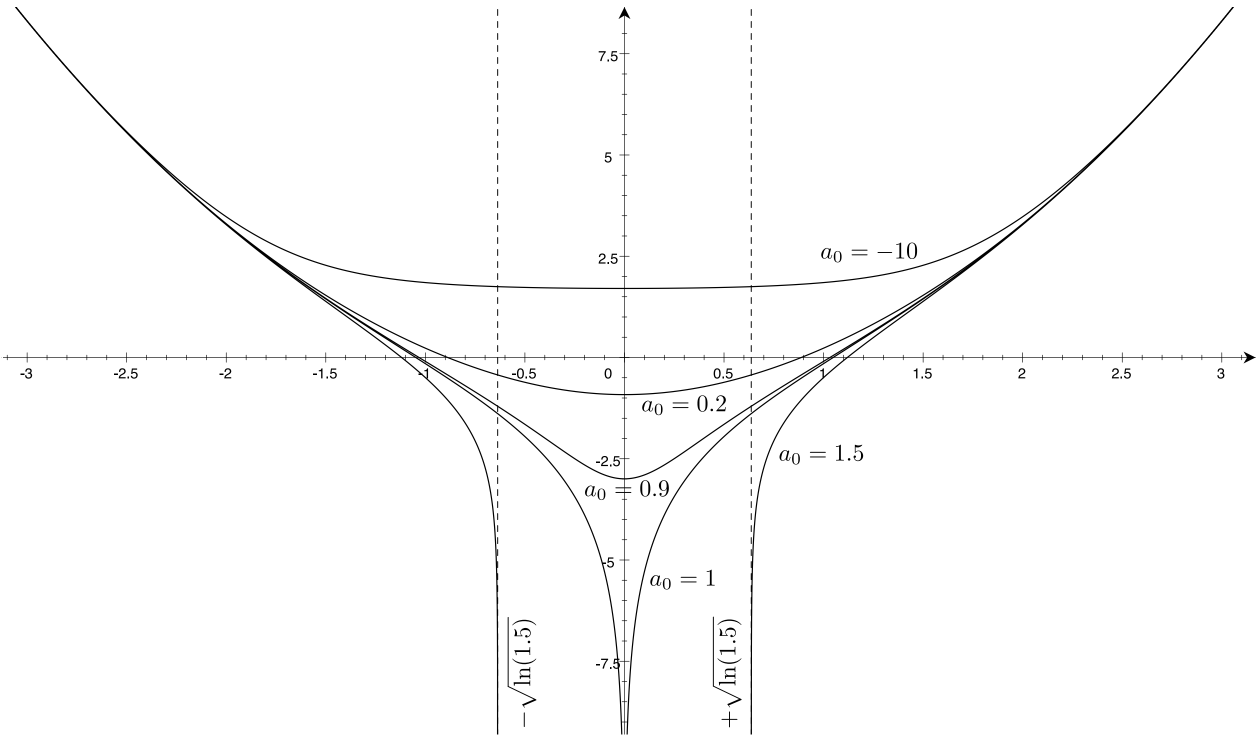

Figure 1. Quelques solutions maximales x_{a_0} de $\dot{x} = t\, e^{t^2 - x}$

Équation autonome $\dot{x} = -x^{1/p}$ (du seau troué, sans unicité)

1. Dérivation

On prend un liquide incompressible à viscosité négligeable de densité ρ dans un conteneur de section horizontale A_1, qui est la section de la surface libre du liquide, et s'écoulant à travers un trou de section A_2, à une vitesse v_2 supposée uniforme. On note h la hauteur du liquide, et on suppose que le liquide s'écoule suffisamment lentement pour que la surface libre soit horizontale et ait une vitesse v_1.

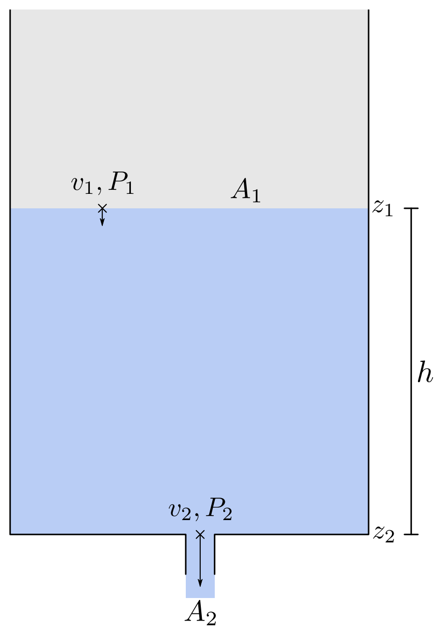

Figure 2. Seau troué.

L'*équation de Bernoulli* (conservation de l'énergie le long d'un filet de courant, ici d'un point de la surface au trou, pour un fluide parfait incompressible) donne :

$$P_1 + \tfrac{1}{2}\, \rho\, v_1^2 + \rho\, g\, z_1 \ = \ P_2 + \tfrac{1}{2}\, \rho\, v_2^2 + \rho\, g\, z_2$$

Puisque sous le trou, la surface est libre, $P_2 = P_{\text{atm}} = P_1$. Donc

$$\tfrac{1}{2}\, \rho\, v_1^2 + \rho\, g\, h \ = \ \tfrac{1}{2}\, \rho\, v_2^2 \quad \text{donc} \quad v_1^2 + 2\, g\, h = v_2^2$$

De plus, la *conservation du volume* (éq. de continuité) donne

$$A_1\, v_1 = A_2\, v_2$$

En injectant dans l'équation de Bernoulli, on a la formule de Torricelli :

$$v_1^2 + 2\,g\,h = \left(\tfrac{A_1}{A_2}\right)^2 v_1^2 \quad \text{donc} \quad v_1^2 = 4\,q^2\,h \quad \text{avec} \quad q^2 := \frac{g}{2}\left(\left(\tfrac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1\right)^{-1}$$

Donc $v_1 = 2\,q\,\sqrt{h}$. De plus, par définition $v_1 = \dot{h}$ donc $h(t)$ satisfait l'équation différentielle

$$\boxed{\dot{h} = -2\,q\,\sqrt{h}}$$

2. Résolution par séparation des variables à la main

$$(\mathcal{E}) \quad \dot{x} = f(x) \qquad \text{avec} \qquad f : \mathbb{R}_+ \ni \mathrm{x} \longmapsto -\mathrm{x}^{1/p} \quad \text{avec} \quad p \in]1, \infty[$$

f n'est pas lipschitzienne donc ne vérifie pas les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz. On ne peut donc pas assurer l'unicité des solutions aux problèmes de Cauchy.

On remarque que la constante égale à 0 est solution, ainsi que ses restrictions. Cherchons des solutions non triviales.

Soit $t_0 \in \mathbb{R}$, et $\mathrm{x}_0 > 0$. Soit $x : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une solution de $(\mathcal{E})$ telle que $x(t_0) = \mathrm{x}_0$. On se place sur $I' \subset I$ intervalle ouvert *maximal* sur lequel la solution est strictement positive (voir fig. 3) :

$$I' = \max_{\subset} \left\{]a, b[\subset I : \forall t \in]a, b[,\ x(t) > 0 \right\}$$

Cet intervalle est non vide par continuité de x (car $x \in \mathcal{C}^1(I)$ car $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+)$) : pour un $\varepsilon = \frac{\mathrm{x}_0}{2}$, il existe un voisinage V de t_0 tel que $\forall t \in V$, $|x(t) - x(t_0)| = |x(t) - \mathrm{x}_0| < \frac{\mathrm{x}_0}{2}$, donc $x(t) > \frac{\mathrm{x}_0}{2} > 0$, donc $V \subset I'$.

Alors $\forall t \in I'$, $\dot{x}(t) = -x(t)^{1/p} \neq 0$ donc

$$\frac{\dot{x}(t)}{x(t)^{1/p}} = \dot{x}(t)\,x(t)^{-1/p} = -1$$

Donc en intégrant entre t_0 et $t \in I'$ (car I' intervalle), on a

$$\begin{array}{ccccc} & & \displaystyle\int_{t_0}^{t} \dot{x}(s)\,x(s)^{-1/p}\,\mathrm{d}s & = & \displaystyle\int_{t_0}^{t} -1\,\mathrm{d}s \\ & & \| & & \| \\ q\left(x(t)^{1/q} - \mathrm{x}_0^{1/q}\right) & = & \left[\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} x(s)^{1-1/p}\right]_{s=t_0}^{t} & & \left[-s\right]_{s=t_0}^{t} \; = \; t_0 - t \end{array}$$

avec $1/q := 1 - 1/p$, c'est à dire $q = \frac{p}{p-1}$. Donc

$$\forall t \in I', \quad x(t)^{1/q} = \frac{1}{q}(t_0 - t) + \mathrm{x}_0^{1/q} \quad \text{donc} \quad x(t) = \left(\frac{1}{q}(t_0 - t) + \mathrm{x}_0^{1/q}\right)^q \tag{1}$$

$\forall t \in I'$, $x(t)^{1/q} > 0$ donc $\frac{1}{q}(t_0 - t) + \mathrm{x}_0^{1/q} > 0$ donc $t < t_0 + q\,\mathrm{x}_0^{1/q}$. Ainsi, $I' \subset \left]-\infty, t_0 + q\,\mathrm{x}_0^{1/q}\right[$.

→ Si $\inf I' > \inf I$, alors par définition et maximalité de I', on a nécessairement $x(\inf I') = 0$. C'est impossible car $\forall t \in]\inf I, t_0[$, $x(t) \geqslant x(t_0) = \mathrm{x}_0 > 0$ par décroissance de x (car $\dot{x}(t) = -x(t)^{1/p} < 0$) donc $\inf I' = \inf I$.

→ Si $\sup I' < \sup I$, alors de même $x(\sup I') = 0$, c'est à dire (expression (1)) $\sup I' = t_0 + q\,\mathrm{x}_0^{1/q}$.

→ Ainsi, $I' = I \cap \left]-\infty, t_0 + q\,\mathrm{x}_0^{1/q}\right[$ et on a l'expression (1) de x sur I'.

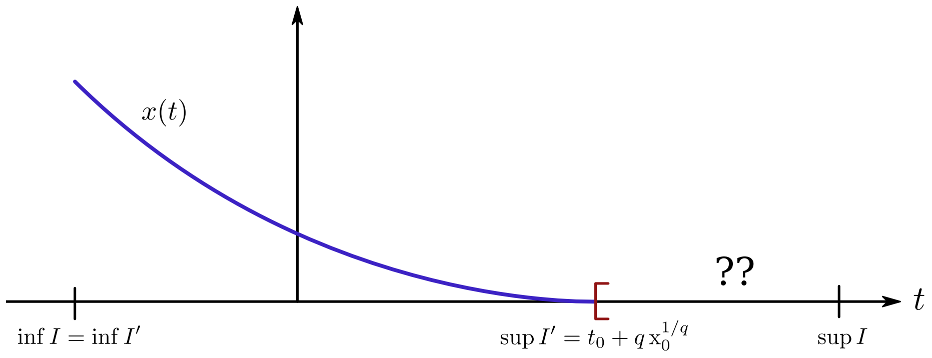

Figure 3. Quid de la valeur de x en dehors de I' ? On se doute que le seau reste vide.

Montrons que la solution n'est prolongeable que par 0. Si $\sup I < t_0 + q\,\mathrm{x}_0^{1/q}$, il n'y a rien à faire car $I = I'$.

Sinon, supposons par l'absurde que $\exists t_1 \in [\sup I', \sup I[: x(t_1) \neq 0$. Alors par décroissance de x, $\forall t \in]\inf I, t_1],\ x(t) \geqslant x(t_1) > 0$ donc en particulier, puisque $\sup I' \leqslant t_1$, la contradiction $0 = x(\sup I') > 0$ impose que :

$$\forall t \in [\sup I', \sup I[, \quad x(t) = 0$$

Finalement, on déterminé une unique expression que doit vérifier x :

$$\boxed{\begin{array}{rcll} x_? : I & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ & \\ t & \longmapsto & \left(\frac{1}{q}(t_0 - t) + \mathrm{x}_0^{1/q}\right)^q & \text{sur } I' \qquad \text{avec} \quad I' = I \cap \,]-\infty, t_0 + q\,\mathrm{x}_0^{1/q}[\quad \text{et} \quad q = \dfrac{p}{p-1} \\ t & \longmapsto & 0 & \text{sur } I \backslash I' \end{array}}$$

qui est solution de $(\mathcal{E})$ vérifiant $x_?(t_0) = \mathrm{x}_0^{1/q}$ car $\forall t$,

$$\dot{x}_?(t) = -\frac{1}{q}\,q\left(\frac{1}{q}(t_0 - t) + \mathrm{x}_0^{1/q}\right)^{q-1} = -\left(\frac{1}{q}(t_0 - t) + \mathrm{x}_0^{1/q}\right)^{\frac{1}{p-1}} = -\left(\left(\frac{1}{q}(t_0 - t) + \mathrm{x}_0^{1/q}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right)^{1/p} = -x_?(t)^{1/p}$$

On a donc bien $x_? = x$, ce qui résoud le problème de Cauchy.

Maitenant, il existe clairement une infinité de solutions maximales au problème de Cauchy $x(t_0) = 0$.

3. Résolution par séparation des variables avec Cauchy-Lipschitz

On résoud d'abord

$$(\mathcal{E}_*) \quad \dot{x} = f_*(x) \qquad \text{avec} \qquad f_* : \mathbb{R}_+^* \ni \mathrm{x} \longmapsto -\mathrm{x}^{1/p}$$

à l'aide du théorème de Cauchy-Lipschitz, puisque f_* est lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+^*$. On effectue ensuite un recollement avec une constante égale à 0 pour obtenir les solutions de $(\mathcal{E})$.

4. Solutions maximales

On peut aussi décrire l'ensemble des solutions maximales de $(\mathcal{E})$ en rendant injectif l'ensemble des solutions précédemment trouvées :

$$\boxed{\mathcal{S}_{(\mathcal{E})} = \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ t & \longmapsto & 0 \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{rcll} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ & \\ t & \longmapsto & \left(\frac{p-1}{p}(t_0 - t)\right)^{\frac{p}{p-1}} & \text{sur }]-\infty, t_0[\\ t & \longmapsto & 0 & \text{sur } [t_0, +\infty[\end{array} : t_0 \in \mathbb{R} \right\}}$$

qui ne sont que des translations les unes des autres, outre la solution triviale, ce qui était attendu pour une équation différentielle autonaume. Pour $p = 2$, ce sont de simples demi-parabole :

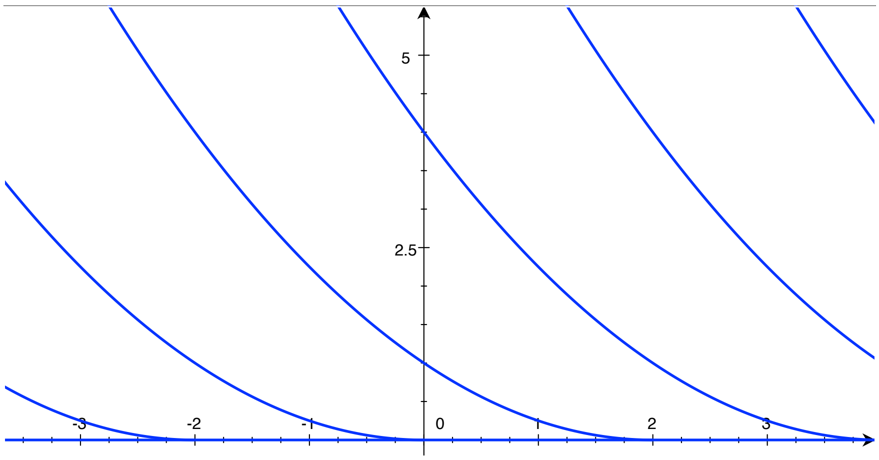

Figure 4. Quelques solutions maximales de $\dot{x} = -\sqrt{x}$

5. Résolution par la méthode classique pour les équations de Bernoulli

1. Équation autonome $\dot{x} = x^3$