Théorème de Rolle sur $\mathbb{R}^n$

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN de **dimension finie**, et $U \in \mathcal{O}(E)$ un ouvert non vide de E tel que $\bar{U}$ soit **compact**. (en dimension infinie, tout compact est d'intérieur vide)

Soit $f : \bar{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles **continue** sur tout $\bar{U}$ et **différentiable** sur U. Alors si f est constante sur la frontière de U, alors sa différentielle s'annule en un point :

$$\boxed{f|_{\partial U} = \mathrm{cste} \quad \Longrightarrow \quad \exists \vec{x} \in U : \mathrm{d}f(\vec{x}) = 0}$$

Démonstration. On se ramène au cas où $f|_{\partial U} = 0$ en remplaçant f par $f - \mathrm{cste}$. Si $f = 0$ nulle, c'est gagné. Supposons maintenant que $f \neq 0$, et même quitte à remplacer f par $-f$ que $\exists \vec{x}_0 \in U : f(\vec{x}_0) > 0$.

Puisque f est continue sur le compact $\overline{U}$, elle est bornée et atteint ses bornes, donc

$$\exists \overrightarrow{x_{\mathrm{m}}} \in \overline{U} : f(\overrightarrow{x_{\mathrm{m}}}) = \max_{\overline{U}} f \geqslant f(\vec{x}_0) > 0$$

De plus, $\overrightarrow{x_{\mathrm{m}}} \in U$ car $\notin \partial U$ car $f|_{\partial U} = 0$. Or U est un ouvert, donc par définition du maximum,

$$\exists V \in \mathrm{Vois}_E(\overrightarrow{x_{\mathrm{m}}}) \ : \ \forall \vec{x} \in V, \ \ f(\vec{x}) \leqslant f(\overrightarrow{x_{\mathrm{m}}})$$

c'est à dire que $\overrightarrow{x_{\mathrm{m}}}$ est un point de maximum local, donc un point critique : $\mathrm{d}f(\overrightarrow{x_{\mathrm{m}}}) = 0$. $\square$