Support d'une fonction

Soit $f:\Omega\longrightarrow F$. Son **support** est l'adhérence du lieu où f ne s'annule pas :

$$\boxed{\operatorname{supp}(f) \;:=\; \overline{\{x\in\Omega \,:\, f(x)\neq 0\}}}$$

Dans le cadre de la théorie de la mesure, cette définition n'est pas utile : en effet, $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ s'identifie à la fonction nulle, on s'attendrait donc à ce que $\operatorname{supp}(\mathbb{1}_{\mathbb{Q}})=\varnothing$. Pourtant, $\operatorname{supp}(\mathbb{1}_{\mathbb{Q}})=\bar{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$.

On généralise la notion de support d'une fonction mesurable $f\in\mathcal{M}(\Omega)$ comme le complémentaire du plus gros ouvert sur lequel f est nulle presque-partout :

$$\boxed{\operatorname{supp}_{\text{ess}}(f) \;:=\; \Omega\backslash\bigcup\left\{U\in\mathcal{O}(\Omega) \,:\, f|_U \overset{\text{pp}}{=} 0\right\}}$$

En effet, si f est *continue*, alors l'égalité presque-partout devient une égalité en tout point, donc

$$\begin{aligned}
\operatorname{supp}_{\text{ess}}(f) &= \Omega\backslash\bigcup\left\{U\in\mathcal{O}(\Omega) \,:\, f|_U = 0\right\}\\
&= {}^{\complement}\Big(\bigcup\left\{U\in\mathcal{O}(\Omega) \,:\, U\subset f^{\leftarrow}(\{0\})\right\}\Big)\\
\text{(intérieur = plus gros ouvert)}\quad &= {}^{\complement}\operatorname{Int}\big(f^{\leftarrow}(\{0\})\big)\\
\text{(formule du complémentaire de l'intérieur)}\quad &= \operatorname{Adh}\big({}^{\complement}f^{\leftarrow}(\{0\})\big)\\
\text{(complémentaire de l'image réciproque)}\quad &= \operatorname{Adh}\big(f^{\leftarrow}({}^{\complement}\{0\})\big) \;=\; \overline{\{x\in\Omega \,:\, f(x)\neq 0\}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall f\in\mathcal{C}^0(\Omega),\quad \operatorname{supp}_{\text{ess}}(f) = \operatorname{supp}(f)}$$

Propriété-justification : la fonction est nulle presque-partout en dehors du support :

$$\boxed{f|_Z \overset{\text{pp}}{=} 0 \quad \text{sur} \quad Z:=\Omega\backslash\operatorname{supp}_{\text{ess}}(f)}$$

Démonstration. Posons $\mathcal{U}:=\left\{U\in\mathcal{O}(\Omega) \,:\, f|_U \overset{\text{pp}}{=} 0\right\}$ et, par définition, $\forall U\in\mathcal{U}$, posons

$$N_U\subset U \text{ négligeable} \quad : \quad \forall x\in U\backslash N_U,\ f(x)=0$$

$\mathcal{U}$ n'étant pas dénombrable, on ne peut conclure directement que l'union des N_U (là où f n'est pas nulle) est négligeable. Raisonnons alors par exhaustion : $\forall n\in\mathbb{N}$, posons les parties compactes

$$K_n:=\left\{x\in Z \,:\, \operatorname{dist}(x,\Omega\backslash U)\geqslant {}^1\!/_n\right\}\cap B^{\mathsf{f}}(0,n)$$

c'est à dire tous les points du plus gros ouvert sur lequel f est nulle presque-partout, situés à une distance $\geqslant {}^1\!/_n$ de son extérieur, et bornés par n. Les K_n remplissent cet ouvert quand $n\to\infty$:

$$Z \;=\; \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$$

Soit $n\in\mathbb{N}$. En particulier, $\mathcal{U}$ est un recouvrement $\bigcup\mathcal{U}\supset K_n$ du compact K_n, donc par la propriété de Borel-Lebesgue, on peut en extraire un recouvrement fini $\mathcal{U}_n\subset\mathcal{U}$:

$$K_n \;\subset\; \bigcup_{\text{finie}}\mathcal{U}_n \qquad \text{d'où} \qquad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n \;\subset\; \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\ \bigcup_{U\in\mathcal{U}_n} U \;\subset\; \bigcup\mathcal{U} \;=\; Z$$

Alors, si l'on pose l'ensemble dénombrable $\mathcal{U}' := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_n$, on obtient la réunion dénombrable

$$Z \;=\; \bigcup_{U\in\mathcal{U}'} U$$

Or $\forall U \in \mathcal{U}',\ f|_{U\setminus N_U} = 0$, donc si l'on pose l'union *dénombrable* de ces parties négligeable

$$N \;:=\; \bigcup_{U\in\mathcal{U}'} N_U$$

qui est encore **négligeable** par sous-additivité dénombrable, on a bien $f|_{Z\setminus N} = 0$ puisque

$$Z\setminus N \;\subset\; \bigcup_{U\in\mathcal{U}'} U\setminus N_U$$

car $\forall x \in Z\setminus N$, $\exists U_0 \in \mathcal{U} : x \in U_0$, et $x \notin N = \bigcup_U N_U$ donc $x \notin N_{U_0}$ donc $x \in U_0\setminus N_{U_0} \subset \bigcup_U U\setminus N_U$. $\square$