Théorème de Riesz-Fischer

Complétude des espaces de Hölder L^p

$(E, \mathcal{T}, \mu)$ espace mesuré, $(F, |\cdot|)$ $\mathbb{K}$-EVN, $\int := \int_E \mathrm{d}\mu$ intégrale de Lebesgue sur F.

Pour $p \in [1, +\infty]$, $\boxed{\left(\mathrm{L}^p_\mu(E,F), +, \cdot, \|\cdot\|_{p\sim}\right) \text{ est un espace de Banach}}$.

$\mathrm{L}^p := \mathscr{L}^p /_{\mathrm{Ker}\|\cdot\|_p} = \mathscr{L}^p /_{\{f \in \mathcal{M}\,:\, f \overset{\mu\text{-pp}}{=} 0\}}$ est un $\mathbb{K}$-EV (grâce à Minkowski) muni de la norme $\|\tilde{\cdot}\|_{p\sim} = \|\cdot\|_p$ indépendante du représentant[1], et avec $\|\cdot\|_p : \mathcal{M}_\mu(E,F) \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+ : f \longmapsto \left(\int |f|^p\right)^{1/p}$

Démonstration. Pour $p \in [1, +\infty[$.

Soit $(\tilde{f}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{L}^p(E,F)^{\mathbb{N}}_{\mathrm{cauchy}_{\|\cdot\|_{p\sim}}}$ une suite de Cauchy dans $\mathrm{L}^p = \widetilde{\mathscr{L}^p}$ avec f_n représentant, comme $\|\tilde{f}_k - \tilde{f}_l\|_{p\sim} = \|f_k - f_l\|_p$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{L}^p(E,F)^{\mathbb{N}}_{\mathrm{cauchy}_{\|\cdot\|_p}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathscr{L}^p$.

Ça n'implique pas, en général, la convergence ponctuelle. Il faut accélérer la convergence.

1. Extraction d'un suite convergente $\left.f_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Montrons la convergence ponctuelle d'une série télescopique $f = f_{\varphi(0)} + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}\right)$

Suite de Cauchy : on a que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall k, l \geqslant N(\varepsilon),\ \|f_k - f_l\|_p \leqslant \varepsilon$

Soit une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \overset{>}{\hookrightarrow} \mathbb{N}$ telle que[2]

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n) \geqslant N\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

En posant $\forall n, m \in \mathbb{N}$,

$$\delta_n := f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)} \qquad \text{et} \qquad S_m := \sum_{n=0}^{m} |\delta_n| \in \mathcal{M}(E, \bar{\mathbb{R}}_+)$$

la majoration de la somme partielle de $\sum_n \delta_n$, on a par inégalité de Minkowski, $\forall m \in \mathbb{N}$,

$$\|S_m\|_p = \left\|\sum_{n=0}^{m} |\delta_n|\right\|_p \leqslant \sum_{n=0}^{m} \|\delta_n\|_p = \sum_{n=0}^{m} \underbrace{\left\|f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}\right\|_p}_{\substack{\leqslant 2^{-n} \text{ car} \\ \varphi(n+1), \varphi(n) \geqslant N(2^{-n})}} \leqslant \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{2^n} = 2$$

$(S_m)_{m\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}(E, \bar{\mathbb{R}}_+)^{\mathbb{N}}_{\nearrow}$ suite croissante de fonctions positives, alors par convergence monotone

$$\left\|\lim_{m\to\infty} S_m\right\|_p^p = \int \left(\lim_{m\to\infty} S_m\right)^p \overset{\text{conv.}}{\underset{\text{monot.}}{=}} \lim_{m\to\infty} \int (S_m)^p = \lim_{m\to\infty} \underbrace{\|S_m\|_p^p}_{\leqslant 2^p} \leqslant 2^p < +\infty \tag{1}$$

Donc $\lim_{m\to\infty} S_m \overset{\mu\text{-pp-}E}{<} +\infty$ presque-partout. Soit $\mathcal{N} \subset E$ ensemble négligeable tel que $\forall x \in E \backslash \mathcal{N}$, on ait $\lim_{m\to\infty} S_m(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left|\delta_n(x)\right| < +\infty$ absolue convergence donc *convergence* dans $(F, |\cdot|)$, et alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \delta_n(x) = \lim_{m\to\infty} \underbrace{\sum_{n=0}^{m-1} \left(f_{\varphi(n+1)}(x) - f_{\varphi(n)}(x)\right)}_{(\text{télescope})\ = f_{\varphi(m)}(x) - f_{\varphi(0)}(x)} = \lim_{m\to\infty} f_{\varphi(m)}(x) - f_{\varphi(0)}(x)$$

Posons alors $f \in \mathcal{M}(E,F)$ mesurable[3] telle que $\forall x \in E \backslash \mathcal{N}$, $\boxed{f(x) = \lim_{m\to\infty} f_{\varphi(m)}(x)}$ bien définie.

---

1. Avec $\tilde{\cdot} : \mathscr{L}^p \longrightarrow \mathrm{L}^p : f \longmapsto \left\{g \in \mathcal{M} : f \overset{\mu\text{-pp}}{=} g\right\}$ la projection canonique, $\tilde{f} = \tilde{g} \Rightarrow f \overset{\mu\text{-pp}}{=} g \Rightarrow \int |f| = \int |g|$
2. Par exemple $\varphi(k) := \max\left(\varphi(k-1) + 1, N(2^{-k})\right)$ par récurrence.
3. Puisque $\tilde{f} : E \backslash \mathcal{N} \longrightarrow F : x \longmapsto \lim_{m\to\infty} f_{\varphi(m)}(x)$ mesurable, on a f encore mesurable avec, par exemple, $f|_{\mathcal{N}} := 0$

2. f est $\mathscr{L}^p$-intégrable

$\forall x \in E \backslash \mathcal{N}$, c'est à dire presque-partout, on a par passage à la limite de l'inégalité triangulaire,

$$\left|f - f_{\varphi(0)}\right|(x) = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} \delta_n(x)\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \left|\delta_n(x)\right| = \lim_{m\to\infty} S_m(x)$$

Donc par monotonie de l'intégrale et par croissance de $x \longmapsto x^p$, et en utilisant (1),

$$\left\|f - f_{\varphi(0)}\right\|_p^p = \int \left|f - f_{\varphi(0)}\right|^p \leqslant \int \left(\lim_{m\to\infty} S_m\right)^p = \left\|\lim_{m\to\infty} S_m\right\|_p^p < +\infty$$

Donc $\|f\|_p \leqslant \|f - f_{\varphi(0)}\|_p + \|f_{\varphi(0)}\|_p < +\infty$ (Minkowski et $f_{\varphi(0)} \in \mathscr{L}^p$) donc $\boxed{f \in \mathscr{L}^p(E, F)}$.

3. La suite de Cauchy converge vers f pour $\|\cdot\|_p$ Soit $\varepsilon > 0$.

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de Cauchy donc $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall k, l \geqslant N_\varepsilon,\ \|f_k - f_l\|_p \leqslant \varepsilon$. Alors, $\forall n \geqslant N_\varepsilon$,

$$\begin{aligned}
\|f_n - f\|_p^p = \int |f_n - f|^p &= \int \lim_{m\to\infty} \left|f_n - f_{\varphi(m)}\right|^p && \text{(continuité de } x \longmapsto |\cdot - x^p|) \\
\text{(inégalité de Fatou)} &\leqslant \liminf_{m\to\infty} \int \left|f_n - f_{\varphi(m)}\right|^p \\
&= \liminf_{m\to\infty} \underbrace{\left\|f_n - f_{\varphi(m)}\right\|_p^p}_{\leqslant \varepsilon \text{ si } m \geqslant N_\varepsilon} \leqslant \varepsilon^p && \text{donc } \|f_n - f\|_p \leqslant \varepsilon
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_p} f \in \mathscr{L}^p}$.

Enfin, puisque $\|f_n - f\|_p = \|\tilde{f}_n - \tilde{f}\|_{p\sim}$, on a convergence $\tilde{f}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_{p\sim}} \tilde{f} \in \mathrm{L}^p(E, F)$. $\square$

Corollaire Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{L}^p(E, F)^{\mathbb{N}}$ convergente vers $f \in \mathscr{L}^p(E, F)$ en norme L^p :

$$\tilde{f}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_{p\sim}} \tilde{f} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$$

Alors $\exists \varphi : \mathbb{N} \overset{>}{\hookrightarrow} \mathbb{N}$ telle que la sous-suite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge ponctuellement presque-partout :

$$\forall x \overset{\mu\text{-pp}}{\in} E, \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

(Puisque toute suite convergente est de Cauchy, il suffit de reprendre l'argument de la partie 1)