

Espaces topologiques	Espaces métriques	Espaces vectoriels normés
<p>$\mathcal{O} \subset \wp(E)$ topologie de $E \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$</p> <ul style="list-style-type: none"> $E, \emptyset \subset \mathcal{O}$ $\text{IFO} : \forall (U_i)_{i \in I} \in \mathcal{O}^n, \bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{O}$ $\text{UQO} : \forall (U_i)_{i \in \mathbb{I}} \in \mathcal{O}^{\mathbb{I}}, \bigcup_{i \in \mathbb{I}} U_i \in \mathcal{O}$ <p>\mathcal{O}' plus fine que $\mathcal{O} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$ moins fine que $\mathcal{O} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$</p> <p>Une intersection de topologies et encore une topologie</p> <p>Topologie engendrée par $\mathcal{A} \subset \wp(E) :$ $\mathcal{O}(\mathcal{A}) := \bigcap \{ \mathcal{O} \text{ topologie sur } E : \mathcal{A} \subset \mathcal{O} \}$ (topologie la moins fine sur E contenant \mathcal{A} ; plus petit élément de l'intersection)</p> <p>$\mathcal{B} \subset \wp(E)$ base de topologie sur $E \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$</p> <ul style="list-style-type: none"> $\bigcup \mathcal{B} = E$ $\forall X, Y \in \mathcal{B}, \exists \mathcal{A} \subset \mathcal{B} : X \cap Y = \bigcup \mathcal{A}$ (l'intersection de 2 elems de \mathcal{B} est la réunion d'elems de \mathcal{B}) <p>\mathcal{B} est une base de topologie pour une topologie $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ si elle l'engendre : $\mathcal{O}_{\mathcal{B}} = \mathcal{O}(\mathcal{B})$. Alors :</p> <p>$U \in \mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ (ouvert) $\Leftrightarrow \exists (U_i)_{i \in I} \in \mathcal{B}^I : U = \bigcup_{i \in I} U_i$ $\Leftrightarrow \forall x \in U, \exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subset U$</p> <p>Un espace topologique (E, \mathcal{O}) est à base dénombrable si $\exists \mathcal{B}$ base dénombrable d'ouverts engendrant \mathcal{O}.</p> <p>\mathcal{O}_E base de topologie sur E pour \mathcal{O}_E. En général, \mathcal{B} engendrant $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ non unique.</p>	<p>$E \neq \emptyset$ ensemble de points. $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ distance sur $E \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$</p> <ul style="list-style-type: none"> $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (vraie distance) $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire) <p>Les 3 axiomes impliquent que $d(x, y) \in \mathbb{R}^+$</p> <p>Inégalité triangulaire : $d(x, y) - d(y, z) \leq d(x, z)$</p> <p>Boule ouverte : $B_d(a, r) := \{x \in E : d(x, a) < r\}$ Boule fermée : $B'_d(a, r) := \{x \in E : d(x, a) \leq r\}$ Sphère : $S_d(a, r) := \{x \in E : d(x, a) = r\}$ de centres $a \in E$ et de rayon $r \in \mathbb{R}^+$</p> <p>Topologie naturelle de l'espace métrique $(E, d) :$ topologie \mathcal{O}_d engendrée par les boules ouvertes $\Leftrightarrow \mathcal{B}_{\mathcal{O}} := \{B_d(x, r) : x \in E, r \in \mathbb{R}^+\}$ base de topologie</p> <p>(E, \mathcal{O}_E) métrisable $\Leftrightarrow \exists d$ distance : $\mathcal{O}_E = \mathcal{O}(\mathcal{B}_{\mathcal{O}}^d)$ (pas unique : λd engendre la même topologie)</p> <p>d_1 et d_2 topologiquement équivalentes (rel. d'équiv.) $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ engendrent la même topologie : $\mathcal{O}(\mathcal{B}_{\mathcal{O}}^{d_1}) = \mathcal{O}(\mathcal{B}_{\mathcal{O}}^{d_2})$ $\Leftrightarrow \forall x \in E, \forall r > 0, \exists r_1, r_2 > 0 : \begin{cases} B_{d_1}(x, r_1) \subset B_{d_2}(x, r) \\ B_{d_2}(x, r_2) \subset B_{d_1}(x, r) \end{cases}$</p> <p>$d_1$ et d_2 distances Lipschitz-équivalentes si $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^* : \alpha d_1(\cdot, \cdot) \leq d_2(\cdot, \cdot) \leq \beta d_1(\cdot, \cdot)$ $\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}_+^* : C^{-1} d_1(\cdot, \cdot) \leq d_2(\cdot, \cdot) \leq C d_1(\cdot, \cdot)$ $\Rightarrow d_1$ et d_2 topologiquement équivalentes \Leftrightarrow</p> <p>(ex: $d_b(\cdot, \cdot) := \min(1, d(\cdot, \cdot))$ distance bornée, topologiquement équivalente avec d, mais pas équivalente si d non bornée)</p> <p>$\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* : d_1(\cdot, \cdot) \leq \alpha d_2(\cdot, \cdot) \Rightarrow \mathcal{O}_{d_2}$ plus fine que \mathcal{O}_{d_1}</p>	<p>E un \mathbb{K}-espace vectoriel, (\mathbb{K}, \cdot) corps valué $\ \cdot\ : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ norme sur $E \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$</p> <ul style="list-style-type: none"> $\ x\ = 0 \Rightarrow x = 0_E$ $\ \lambda \cdot x\ = \lambda \cdot \ x\$ $\ x + y\ \leq \ x\ + \ y\$ (inégalité de Minkowski) (applicat° homogène minkowskienne définie positive) <p>Inégalité triangulaire : $\ x\ - \ y\ \leq \ x - y\$</p> <p>Distance naturelle engendrée par $\ \cdot\ :$ $d_{\ \cdot\ }(x, y) := \ x - y\$ Elle est invariante par translation et telle que $d(\lambda x, \lambda y) = \lambda d(y, x)$</p> <p>$\ \cdot\ _1$ et $\ \cdot\ _2$ normes équivalentes si $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^* : \alpha \ \cdot\ _1 \leq \ \cdot\ _2 \leq \beta \ \cdot\ _1$ (pour monter la non équivalence, on exhibe une suite telle que $\ x_n\ _1 / \ x_n\ _2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$)</p> <p>$\ \cdot\ _1$ et $\ \cdot\ _2$ normes équivalentes $\Leftrightarrow \ \cdot\ _1$ et $\ \cdot\ _2$ topologiquement équivalentes</p> <p>En dimension finie et si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}, toutes les normes sont équivalentes</p> <p>Espace préhilbertien réel $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle) :$ $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ produit scalaire $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$</p> <ul style="list-style-type: none"> $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bilinéaire ($\Leftrightarrow \langle x, \cdot \rangle \in \text{Lin}(E)$ par sym.) $\langle x, x \rangle \geq 0$ et $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0_E$ (forme bilinéaire symétrique définie positive) <p>Inég. de Cauchy-Schwarz : $\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$ $\langle x, y \rangle \leq \ x\ \cdot \ y\$</p> <p>Norme euclidienne : $\ x\ = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ Minkowski : $\ x + y\ ^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle$ (Cauchy-Schwarz) $\leq \ x\ ^2 + 2\ x\ \cdot \ y\ + \ y\ ^2 = (\ x\ + \ y\)^2$</p> <p>Distance à F sous-EV de E de dimension finie : $d(x, F) = \ x - \pi_F(x)\$ (et $d(x, F)^2 = \ x\ ^2 - \ \pi_F(x)\ ^2$) (est un minimum, atteint uniuq' en la proj. orthogonale π_F)</p> <p>$\ \cdot\$ est 1-lipschitzienne (inégalité triangulaire) $(x, y) \mapsto x + y$ est 2-lipschitzienne $(\lambda, y) \mapsto \lambda \cdot y$ est continue (pour les topo produit de $E \times E$ et $\mathbb{K} \times E$)</p>
<p>Topologie grossière : $\mathcal{O} = \{E, \emptyset\}$ (moins fine possible)</p> <p>Topologie discrète : $\mathcal{O} = \wp(E)$ (plus fine possible; séparée) Toute partie y est à la fois fermée et ouverte Toute fonction $E \rightarrow F$ est continue Compact $\Leftrightarrow E$ fini Connexe $\Leftrightarrow E = \{x\}$ ou \emptyset Distance discrète : $d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$</p> <p>$A \subset E$ est une partie discrète si $\mathcal{O} _A$ est la topo. discrète $\Leftrightarrow A = \text{Isol}_{\mathcal{O}_E}(A)$ (tout point est isolé) $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ partie discrète de \mathbb{R}</p>	<p>Diamètre d'une partie $X \subset E$ non vide : $\text{diam}(X) := \sup_{x, y \in X} d(x, y)$ $A \subset X$ est dite bornée si $\text{diam}(X) < +\infty$ $\Leftrightarrow d$ majorée sur $A \times A$ $\Leftrightarrow \exists x \in X, r > 0 : A \subset B_d(x, r)$</p> <p>Distance d'un point $x \in E$ à une partie $X \subset E$ non vide : $\text{dist}(x, X) := \inf_{y \in X} d(x, y)$</p> <p>Distance entre deux parties $X, Y \subset E$ non vides : $\text{dist}(X, Y) := \inf_{x \in X, y \in Y} d(x, y)$</p> <p>$x \mapsto d(x, a)$ et $x \mapsto d(x, A)$ 1-lipschitziennes donc continues</p>	

$(\mathbb{R}, +, \cdot, \geq)$ corps commutatif *totale*ment ordonné
 \rightarrow permet de définir $\max(x, y), |x| := \max(x, -x)$, et ainsi $d_u(x, y) = |x - y|$
Topologie de l'ordre, Topologie usuelle \mathcal{O}_u de \mathbb{R}

Toute partie non vide majorée/minorée de \mathbb{R} possède une borne sup/inf

$a = \inf X \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in X, a \leq x \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in X : a + \varepsilon > x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in X, a \leq x \text{ (minorant)} \\ \exists (x_n) \in X^{\mathbb{N}} : x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \end{cases}$
 $\Leftrightarrow a = \max \underbrace{\mathfrak{Min}(X)}_{\text{existe dans } \mathbb{R}}$ avec $\mathfrak{Min}(X) = \{a \in \mathbb{R} : \forall x \in X, a \leq x\}$ minorants de X

$b = \sup X \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in X, x \geq b \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in X : b - \varepsilon < x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in X, b \leq x \text{ (minorant)} \\ \exists (x_n) \in X^{\mathbb{N}} : x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b \end{cases}$
 $\Leftrightarrow b = \min \underbrace{\mathfrak{Maj}(X)}_{\text{existe dans } \mathbb{R}}$ avec $\mathfrak{Maj}(X) = \{b \in \mathbb{R} : \forall x \in X, x \geq b\}$ majorants de X

Intervalles de $\mathbb{R} : I \subset \mathbb{R}$ intervalle $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} I$ convexe $\Leftrightarrow \forall a, b \in I : a \leq b, [a, b] \subset I$
(avec le segment $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} = \{(1-t)a + tb : t \in [0, 1]\}$)
 $\Leftrightarrow I \in \left\{ \left\{ x \in \mathbb{R} : a \left\{ \begin{matrix} \leq \\ < \end{matrix} \right\} x \left\{ \begin{matrix} \leq \\ < \end{matrix} \right\} b \right\} : a, b \in \bar{\mathbb{R}} \right\} \setminus \{\mathbb{R}\}$ (\mathbb{R} et \emptyset inclus)

G sous-groupe $\neq \{0\}$ de $(\mathbb{R}, +)$, $a := \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$
 $\rightarrow a = 0 \Rightarrow \bar{G} = \mathbb{R}$ **dense** $\Rightarrow G$ non fermé
 $\rightarrow a \neq 0 \Rightarrow G = a\mathbb{Z}$ **discret** $\Rightarrow G$ fermé
 $\rightarrow \alpha\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z}$ fermé $\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$ rapport *rationnel*
 $\rightarrow {}^c\mathbb{Q}$ irrationnels denses dans \mathbb{R} (avec $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$)

Norme sup $\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_{\infty} := \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$ sur $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ℓ^{∞} : Homogénéité :

$$\|\lambda \cdot (x_n)_n\|_{\infty} = \sup_n |\lambda x_n| = |\lambda| \sup_n |x_n| = |\lambda| \cdot \|(x_n)_n\|_{\infty}$$

car $\forall n, |\lambda x_n| = |\lambda| |x_n| \leq |\lambda| \sup_n |x_n|$
donc $\sup_n |\lambda x_n| \leq |\lambda| \sup_n |x_n|$
et en posant $\lambda' = 1/\lambda$ et $x'_n = \lambda x_n$, avec ci-dessus,
 $\sup_n |\lambda' x'_n| \leq |\lambda'| \sup_n |x'_n| = \frac{1}{|\lambda|} \sup_n |\lambda x_n|$
donc $|\lambda| \sup_n |x_n| \leq \sup_n |\lambda x_n|$

Espace $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ℓ^2 muni de $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} \bar{u}_n v_n$, bien défini car
 $0 \leq |a - b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|ab|$ donc $\sum_n |u_n v_n| \leq \frac{1}{2} (\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2) < +\infty$
donc $\sum_n \bar{u}_n v_n$ ACV donc CV et $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ fini

et $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ℓ^2 bien un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ car
 $\left\{ \begin{array}{l} \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2\Re(\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle) < +\infty \text{ car } \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle, \|\mathbf{u}\|, \|\mathbf{v}\| \text{ finis} \\ \text{ou } (|a + b| \leq |a| + |b| \leq 2 \max(|a|, |b|))^p \leq 2^p \max(|a|^p, |b|^p) \leq 2^p (|a|^p + |b|^p) \\ \Rightarrow \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 \leq 4 \|\mathbf{u}\|^2 + 4 \|\mathbf{v}\|^2 < +\infty \\ \text{ou Cauchy-Schwarz} \Rightarrow \text{Minkowski } \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| < +\infty \end{array} \right.$

Norme $p \in [1, +\infty[$ sur

- $\ell^p = L^p$ avec $\|f\|_p^p = \int |f|^p < +\infty$
 - $\ell^p = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ avec $\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_p^p = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < +\infty$ (\Leftrightarrow mesure de comptage)
 - $\ell^p = \mathbb{K}^n$ avec $\|(x_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}\|_p^p = \sum_{i=1}^n |x_i|^p$
- Inégalité de Hölder : $\forall p, q \in [1, +\infty] : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \forall f \in \ell^p, \forall g \in \ell^q,$
 $f g \in \ell^1$ et $\|f g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$

Espaces topologiques	Espaces métriques	Espaces vectoriels normés
Ouverts, Fermés, Voisinages, Intérieurs, Adhérences		
<p>\mathcal{O}_E sont les ouverts de l'espace topologique (E, \mathcal{O}_E)</p> <p>$F \in E$ fermé $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} {}^c F$ ouvert $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} F \in \mathcal{F}_{\mathcal{O}_E}$ avec $\mathcal{F}_{\mathcal{O}_E} := \{F \in E : E \setminus F \in \mathcal{O}_E\}$</p> <p>$\mathcal{F}$ est stable par : - \bigcup finie - \bigcap quelconque</p> <p>Voisinages de $x \in E$: $\text{Vois}_{\mathcal{O}_E}(x) := \{V \in E : \exists U \in \mathcal{O}_E : x \in U \subset V\}$ (V voisinage de $x \iff$ contient un ouvert qui contient V)</p> <p>$\text{Vois}(x)$ est stable par : - \bigcap finie - \bigcup quelconque</p> <p>Propriété locale : P est vraie localement en $x \in E$ $\iff \exists V \in \text{Vois}(x) : P$ vraie sur V</p> <p>$U \in \mathcal{O} \iff \forall x \in U, U \in \text{Vois}(x)$ (ouvert \iff voisinage de chacun de ses points)</p> <p>\mathcal{V}_x système fondamental de voisinages de $x \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$</p> <ul style="list-style-type: none"> $\mathcal{V}_x \subset \text{Vois}(x)$ $\forall V \in \text{Vois}(x), \exists U \in \mathcal{V}_x : U \subset V$ <p>Existe toujours : Si \mathcal{B} base de topologie pour E, $\{U \in \mathcal{B} : x \in U\}$ est un système fondamental de voisinages</p> <p>Un espace topologique (E, \mathcal{O}) est à base dénombrable de voisinages si $\forall x \in E, \exists \mathcal{V}_x$ système fondamental de voisinages au plus dénombrable.</p> <p>Base dénombrable $\xrightarrow{\neq}$ Base dénombrable de voisinages</p> <p>Adhérence de $X \subset E$: $\bar{X} = \text{Adh}_{\mathcal{O}_E}(X) := \left\{ x \in E : \forall V \in \text{Vois}_{\mathcal{O}_E}(x), X \cap V \neq \emptyset \right\}$ (x adhérent à $X \iff X$ intersecte tout ouvert contenant x) \bar{X} est le plus petit fermé contenant X : $\rightarrow X \subset \bar{X} \in \mathcal{F}_{\mathcal{O}_E}$ et $\forall F \in \mathcal{F}, X \subset F \Rightarrow \bar{X} \subset F$ $\rightarrow \bar{X} = \bigcap \{F \in \mathcal{F} : F \supset X\}$ $\rightarrow \bar{F} = F \iff F \in \mathcal{F}$ fermé</p> <p>Intérieur de $X \subset E$: $\overset{\circ}{X} = \text{Int}_{\mathcal{O}_E}(X) := \left\{ x \in E : X \in \text{Vois}(x) \right\}$ $= \left\{ x \in X : \exists U \in \mathcal{O} : x \in U \subset X \right\}$ (x point intérieur $\iff X$ voisinage de x) $\overset{\circ}{X}$ est le plus grand ouvert contenu dans X : $\rightarrow X \supset \overset{\circ}{X} \in \mathcal{O}_E$ et $\forall U \in \mathcal{O}, U \subset X \Rightarrow U \subset \overset{\circ}{X}$ $\rightarrow \overset{\circ}{X} = \bigcup \{U \in \mathcal{O} : U \subset X\}$ $\rightarrow \overset{\circ}{U} = U \iff U \in \mathcal{O}$ ouvert</p> <p>Frontière de $X \subset E$: $\partial X = \text{Fr}_{\mathcal{O}_E}(X) := \bar{X} \setminus \overset{\circ}{X}$ $\partial X = \left\{ x \in E : \forall V \in \text{Vois}(x), V \cap X \neq \emptyset, V \cap {}^c X \neq \emptyset \right\}$ Fermée car intersection $\bar{X} \cap {}^c \overset{\circ}{X}$ de fermés</p> <p>Points isolés de $X \subset E$: $\text{Isol}_{\mathcal{O}_E}(X) := \{x \in X : \exists V \in \mathcal{V}(x) : V \cap X = \{x\}\}$</p> <p>Points d'accumulation de $X \subset E$: $\text{Acc}_{\mathcal{O}_E}(X) := \{x \in X : \forall V \in \mathcal{V}(x) : V \cap X \neq \{x\}\}$ (tous ses voisinages rencontrent X en un autre point que x)</p> <p>$\forall X \subset E, \text{Acc}(X) \cap \text{Isol}(X) = \emptyset$ $\text{Acc}(X) \cup \text{Isol}(X) = \text{Adh}(X)$</p> <p>En général, aucune relation entre $X, \bar{X}, \overset{\circ}{X}$</p> $\bigcup_{i \in I} \overset{\circ}{X}_i \supset \bigcup_{i \in I} \overset{\circ}{X}_i \quad \bigcap_{i \in I} \bar{X}_i \subset \bigcap_{i \in I} \bar{X}_i$ $\bigcap_{i \in I} \overset{\circ}{X}_i \subset \bigcap_{i \in I} \overset{\circ}{X}_i \quad \bigcup_{i \in I} \bar{X}_i \supset \bigcup_{i \in I} \bar{X}_i$ ${}^c \bar{X} = \overset{\circ}{X} \quad {}^c \overset{\circ}{X} = \bar{X}$	<p>$U \in E$ ouvert $\iff \forall x \in U, \exists r_x > 0 : B(x, r_x) \subset U$ \iff réunion de boules ouvertes</p> <p>Les boules ouvertes sont des ouverts. Les boules fermées sont des fermés. (par inégalité triangulaire)</p> <p>Critère du caractère fermé / distance à un fermé : $F \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$ fermé \iff $\forall x \in E, \text{dist}(x, F) = 0 \iff x \in F$ $> \iff x \notin F$ (de façon équivalente)</p> <p>$V \subset E$ voisinage de $x \in E \iff$ $\exists r > 0 : B(x, r) \subset V$ (contient une boule centrée en x) (grâce au sys fonda de voisinages)</p> <p>$\mathcal{V}_x = \{B(x, r) : r > 0\}$ système fondamental de voisinages de x</p> <p>$\mathcal{V}_x = \{B(x, 1/n) : n \in \mathbb{N}\}$ système fondamental dénombrable de voisinages de x. \rightarrow Les espaces métriques sont à base dénombrable de voisinages</p> <p>Adhérence : $\bar{X} = \left\{ x \in E : \forall r > 0, B(x, r) \cap X \neq \emptyset \right\}$ $= \left\{ x \in E : \text{dist}(x, X) = 0 \right\}$</p> <p>$\forall X \subset E$ non vide, $\forall x \in E$, $\text{dist}(x, X) = \text{dist}(x, \bar{X})$</p> <p>Intérieur : $\overset{\circ}{X} = \left\{ x \in X : \exists r > 0 : B(x, r) \subset X \right\}$ $= \left\{ x \in E : \text{dist}(x, {}^c X) > 0 \right\}$</p>	<p>$\forall x \in E, \forall r > 0, \overline{B(x, r)} = B^f(x, r)$</p> <p>$F$ sous-EV de $E \Rightarrow \bar{F}$ sous-EV de E</p> <p>$\overline{A+B} ?$ $\overline{\mathbb{K}A + \mathbb{K}B} ?$ $\overline{(A \cup B)_+}$</p> <p>$\forall x \in E, \forall r > 0, \overset{\circ}{B}(x, r) = B(x, r)$</p> <p>$F$ sous-EV strict de dimension finie ($\dim F < \dim E \Rightarrow \overset{\circ}{F} = \emptyset$)</p> <p>$\forall x \in E, \forall r > 0, \partial B(x, r) \subset S(x, r)$</p>
Topologie induite		
<p>Topologie induite sur $A \subset E$ par \mathcal{O}_E : $\mathcal{O}_{ A} := \{U \cap A : U \in \mathcal{O}_E\}$, qui est une topo pour A ($U \cap A$ est la trace de U sur A)</p> <p>U ouvert rel. de $A \iff \exists X \in \mathcal{O}_E : U = X \cap A$ F fermé rel. de $A \iff \exists X \in \mathcal{F}_{\mathcal{O}_E} : F = X \cap A$ $\iff {}^c F$ ouvert relatif de A</p> <p>Pour $x \in A$ et $X \subset A$: $\text{Int}_A(X) \supset \text{Int}_E(X) \cap A$ Ex: $A = \mathcal{F} / \mathcal{O} \Rightarrow \text{Int}_A(A) = A \neq \text{Int}_E(A) \cap A$ $\text{Vois}_A(x) = \{V \cap A : V \in \text{Vois}_E(x)\}$ $\text{Adh}_A(X) = \text{Adh}_E(X) \cap A$ $\text{Fr}_A(X) \subset \text{Fr}_E(X) \cap A$</p>	<p>Distance induite sur A : $d_{ A} := d _{A \times A}$ définit une distance sur A \rightarrow Engendre la topologie induite $\mathcal{O}_{ A}$ car $B_{d_{ A}}(x, r) = B_d(x, r) \cap A \subset B_d(x, r)$</p>	<p>Norme induite sur A : $\ \cdot\ _A := \ \cdot\ _A$ norme sur A</p>

Espaces topologiques	Espaces métriques	Espaces vectoriels normés
Densité, Séparabilité		
<p>$X \subset E$ dense dans $Y \subset E \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} Y \subset \bar{X}$</p> <p>Si $X \subset Y \subset E$ dense dans Y fermé, alors $\bar{X} = Y$ car alors $Y \subset \bar{X} \subset \bar{Y} = Y$ <small>dense $X \subset Y$ fermé</small></p> <p>$X \subset E$ dense dans E $\Leftrightarrow \bar{X} = E \Leftrightarrow \overset{\circ}{\bar{X}} = \emptyset$ $\Leftrightarrow \forall x \in E, \forall V \in \text{Vois}_{\mathcal{O}_E}(x), V \cap X \neq \emptyset$ <small>(tout point de E est adhérent à X)</small> $\Leftrightarrow \forall U \subset \mathcal{B}_{\mathcal{O}_E}, U \cap X \neq \emptyset$ avec $\mathcal{B}_{\mathcal{O}_E}$ base de topologie <small>(tout ouvert de base contient un point de X)</small> $\Leftrightarrow E$ est l'unique fermé $\supset X$</p> <p>(E, \mathcal{O}_E) espace topologique séparable $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\exists X \subset E : X$ dénombrable et dense dans E À base dénombrable d'ouverts \Rightarrow Séparable</p> <p>Produit de séparables : $((E_i, \mathcal{O}_i))_{i \in \mathbb{N}}$ famille dénombrable d'espaces séparables $\Rightarrow (\prod_{i \in \mathbb{N}} E_i, \mathcal{O}_{\times})$ séparable</p>	<p>$X \subset E$ dense dans E $\Leftrightarrow \forall x \in E, \forall r > 0, B(x, r) \cap X \neq \emptyset$ $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \forall y \in E, \exists x \in X : d(x, y) < \varepsilon$ <small>(tout $y \in E$ est approché arbitrairement près par un $x \in X$)</small></p> <p>Si espace métrisable, alors À base dénombrable d'ouverts \Leftrightarrow Séparable $(X = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ dense dans E $\Rightarrow \mathcal{B} = \{B(x_n, 1/m)\}_{n, m \in \mathbb{N}}$ base de topologie dénombrable)</p>	<p>$X \subset E$ partie totale de E $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{Vect}(X)$ dense dans E $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \forall y \in E,$ $\exists ((x_i, \lambda_i))_{1 \leq i \leq k} \in (X \times \mathbb{K})^k : \ x - \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i\ < \varepsilon$ <small>(tout $y \in E$ est arbitrairement proche d'une combinaison linéaire (finie) d'éléments de X)</small></p> <p>Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}, par densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R}, $\exists X \subset E$ partie totale dénombrable $\Rightarrow E$ séparable <small>(coeffs de la comb.lin. $\in \mathbb{K}$ indénombrable)</small></p> <p>$\rightarrow L^p$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ell^p$ séparables pour $1 \leq p < \infty$ <small>(mais L^∞ et $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ell^\infty$ non séparables)</small></p> <p>Dans (\mathbb{R}, \cdot), $\forall U \in \mathcal{O}, \exists (]a_n, b_n[)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}} : U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]a_n, b_n[$ tout ouvert est l'union disjointe d'une famille dénombrable d'intervalles ouverts (ses composantes connexes) par séparabilité de (\mathbb{R}, \cdot) \triangle faux avec les fermés</p>
Séparation		
<p>(E, \mathcal{O}_E) espace topologique séparé $(T_2) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\forall (x, y) \in E_{\neq}^2, \exists V_x \in \text{Vois}(x), V_y \in \text{Vois}(y) : V_x \cap V_y = \emptyset$ \Leftrightarrow tout singleton $\{x\}$ est fermé <small>(points distincts $\Rightarrow \exists$ voisinages respectifs disjoints)</small></p> <p>Critère avec l'espace produit : (E, \mathcal{O}) séparé $\Leftrightarrow \Delta = \{(x, x) : x \in E\}$ fermé de $(E \times E, \mathcal{O}_{\times})$</p> <p>$(E, \mathcal{O}_E)$ séparé et $\exists f : E \hookrightarrow F \in \mathcal{C}_{\mathcal{O}_E, \mathcal{O}_F}^0$ continue <u>injective</u> $\Rightarrow (F, \mathcal{O}_F)$ séparé (séparation : notion topologique)</p> <p>Produit de séparés : $((E_i, \mathcal{O}_i))_{i \in \mathbb{I}}$ espaces séparés $\Leftrightarrow (\prod_{i \in \mathbb{I}} E_i, \mathcal{O}_{\times})$ séparé</p>	<p>Tout espace métrique/métrisable est séparé. <small>($d = d(x, y) \neq 0 \Rightarrow B(x, 1/3) \cap B(y, 1/3) = \emptyset$)</small></p>	
Connexité		
<p>(E, \mathcal{O}) connexe $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \nexists U, V \in \mathcal{O} \setminus \{\emptyset\} : U \sqcup V = E \quad (U \cup V = E \text{ et } U \cap V = \emptyset)$ <small>(E ne se partitionne pas en deux ouverts)</small> $\Leftrightarrow \mathcal{O} \cap \mathcal{F} = \{E, \emptyset\}$ <small>(les seuls ouverts-fermés sont E et \emptyset)</small></p> <p>$A \subset E$ partie connexe $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} A \in \text{Cnx}(E, \mathcal{O}) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $(A, \mathcal{O} _A)$ connexe</p> <p>A partie connexe $\Rightarrow \overset{\circ}{A}$ connexe (mais $\nRightarrow \bar{A}$ connexe) $A \subset X \subset \bar{A} \Rightarrow B$ connexe</p> <p>$\exists (A_i)_{i \in \mathbb{I}} \in \text{Cnx}(E, \mathcal{O})^{\mathbb{I}} : \bigcap_{i \in \mathbb{I}} A_i \neq \emptyset \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{I}} A_i$ connexe</p> <p>\exists recouvrement de E par des parties connexes d'$\cap \neq \emptyset$ $\Rightarrow (E, \mathcal{O})$ connexe</p> <p>Lemme du passage des douanes : A, C parties non vides C connexe, $C \cap \overset{\circ}{A} \neq \emptyset, C \cap \overset{\circ}{\bar{A}} \neq \emptyset \Rightarrow C \cap \partial A \neq \emptyset$ <small>(C intersecte l'intérieur et l'extérieur de $A \Rightarrow$ intersecte la frontière)</small></p> <p>(E, \mathcal{O}) connexe $\Leftrightarrow \forall f : E \rightarrow \{0, 1\} \in \mathcal{C}_{\mathcal{O}, \mathcal{O}_{\text{discr}}}^0$ continue, f constante</p> <p>L'image d'un connexe par une fonction <u>continue</u> est connexe : (E, \mathcal{O}_E) connexe et $\exists f \in \mathcal{C}_{\mathcal{O}_E, \mathcal{O}_F}^0(E, F)$ continue $\Rightarrow (F, \mathcal{O}_F)$ connexe (connexité : notion topologique)</p> <p>Pour montrer qu'une propriété est vraie pour tous les points d'une partie que l'on sait connexe, on montre que l'ensemble des points qui la satisfait est ouvert et fermé dans cette partie.</p>	<p>Le seul ouvert-fermé non vide de (\mathbb{R}, \cdot) est \mathbb{R} $\rightarrow (\mathbb{R}, \cdot)$ est connexe \rightarrow parties connexes de $(\mathbb{R}, \cdot) \equiv$ intervalles <small>(pas intervalle \Rightarrow trou \Rightarrow pas connexe ; intervalle \Rightarrow image de \mathbb{R} par une fonction continue)</small> \rightarrow un segment $[a, b] = \{(1-t)a + tb : t \in [0, 1]\}$ <small>($a, b \in E$) d'un EVN est connexe</small> \rightarrow EVN connexe par segment \Rightarrow connexe \rightarrow un sous-espace affine, une partie convexe d'un EVN est connexe</p> <p>$n \geq 2 : \mathbb{R}^n \setminus D$ est connexe avec $D \subset \mathbb{R}^n$ fini \rightarrow Théorème d'invariance du domaine : \mathbb{R} et \mathbb{R}^n ne peuvent être homéomorphes</p> <p>Théorème des valeurs intermédiaires : L'image d'un connexe $X \subset E$ (par exemple un intervalle si $E = \mathbb{R}$) par une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ réelle continue $f(X)$ est un intervalle : $\forall x_0, x_1 \in X, [f(x_0), f(x_1)] \subset f(X)$</p>	

$$\begin{aligned}
f(A \cap B) &\stackrel{\text{surj}}{\subset} f(A) \cap f(B) & f^{-1}(X \cap Y) &= f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y) \\
f(A \cup B) &= f(A) \cup f(B) & f^{-1}(X \cup Y) &= f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y) \\
f^{-1}(f(A)) &\stackrel{\text{inj}}{\supset} A & f(f^{-1}(X)) &\stackrel{\text{surj}}{\subset} X \\
f(\overset{\circ}{A}) &\stackrel{\text{inj}}{\supset} \overset{\circ}{f(A)} & f^{-1}(\overset{\circ}{X}) &= \overset{\circ}{f^{-1}(X)} \\
f(\bar{A}) &\stackrel{\text{surj}}{\supset} \bar{f(A)} & f^{-1}(\bar{X}) &= \bar{f^{-1}(X)}
\end{aligned}$$

Espaces topologiques	Espaces métriques Espaces topologiques à base dénombrable de voisinage	Espaces vectoriels normés
Limites de suites		
<p>$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E \stackrel{\text{def}}{\iff} (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E_{\text{cv}(\ell), \mathcal{O}_E}^{\mathbb{N}} \stackrel{\text{def}}{\iff}$ $\forall V_\varepsilon \in \underbrace{\text{Vois}_{\mathcal{O}_E}(\ell)}_{\text{ou } \mathcal{V}_\ell}, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, x_n \in V_\varepsilon$</p> <p>Dite divergente dans E si converge nulle part. Si (E, \mathcal{O}_E) séparé, $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)_{n \in \mathbb{N}} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n := \ell$ unique.</p> <p>$\forall (x_n)_n \in X_{\text{cv}}^{\mathbb{N}}$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \bar{X}$. Mais réciproque fautive en général.</p> <p>Suite $\rightarrow \ell \iff$ Toute Sous-suite $\rightarrow \ell$ \Leftrightarrow Pour montrer la divergence, il suffit de trouver deux sous-suites de $\lim \neq$</p> <p>Valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$: $x \in \text{Adh}((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \subset E \stackrel{\text{def}}{\iff}$ $\forall V_x \in \text{Vois}_{\mathcal{O}_E}(x), \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, x_n \in V_x$ (tout voisinage de x contient une infinité de termes de la suite) En d'autres termes : $\text{Adh}((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{x_k : k \geq n\}}$ donc fermé</p> <p>Sous-suite $\rightarrow \ell \implies \ell \in \text{Adh}((x_n)_n)$</p>	<p>$x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{d_E} \ell \in X$ $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, d_E(x_n, \ell) < \varepsilon$</p> <p>Et alors $\ell = \lim (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unique. $(\forall n, d(\ell_1, \ell_2) \leq d(\ell_1, x_n) + d(x_n, \ell_2)$ donc $d(\ell_1, \ell_2) = 0$ donc $\ell_1 = \ell_2$)</p> <p>Caractérisation séquentielle de l'adhérence, des fermés : Espace topologique à base dénombrable de voisinages : \rightarrow Soit $x \in E$. $x \in \bar{X} \iff \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}} \rightarrow x$ $\rightarrow F \subset E$ fermé $\iff \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F_{\text{cv}, \mathcal{O}_E}^{\mathbb{N}}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in F$ $\Delta \dashv$</p> <p>$x \in \text{Adh}((x_n)_n) \iff$ $\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, d(x, x_n) < \varepsilon$</p> <p>$(x_n)_n$ converge $\stackrel{\text{non compact}}{\iff} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \text{Adh}((x_n)_n)$ \uparrow</p> <p>Adhérence et suite extraite : Espace topologique à base dénombrable de voisinages : $a \in \text{Adh}((x_n)_n) \iff \exists \varphi : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N} : x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$</p>	<p>Théorème de convergence monotone Suites adjacentes Suites numériques Passage à la limite des inégalités Théorème d'encadrement ...</p>
Limites de fonctions, Continuité		
<p>$(E, \mathcal{O}_E), (F, \mathcal{O}_F), (G, \mathcal{O}_G)$ espaces topologiques, $X \subset E, Y \subset F, \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y$ topologies induites.</p> <p>$f : X \rightarrow F$ admet $\ell \in F$ pour limite en $a \in \bar{X} \stackrel{\text{def}}{\iff}$ converge vers ℓ en $a \left(f \xrightarrow[a]{\mathcal{O}_E, \mathcal{O}_F} \ell \right)$ $\forall V_\varepsilon \in \underbrace{\text{Vois}_{\mathcal{O}_F}(\ell)}_{\text{ou } \mathcal{V}_\ell}, \exists U_\varepsilon \in \text{Vois}_{\mathcal{O}_E}(a) : f(U_\varepsilon \cap X) \subset V_\varepsilon$</p> <p>avec \mathcal{V}_ℓ système fondamental de voisinages de ℓ dans (F, \mathcal{O}_F). Δ a n'est pas forcément à X. De façon équivalente (topo ind.), $\forall V_\varepsilon \in \text{Vois}_{\mathcal{O}_F}(\ell), \exists U_\varepsilon \in \text{Vois}_{\mathcal{O}_X}(a) : f(U_\varepsilon) \subset V_\varepsilon$</p> <p>Alors $\ell \in \overline{f(X)}$. Si (F, \mathcal{O}_F) séparé, et $\lim_a f := \ell$ unique. (si non séparé et ℓ, ℓ' topologiquement indistinguables, $f \rightarrow \ell \iff f \rightarrow \ell'$)</p> <p>$f : E \rightarrow F$ continue en $x \in E$ $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall V_\varepsilon \in \text{Vois}_{\mathcal{O}_F}(f(x)), \exists U_\varepsilon \in \text{Vois}_{\mathcal{O}_E}(x) : f(U_\varepsilon) \subset V_\varepsilon$ $\iff f^{-1}(V_\varepsilon) \in \text{Vois}_{\mathcal{O}_E}(x)$ $\stackrel{\text{def}}{\iff} f \xrightarrow[x]{} f(x)$</p> <p>$f : E \rightarrow F$ continue globalement sur E (notion locale) $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall U \in \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O}_F \\ \mathcal{B}_F \end{array} \right\}, f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_E \iff f \in \mathcal{C}^0((E, \mathcal{O}_E), (F, \mathcal{O}_F))$ $\iff \forall X \in \mathcal{F}_F, f^{-1}(X) \in \mathcal{F}_E$ (image réciproque d'un ouvert/fermé de F = ouvert/fermé de E) $\iff \forall X \subset E, f(\bar{X}) \subset \overline{f(X)}$ $\iff \forall x \in E, f$ continue en x</p> <p>\rightarrow si $f \in \mathcal{C}^0((E, \mathcal{O}_E), (F, \mathcal{O}_F))$ continue X dense dans $(E, \mathcal{O}_E) \implies f(X)$ dense dans (F, \mathcal{O}_F)</p> <p>Limite séquentielle : $f : X \rightarrow F, (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ $\left. \begin{array}{l} (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow a \in \bar{X} \\ f \xrightarrow[a]{} \ell \end{array} \right\} \implies f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$ $\left. \begin{array}{l} (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow x \in X \\ f \text{ continue en } x \end{array} \right\} \implies f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x)$ Δ faux en général pour $x \in \bar{X}$</p> <p>Composition : $f : E \rightarrow F$ continue en $x \in E$ $g : F \rightarrow G$ continue en $f(x)$ $\implies g \circ f$ continue en x</p> <p>Si $f : X \subset E \rightarrow F, g : Y \subset F \rightarrow G, x \in \bar{X}$ $\left. \begin{array}{l} f \xrightarrow[x]{\mathcal{O}_E, \mathcal{O}_F} y \in \bar{Y} \\ g \xrightarrow[y]{\mathcal{O}_F, \mathcal{O}_G} \ell \end{array} \right\} \implies g \circ f \xrightarrow[x]{\mathcal{O}_E, \mathcal{O}_G} \ell$</p> <p>Restriction : pour $(A \subset E, \mathcal{O}_E _A)$ topo. induite : l'injection canonique $\text{id}_E _A : A \hookrightarrow E$ est continue $f : E \rightarrow F$ continue $\implies f _A = f \circ \text{id}_A$ continue f continue $\forall x \in A \iff f _A$ continue</p> <p>pour $(B \subset F, \mathcal{O}_F _B)$ topo. induite telle que $f(E) \subset B$: $f : E \rightarrow F$ continue $\implies f _B : E \rightarrow B$ continue</p> <p>Prolongements : si (F, \mathcal{O}_F) séparé et $f, g \in \mathcal{C}^0(E, F)$ $\{x \in E : f(x) = g(x)\}$ fermé si f, g continues donc $f _A = g _A$ sur A dense dans $E \implies f = g$ en particulier, f nulle sur une partie dense $\implies f$ nulle partout</p>	<p>$(E, d_E), (F, d_F), (G, d_G)$ espaces métriques, $X \subset E, Y \subset F$</p> <p>$\forall a \in \bar{X}, f \xrightarrow[a]{d_E, d_F} \ell \in F$ $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : f(B_{d_E}(a, \delta) \cap X) \subset B_{d_F}(\ell, \varepsilon)$ $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in X, d_E(x, a) < \delta \implies d_F(f(x), \ell) < \varepsilon$</p> <p>Et alors $\ell = \lim_a f$ unique.</p> <p>f continue en $x \in E$ $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_{x, \varepsilon} > 0 : f(B_{d_E}(x, \delta_{x, \varepsilon})) \subset B_{d_F}(f(x), \varepsilon)$ $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall y \in E, d_E(x, y) < \delta \implies d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon$ $\stackrel{\text{def}}{\iff} \lim_x f = f(x)$</p> <p>$f$ uniformément continue $\stackrel{\text{def}}{\iff} f \in \mathcal{C}U^0((E, d_E), (F, d_F))$ $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x, y \in E, d_E(x, y) < \delta_\varepsilon \implies d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon$ $\implies f$ continue (réciproque vraie sur un <u>compact</u> : thm. de Heine)</p> <p>f k-lipschitzienne ($k \in \mathbb{R}_+$) $\stackrel{\text{def}}{\iff} f \in \mathcal{L}ip^k((E, d_E), (F, d_F)) \stackrel{\text{def}}{\iff}$ $\forall x, y \in E, d_F(f(x), f(y)) \leq k d_E(x, y)$ Constante de Lipschitz : $\text{lip}(f) := \sup_{\substack{x, y \in E \\ x \neq y}} \frac{d_F(f(x), f(y))}{d_E(x, y)}$</p> <p>$f$ a-höldérienne ($a \in]0, 1]$) $\stackrel{\text{def}}{\iff} f \in \mathcal{H}\ddot{o}l^a((E, d_E), (F, d_F)) \stackrel{\text{def}}{\iff}$ $\exists k \in \mathbb{R}_+ : \forall x, y \in E, d_F(f(x), f(y)) \leq k (d_E(x, y))^a$</p> <p>$\rightarrow f$ lipschitzienne $\iff f$ 1-höldérienne $\rightarrow f$ höldérienne/lipschitzienne $\implies f$ uniformément continue $\rightarrow f$ localement lipschitzienne $\implies f$ continue</p> <p>Limite et continuité séquentielle : Espace topologique à base dénombrable de voisinages. $f \xrightarrow[a]{} \ell \iff \left(\begin{array}{l} \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}} : x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a, \\ f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell \end{array} \right)$ pour $a \in \bar{X}$</p> <p>f continue $\iff \left(\begin{array}{l} \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}} : x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x, \\ f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x) \end{array} \right)$</p> <p>($\implies$: direct ($\exists N : \forall n \geq N, d(x_n, x) < \eta$). \impliedby : contraposée.)</p>	<p>Limites en $\pm\infty$ $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue tq $\lim_{+\infty} f = 0 \implies \mathcal{C}U^0$</p> <p>$f \in \mathcal{C}^0((E, \ \cdot\ _E), (F, \ \cdot\ _F)) \iff$ $\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_{x, \varepsilon} > 0 : \forall y \in E,$ $\ x - y\ _E < \delta_{x, \varepsilon} \implies \ f(x) - f(y)\ _F < \varepsilon$</p> <p>$f \in \mathcal{C}U^0((E, \ \cdot\ _E), (F, \ \cdot\ _F)) \iff$ $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x, y \in E$ $\ x - y\ _E < \delta_\varepsilon \implies \ f(x) - f(y)\ _F < \varepsilon$ \sqrt{x} unif continue ($1/2$-höldérienne, mais pas lipschitz.) x^α non unif continue pour $\alpha \geq 2$</p> <p>Applications linéaires : $f \in \text{Lin}(E, F)$ f continue $\stackrel{\text{def}}{\iff} f \in \mathcal{L}((E, \ \cdot\ _E), (F, \ \cdot\ _F))$ $\iff f$ continue en 0_E $\iff f$ bornée sur $B_{\ \cdot\ _E}(0_E, 1)$ (f (boule unité) bornée) $\iff \exists k \geq 0 : \forall x \in E, \ f(x)\ _F \leq k \ x\ _E$ $\iff f$ lipschitzienne</p> <p>$f \in \text{Lin}(E, F)$ non continue $\iff \exists (x_n)_n \in E^{\mathbb{N}} : \frac{\ f(x_n)\ _F}{\ x_n\ _E} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$</p> <p>$(\mathcal{L}(E, F), \ \cdot\)$ EVN des opérateurs bornés $\ f\ := \text{lip}(f)$, et si $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$,</p> <p>$\ f\ = \sup_{x \neq 0} \frac{\ f(x)\ _F}{\ x\ _E}$ (norme d'opérateur) = $\sup_{\ x\ _E=1} \ f(x)\ _F = \sup \ f(S_{\ \cdot\ _E}(0, 1))\ _F$ = $\inf \{k \geq 0 : \ f(\cdot)\ _F \leq k \ \cdot\ _E\}$</p> <p>En pratique, on majore $\ f(x)\ _F / \ x\ _E \leq M$ au mieux, puis on prend une suite $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_\infty$ telle que $\ f(x_n)\ _F \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} M \ x_\infty\ _E$</p> <p>C'est une norme d'algèbre : si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, $\ g \circ f\ \leq \ g\ \cdot \ f\$ de plus si $f \in \text{GL}(E)$ inversible, $\ f^{-1}\ = \ f\ ^{-1}$ $\rightarrow (\mathcal{L}(E, E), +, \cdot, \circ, \ \cdot\ _{\text{op}})$ \mathbb{K}-algèbre normée</p> <p>Si E est de dimension finie, toute application linéaire est continue : $\text{Lin}(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$ et norme atteinte $\ f(x_u)\ = \ f\$ pour $\ x_u\ = 1$ (cf. compacité)</p> <p>Fonctions numériques dans $(\mathbb{K} = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), \mathcal{O}_\mathbb{K})$: $f, g : E \rightarrow \mathbb{K}$ continues en x $\implies f + g$ et $f \cdot g$ continues en x \rightarrow Une fonction (multi-)polynomiale est continue</p>

$$(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(E, F)^{\mathbb{N}} \text{ converge simplement vers } f \in \mathcal{F}(E, F) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, d_F(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

$$(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(E, F)^{\mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers } f \in \mathcal{F}(E, F) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CU}} f$$

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, \forall x \in X, d_F(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \sup_{x, y \in X} d_F(f_n(x), f_n(y)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

Convergence uniforme \Rightarrow Convergence simple

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n \text{ continue (en } x) \implies f = \lim_{n \rightarrow +\infty}^{\text{CU}} f_n \text{ continue (en } x)$$

Espaces topologiques	Espaces métriques	Espaces vectoriels normés
Transport, Isométrie		
<p>(E, \mathcal{O}) espace topologique, $f: E' \rightarrow E$ alors $f^{-1}(\mathcal{O})$ topologie sur E' (topologie image réciproque de \mathcal{O} par f)</p> <p>Homéomorphisme : isomorphisme de struct. topologique $\varphi: E \rightarrow F \in \text{Homeo}((E, \mathcal{O}_E), (F, \mathcal{O}_F))$ $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \varphi \text{ bijective} \\ \varphi \in \mathcal{C}^0((E, \mathcal{O}_E), (F, \mathcal{O}_F)) \\ \varphi^{-1} \in \mathcal{C}^0((F, \mathcal{O}_F), (E, \mathcal{O}_E)) \end{cases}$ (bijective continue de bijection réciproque continue : bicontinue)</p> <p>Préservent les notions topologiques : caract. ouvert, fermé, séparation, voisinages, intérieurs adhérence, frontière, compacité, connexité</p> <p>\rightarrow pour montrer que deux espaces ne sont pas homéomorphes, on cherche une notion topologique satisfaite pour l'un et pas pour l'autre</p> <p>Critère d'homéomorphisme : si E et F compacts, φ bijective continue $\implies \varphi$ homéomorphisme</p> <p>$f \in \mathcal{C}^0((E, \mathcal{O}_E), (F, \mathcal{O}_F))$ continue $\iff \mathcal{O}_E \supset f^{-1}(\mathcal{O}_F)$ $\text{id}_E \in \mathcal{C}^0((E, \mathcal{O}_1), (F, \mathcal{O}_2))$ continue $\iff \mathcal{O}_1 \supset \mathcal{O}_2$</p> <p>$(E, \mathcal{O}_E)$ et (F, \mathcal{O}_F) homéomorphes $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\exists \varphi \in \text{Homeo}((E, \mathcal{O}_E), (F, \mathcal{O}_F)) \implies \mathcal{O}_F = \varphi(\mathcal{O}_E)$ $\text{id}_E \in \text{Homeo}((E, \mathcal{O}_1), (E, \mathcal{O}_2)) \iff \mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$</p>	<p>(E, d_E) espace métrique, $f: E' \hookrightarrow E$ injective ; alors $d_{E'}(x, y) := d_E(f(x), f(y))$ distance sur E' (distance image réciproque de d_E par f)</p> <p>$(E, d_E), (E', d_{E'})$ espaces métriques. $f: E' \rightarrow E$ isométrique $\Leftrightarrow \forall x, y \in E, d_{E'}(f(x), f(y)) = d_E(x, y)$ Une application isométrique est continue, injective. Isométrie = application isométrique et <i>bijective</i></p> <p>$\text{id}_E \in \mathcal{Lip}((E, d_E), (E, d_E)) \cap \mathcal{Lip}((E, d_{E'}), (E, d_E))$ bilipschitzienne $\iff d_1$ et d_2 Lipschitz-équivalentes</p> <p>$\iff d_1$ et d_2 topologiquement équivalentes</p>	<p>Translations \rightarrow $\left\{ \begin{array}{l} \text{homéomorphismes} \\ \text{isométries} \end{array} \right.$</p> <p>Sont homéomorphes pour $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_u)$: – les intervalles fermés entre eux – les intervalles ouverts entre eux</p> <p>$\forall n \geq 1, \mathbb{R}^n$ homéomorphe à sa boule $B(\mathbf{0}, 1)$</p> <p>$\iff \ \cdot\ _1$ et $\ \cdot\ _2$ équivalentes</p>
Espaces produits		
<p>$((E_i, \mathcal{O}_i))_{i \in I}$ espaces topologiques. $E_\times := \prod_{i \in I} E_i$ $\pi_i: E \rightarrow E_i$ projections/surjections canoniques $(x_j)_{j \in I} \mapsto x_i$</p> <p>Topologie produit \mathcal{O}_\times = topologie initiale pour $((\mathcal{O}_i, \pi_i: E_\times \rightarrow E_i))_{i \in I}$ = topo. la moins fine telle que les π_i soient continues $\mathcal{O}_\times := \bigcap \{ \mathcal{O} \text{ topo pour } E_\times : \forall i \in I, \pi_i \in \mathcal{C}_0^{\mathcal{O}_i, \mathcal{O}_\times}(E_\times, E_i) \}$</p> <p>La base des rectangles élémentaires $\mathcal{R} := \left\{ R_{(U_j)_j} : (U_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} \mathcal{O}_j \text{ avec } J \subset I \text{ fini} \right\}$ est une base de topologie pour l'espace produit $(E_\times, \mathcal{O}_\times)$</p> <p>avec $R_{(U_j)_j} := \bigcap_{j \in J} \pi_i^{-1}(U_j) = \prod_{i \in I} \begin{cases} U_i & \text{si } i \in J \\ E_i & \text{sinon} \end{cases}$ produit cartésien d'ouverts égaux à E_i sauf pour un nombre <i>fini</i></p> <p>Topologie engendrée : $U \in \mathcal{O}_\times \iff \exists R \in \mathcal{R} : x \in R \subset U$ Pour $I = \llbracket 1, n \rrbracket$ fini : $\mathcal{O}_\times = \left\{ U \subset E_\times : \forall x \in U, \exists (U_i)_{i \in I} \in \prod_{i=1}^n \mathcal{O}_i : x \in \prod_{i=1}^n U_i \subset U \right\}$ $\overline{\prod_{i=1}^n X_i} = \prod_{i=1}^n \overline{X_i}$ et $\overset{\circ}{\prod_{i=1}^n X_i} = \prod_{i=1}^n \overset{\circ}{X_i}$ pour $X_i \subset E_i$</p> <p>Base dénombrable : $((E_i, \mathcal{O}_i))_{i \in \mathbb{N}}$ famille dénombrable d'espaces à base dénombrable $\implies (\prod_{i \in \mathbb{N}} E_i, \mathcal{O}_\times)$ à base dénombrable</p> <p>Convergence de suites : $((x_{n,i})_{i \in \mathbb{N}})_{n \in \mathbb{N}} \in E_\times^{\mathbb{N}}, (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in E_\times$ convergence \iff toutes les composantes convergent : $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{O}_\times} x \iff \forall i \in \mathbb{N}, x_{n,i} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{O}_i} x_i$</p> <p>Continuité : (E, \mathcal{O}_E) esp. topo, $(F_\times = \prod_{i \in I} F_i, \mathcal{O}_\times)$ esp. produit $f: E \rightarrow F_\times \in \mathcal{C}^0((E, \mathcal{O}_E), (F_\times, \mathcal{O}_\times))$ continue \iff $\forall i \in I, f_i = \pi_i \circ f \in \mathcal{C}^0((E, \mathcal{O}_E), (F_i, \mathcal{O}_i))$ continue (mais rien pour un ensemble de départ produit : analyse multivariée)</p> <p>La notion d'espace produit est compatible avec l'associativité du produit cartésien $(\cdot \times \cdot \times \cdot) = (\cdot \times \cdot) \times \cdot$</p>	<p>$((E_i, d^{(i)}))_{i \in \mathbb{N}}$ suite d'espaces métriques finie $(\prod_{i=1}^n E_i, d_\infty)$ espace métrique produit, avec $d_\infty((x_i)_i, (y_i)_i) = \max_{1 \leq i \leq n} d^{(i)}(x_i, y_i)$; on a $\forall U_j \in \mathcal{O}_{d^{(j)}}$ $\pi_j^{-1}(U_j) = \prod_{i=1}^n \begin{cases} U_i & \text{si } i=j \\ E_i & \text{sinon} \end{cases} \in \mathcal{O}_d$ ouvert donc π_j continue</p> <p>On peut prendre $d = d_1, d_2, d_p, d_\infty \dots$ distances équivalentes</p> <hr/> <p>$((E_i, d^{(i)}))_{i \in \mathbb{N}}$ suite d'espaces métriques dénombrable $\forall i$, posons $d_b^{(i)}(\cdot, \cdot) := \min(1, d^{(i)}(\cdot, \cdot))$ distance <i>bornée</i></p> <p>$(E_\times = \prod_{i \in \mathbb{N}} E_i, d)$ espace métrique produit avec $d = d_\times, d_\Sigma$</p> <p>$\rightarrow d_\times((x_i)_i, (y_i)_i) := \sup_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{i+1} d_b^{(i)}(x_i, y_i)$ engendre la topologie produit \mathcal{O}_\times, la <i>moins fine</i> des topologies où les projections π_i sont continues</p> <p>$\rightarrow d_\Sigma((x_i)_i, (y_i)_i) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} d_b^{(i)}(x_i, y_i) \leq d_\times \leq M d_\Sigma$ engendre une topologie pour laquelle les projections π_i sont continues, et <i>moins fine</i> que celle de d_\times</p> <p>\rightarrow donc d_1 et d_∞ <i>topologiquement</i> (pas Lipschitz) <i>équivalentes</i> !</p> <p>$\rightarrow d_\infty((x_i)_i, (y_i)_i) := \sup_{i \in \mathbb{N}} d_b^{(i)}(x_i, y_i)$ n'engendre <i>pas</i> la topologie produit, mais une topologie <i>plus fine</i> (parfois discrète)</p> <p>Voisinages : $V \subset E_\times$ voisinage de $x = (x_i)_{i \in I} \in E_\times$ $\iff \exists N \in \mathbb{N}, \exists r > 0 : \prod_{i=0}^N B_{d^{(i)}}(x_i, r) \times \prod_{i > N} E_i \subset V$</p>	<p>Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}, toutes les normes de \mathbb{K}^n sont équivalentes (à $\ \cdot\ _\infty$) et engendrent donc la topologie produit</p> <p>1. $\ \cdot\ \in \mathcal{Lip}^C((\mathbb{K}^n, \ \cdot\ _\infty), (\mathbb{R}, \cdot))$ donc continue avec $C = \sum_{i=1}^n \ e_i\$ (1^{e} et 2^{e} ineq. trig, base can.)</p> <p>2. donc $\ \cdot\$ continue sur la sphère unité $S = S_{\ \cdot\ _\infty}(\mathbf{0}, 1)$ fermée-bornée donc $\ \cdot\ _\infty$-compacte donc $\ \cdot\$ bornée par M; de plus $0 \notin \ S\$ (vraie distance) donc $m := \inf_S \ \cdot\ \neq 0$ (car atteint ses bornes)</p> <p>3. $\forall x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}, \forall \ x\ _\infty \in S$ donc $m \leq \ \cdot\ _\infty \leq M$ donc $m \ x\ _\infty \leq \ x\ \leq M \ x\ _\infty$</p> <p>4. Pour \mathbb{C}, identif. $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ (\Re, \Im) \rightarrow topo produit</p> <hr/> <p>Si E est de $\dim_{\mathbb{K}} E = n$ finie, et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}, toutes les normes sont équivalentes, et engendrent la topologie naturelle d'un EVN de dimension finie</p> <p>(car $E \xrightarrow{\phi} \mathbb{K}^n$ et $\ \cdot\ \circ \phi$ normes sur \mathbb{K}^n donc equiv. donc $\ \cdot\$ equiv. par surjectivité de l'isomorphisme ϕ)</p> <p>On retrouve les propriétés de la topo. produit de convergence et de continuité coordonnée par coordonnée dans une base $\mathcal{E} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$: $((e_i^*(x_n))_i)_n$ et $(e_i^*(f))_i$</p> <p>Normes usuelles : $\ x\ _{\infty, \mathcal{E}} := \max_{1 \leq i \leq n} e_i^*(x) \quad \ x\ _{1, \mathcal{E}} := \sum_{i=1}^n e_i^*(x)$</p>

Espaces topologiques	Espaces métriques	Espaces vectoriels normés
Compacité		
<p>(E, \mathcal{O}) espace topologique <u>séparé</u>.</p> <p>Propriété de BOREL-LEBESGUE : (E, \mathcal{O}) compact $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall (U_i)_{i \in \mathbb{I}} \in \mathcal{O}^{\mathbb{I}}$ recouvrement de E d'ouverts, $(E = \bigcup_{i \in \mathbb{I}} U_i)$ on peut en extraire un sous-recouvrement fini $(U_j)_{j \in J}$ avec $J \subset \mathbb{I}$ fini $(E = \bigcup_{k=1}^n U_{i_k})$</p> <p>$\Leftrightarrow \forall (F_i)_{i \in \mathbb{I}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{I}} : \bigcap_{i \in \mathbb{I}} F_i = \emptyset,$ $\exists J \subset \mathbb{I}$ fini : $\bigcap_{k=1}^n F_{i_k} = \emptyset$</p> <p>Une partie $K \subset E$ est compacte si $(K, \mathcal{O} _K)$ compact \Leftrightarrow propriété de Borel-Lebesgue avec des ouverts de E</p> <p>UFK : $\forall (K_i)_{i \in \mathbb{I}}$ compacts, $\bigcup_{i=1}^n K_i$ compact IQK : $\forall (K_i)_{i \in \mathbb{I}}$ compacts, $\bigcap_{i \in \mathbb{I}} K_i$ compact si $\neq \emptyset$ et si $(K_i \neq \emptyset)_i$ suite décroissante, $\bigcap_{i \in \mathbb{I}} K_i \neq \emptyset$ (théorème des compacts emboîtés)</p> <p>Produit de compacts : $((E_i, \mathcal{O}_i)_{i \in \mathbb{I}})$ espaces compacts $\Leftrightarrow (\times_{i \in \mathbb{I}} E_i, \mathcal{O}_{\times})$ compact $(\Leftarrow : E_{\times}$ compact et π_i continues donc $E_i = \pi_i(E_{\times})$ compact \Rightarrow : théorème de TYCHOVONOV, avec la notion de filtre)</p> <p>Fermés et compacts : K fermé $\Leftarrow K$ compact (E, \mathcal{O}) compact et K fermé $\Rightarrow K$ compact</p> <p>Continuité : $f : E \rightarrow F$, (F, \mathcal{O}_F) séparé, K compact et f continue $\Rightarrow f(K)$ compact Donc f application fermée. Mais même si f continue, $f^{-1}(B)$ compact $\not\Rightarrow B$ compact $f(A)$ compact $\not\Rightarrow A$ compact K compact $\not\Rightarrow f^{-1}(K)$ compact</p> <p>La compacité est donc une <i>notion topologique</i> : un espace homéomorphe à un compact est compact.</p> <p>Si $A \cap B = \emptyset$ parties compactes, $\exists U_A, U_B \in \mathcal{O}$ ouverts disjoints : $U_A \supset A$ et $U_B \supset B$</p> <p>Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E_{\text{cv}}^{\mathbb{N}}$, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right\}$ compact</p>	<p>(E, d) espace métrique. (toujours séparé)</p> <p>Propriété de BOLZANO-WEIERSTRASS : (E, d) compact $\Leftrightarrow \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}, \exists \varphi : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N} : x_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell \in E$ $\Leftrightarrow \text{Adh}((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \neq \emptyset$ De toute suite, on peut en extraire une sous-suite convergente dans E</p> <p>Unique valeur d'adhérence : K compact : si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ à valeur dans un compact et $\text{Adh}((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \subset \{x\}$ au plus une valeur d'adhérence alors $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ converge</p> <p>Borel-Lebesgue \Rightarrow Bolzano-Weierstrass car l'intersection $\text{Adh}((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \bigcap_n \overline{\{x_k : k \geq n\}}$ décroissante de fermés non vides est non vide dans un espace compact</p> <p>$(\Rightarrow$ pour produit fini : on prend une suite $E_{\times}^{\mathbb{N}}$ et on effectue par récurr. une extraction pour chaque coordonnée, et après les n extractions, on a une sous-suite convergente pour la topologie produit \Rightarrow pour produit dénombrable : on ne peut faire une infinité d'extractions sans prendre de précautions : avec le procédé diagonal, il reste des termes)</p> <p>Fermés-Bornés et compacts : K compact $\Rightarrow K$ borné pour d (donc fermé borné) (comme tout espace métrique précompact)</p> <p>$\rightarrow f : K \rightarrow F$ continue sur un compact K $\Rightarrow f$ bornée et atteint ses bornes (Im(f) bornée fermée) $\Rightarrow f$ uniformément continue (Théorème de HEINE)</p> <p>Bolzano-Weierstrass \Rightarrow Borel-Lebesgue : (E, d) espace métrique Bolzano-Weierstrass-compact :</p> <ol style="list-style-type: none"> Lemme d'uniformité de LEBESGUE : $(U_i)_{i \in \mathbb{I}} \in \mathcal{O}^{\mathbb{I}}$ recouvrement ouvert de E, alors $\exists r > 0 : \forall x \in E, \exists i_x \in \mathbb{I} : B(x, r) \subset U_{i_x}$ (toute boule de rayon r est contenue dans un ouvert du recouv') B-W-Compacité \Rightarrow Précompactité : $\forall \varepsilon > 0, \exists (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in E^n : E = \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$ (il existe un recouvrement fini de E par des boules de rayon r) $(\Rightarrow$ Un espace métrique compact est séparable) Théorème de BOREL-LEBESGUE : (E, d) est Borel-Lebesgue-compact. 	<p>Théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS : $\forall a, b \in \mathbb{R}, [a, b]$ partie compacte de (\mathbb{R}, \cdot) (construction de la limite supérieure par dichotomie, en utilisant la <i>propriété de la borne sup</i> de \mathbb{R})</p> <p>Parties compactes en EVN de dimension finie :</p> <p>$\rightarrow (X \subset \mathbb{R}^n, \cdot)$ compacte $\Leftrightarrow X$ fermée bornée $(\Rightarrow : X$ bornée donc $\subset [-R, +R]$, qui est compact, donc X partie fermée d'un compact, donc compacte)</p> <p>$\rightarrow (X \subset \mathbb{R}^n, \ \cdot\ _{\infty})$ compacte \Leftrightarrow fermée bornée $(\Rightarrow : X$ bornée donc $\subset [-R, +R]^n$, qui est compact car produit de compacts, donc X partie fermée d'un compact)</p> <p>\rightarrow La sphère unité $S_{\ \cdot\ _{\infty}}(\mathbf{0}_n, 1)$ est compacte</p> <p>\rightarrow Dans $(E, \ \cdot\)$ de dimension finie, toutes les distances sont donc équivalentes à $\ \cdot\ _{\infty}$, donc par isométrie $(E, \ \cdot\) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{K}^{\dim E}, \ \cdot\ _{\infty})$, $(X \subset E, \ \cdot\)$ compacte $\Leftrightarrow X$ fermée bornée</p> <p>$\rightarrow f : K \rightarrow \mathbb{R}$ continu sur un compact K $\Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{R} : f(a) = \inf_K f$ et $f(b) = \sup_K f$</p> <p>En dimension finie, une appl. linéaire est continue : $\dim E < \infty \Rightarrow \text{Lin}(E, F) = \mathcal{L}((E, \ \cdot\ _E), (F, \ \cdot\ _F))$ et norme atteinte $\ f(x_u)\ _F = \ f\$ pour $\ x_u\ _E = 1$ ($\ \cdot\ _E$ équivalente à $\ f(x)\ _{\infty, \mathcal{E}}$ et $\ f(x)\ _{\infty, \mathcal{E}} \leq k \ x\ _{\infty, \mathcal{E}}$ avec $k = \max_{i=1}^n \ f(e_i)\$ f continue sur le compact $S(0_E, 1)$: atteint ses bornes)</p>

Espaces métriques	Espaces vectoriels normés
Complétude	
<p>$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X_{\text{cauchy}, d_E}^{\mathbb{N}}$ suite de Cauchy de (E, d_E)</p> $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N_\varepsilon, \underbrace{d_E(x_p, x_q)}_{\text{ou } d_X} < \varepsilon$ <p>(\Leftrightarrow Ça reste une suite de Cauchy dans tout sous-espace métrique $(X, d _X)$ si les $x_n \in X$)</p> $\Leftrightarrow \text{diam}(X_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ avec } X_n := \{x_k : k \geq n\}$ $\Leftrightarrow \lim_{p, q \rightarrow \infty} d_E(x_p, x_q) = 0 \quad (\text{limite simultanée, abus de notation})$ <p>Convergence \Rightarrow Cauchy-convergence Une suite de Cauchy est bornée</p> <p>(E, d_E) espace complet $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} E_{\text{cauchy}, d_E}^{\mathbb{N}} = E_{\text{cv}, d_E}^{\mathbb{N}}$ (toute suite de Cauchy est convergente dans E)</p> <p>$((E_i, d_i))_{i \in \mathbb{N}}$ suite finie d'espaces complets $\Rightarrow (\times_{i=1}^n E_i, d_X)$ complet</p> <p>(E, d_E) complet $\Rightarrow \forall A \in \mathcal{F}$ fermé, $(A, d _A)$ complet $(A \subset E, d _A)$ complet $\Rightarrow A \in \mathcal{F}_{(E, d_E)}$ fermé (cv \Rightarrow Cauchy-cv \Rightarrow cv dans A)</p> <p>La complétude est une propriété métrique, pas topologique :</p> <p>(X, d_Y) isométrique à (Y, d_Y) complet $\Rightarrow (X, d_X)$ complet (d_1, d_2) Lipschitz équivalentes $\Rightarrow X_{\text{cauchy}, d_1}^{\mathbb{N}} = X_{\text{cauchy}, d_2}^{\mathbb{N}}$</p> <p>$(X, d_X)$ homéomorphe à (Y, d_Y) complet $\Leftrightarrow (X, d_X)$ complet (d_1, d_2) topologiquement équiv. $\Leftrightarrow X_{\text{cauchy}, d_1}^{\mathbb{N}} = X_{\text{cauchy}, d_2}^{\mathbb{N}}$ (ex : \mathbb{R} complet homéomorphe à $]0, 1[$ non complet)</p> <p>Mais si $\exists \varphi \in \text{Homeo}((X, d_X), (Y, d_Y))$ uniformément continu, (Y, d_Y) complet $\Rightarrow (X, d_X)$ complet (faux dans l'autre sens)</p> <p>$(x_n)_n \in X_{\text{cauchy}}^{\mathbb{N}}$ suite de Cauchy $\Rightarrow \text{Adh}((x_n)_n) \leq 1$ Et si $\text{Adh}((x_n)_n) = \{x\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ (possède au plus 1 valeur d'adhérence, et converge dès qu'elle en a une) $\rightarrow (E, d_E)$ compact $\Rightarrow (E, d_E)$ complet !</p> <p>Théorème des fermés emboîtés : $(F_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathcal{F} \setminus \{\emptyset\})^{\mathbb{N}}$ suite de fermés non vides, décroissante $(F_{n+1} \subset F_n)$, tq $\text{diam}(F_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Alors l'intersection se réduit à un point $\exists x \in E : \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \{x\}$</p> <p>Théorème du point fixe de PICARD :</p> <p>(E, d) espace métrique <i>complet</i> $f : E \rightarrow E$ strictement contractante pour (E, d) $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} f$ est k-lipschitzienne pour $k < 1$ ($\Delta \Leftrightarrow \forall x, y \in E, d(f(x), f(y)) < d(x, y)$) Alors f admet un unique point fixe : $\exists ! a \in E : f(a) = a$ Et il est obtenu comme limite des itérés de tout $x_0 \in E$: $a = \lim_{n \rightarrow \infty} (o^n f)(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ avec $x_{n+1} := f(x_n)$ Vitesse de convergence : $d(x_n, a) \leq \frac{k^n}{1-k} \alpha$ avec $\alpha = d(f(x_0), x_0)$</p> <p>$(x_n)_n$ suite de Cauchy (par double récurrence en utilisant la lipschitzianité) avec $N_\varepsilon = \max\left(0, \left\lceil \frac{\ln(\varepsilon/\alpha)}{2 \ln(k)} + \frac{1}{2} \right\rceil\right)$ donc convergente vers a, puis continuité pour point fixe</p>	<p>(\mathbb{R}, \cdot) complet, par complétion de (\mathbb{Q}, \cdot)</p> <p>$(E, \ \cdot\)$ espace de Banach $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ espace vectoriel normé complet $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espace de Hilbert $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ espace préhilbertien complet</p> <p>$\forall n \geq 1, (\mathbb{R}^n, \ \cdot\)$ complet ($\ \cdot\$ quelconque) EVN de dimension finie \Rightarrow complet !</p> <p>$\rightarrow F \subset E$ sous-EVN de $\dim(F) < \infty \Rightarrow F \in \mathcal{F}_E$ fermé</p>
	<p>Espace des opérateurs bornés/continus :</p> <p>$(F, \ \cdot\ _F)$ complet $\Rightarrow (\mathcal{L}((E, \ \cdot\ _E), (F, \ \cdot\ _F)), \ \cdot\)$ complet \rightarrow Le dual topo $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ toujours complet</p>
<p>Espaces de convergence uniforme des suites/fonctions bornées :</p> <p>(F, d_F) complet $\Rightarrow (\mathcal{FB}(E, (F, d_F)), d_\infty)$ et $(F^{\mathbb{N}} \ell^\infty, d_\infty)$ complets (K, d_K) compact et (F, d_F) complet $\Rightarrow (\mathcal{C}^0((K, d_K), (F, d_F)), d_\infty)$ complet</p> <p>Espace produit, cas dénombrable :</p> <p>$((E_i, d^{(i)}))_{i \in \mathbb{N}}$ famille dénombrable d'espaces complets bornés ($d^{(i)}$ bornée) $\Rightarrow (\times_{i \in \mathbb{N}} E_i, d_X)$ complet avec $d_X(\cdot, \cdot) = \sup_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{i+1} d^{(i)}(\cdot, \cdot)$</p>	<p>Espaces non complets en général :</p> <p>$(E^{\mathbb{N}} \ell^p, \ \cdot\ _\infty)$, $(C^0(K, F), \ \cdot\ _p)$ pour $p \in [1, +\infty[$</p>