Espaces topologiques

$\mathcal{O} \subset \wp(E)$ **topologie** de $E \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

- $E, \varnothing \subset \mathcal{O}$
- IFO : $\forall (U_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathcal{O}^n, \quad \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{O}$
- UQO : $\forall (U_i)_{i \in \mathbb{I}} \in \mathcal{O}^{\mathbb{I}}, \quad \bigcup_{i \in \mathbb{I}} U_i \in \mathcal{O}$

$\mathcal{O}'$ **plus fine** / **moins fine** que $\mathcal{O} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$ / $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$

Une **intersection de topologies** et encore une topologie

Topologie engendrée par $\mathcal{A} \subset \wp(E)$:

$\mathcal{O}(\mathcal{A}) := \bigcap \{\mathcal{O}$ topologie sur $E : \mathcal{A} \subset \mathcal{O}\}$

(topologie la moins fine sur E contenant $\mathcal{A}$; plus petit élément de l'intersection)

$\mathcal{B} \subset \wp(E)$ **base de topologie** sur $E \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

- $\bigcup \mathcal{B} = E$
- $\forall X, Y \in \mathcal{B}, \ \exists \mathcal{A} \subset \mathcal{B} : X \cap Y = \bigcup \mathcal{A}$

(l'intersection de 2 elems de $\mathcal{B}$ est la réunion d'élems de $\mathcal{B}$)

$\mathcal{B}$ est une base de topologie pour une topologie $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ si elle l'engendre : $\mathcal{O}_{\mathcal{B}} = \mathcal{O}(\mathcal{B})$. Alors :

$$
\begin{aligned}
& U \in \mathcal{O}_{\mathcal{B}} \quad \text{(ouvert)} \\
\Longleftrightarrow \ & \exists (U_i)_{i \in I} \in \mathcal{B}^I : U = \textstyle\bigcup_{i \in I} U_i \\
\Longleftrightarrow \ & \forall x \in U, \ \exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subset U
\end{aligned}
$$

Un espace topologique $(E, \mathcal{O})$ est à base dénombrable si $\exists \mathcal{B}$ base **dénombrable** d'ouverts engendrant $\mathcal{O}$.

$\mathcal{O}_E$ base de topologie sur E pour $\mathcal{O}_E$.
En général, $\mathcal{B}$ engendrant $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ non unique.

Topologie grossière : $\mathcal{O} = \{E, \varnothing\}$ (moins fine possible)

Topologie **discrète** : $\mathcal{O} = \wp(E)$ (plus fine possible; séparée)

Toute partie y est à la fois fermée et ouverte
Toute fonction $E \longrightarrow F$ est continue
Compact $\Leftrightarrow E$ fini Connexe $\Leftrightarrow E = \{x\}$ ou $\varnothing$
Distance discrète : $d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

$A \subset E$ est une **partie discrète** si $\mathcal{O}_{|A}$ est la topo. discrète
$\Leftrightarrow \ A = \mathrm{Isol}_{\mathcal{O}_E}(A)$ (tout point est isolé)

$\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ partie discrète de $\mathbb{R}$

Espaces métriques

$E \neq \varnothing$ ensemble de points.

$d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ **distance** sur $E \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (vraie distance)
- $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie)
- $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire)

Les 3 axiomes impliquent que $d(x, y) \in \mathbb{R}^+$

$\hookrightarrow$ Inégalité triangulaire : $|d(x, y) - d(y, z)| \leqslant d(x, z)$

Boule ouverte : $\mathrm{B}_d(a, r) := \{x \in E : d(x, a) < r\}$
Boule fermée : $\mathrm{B}_d^{\mathrm{f}}(a, r) := \{x \in E : d(x, a) \leqslant r\}$
Sphère : $\mathrm{S}_d(a, r) := \{x \in E : d(x, a) = r\}$
de centres $a \in E$ et de rayon $r \in \mathbb{R}^+$

Topologie naturelle de l'espace métrique (E, d) :
topologie $\mathcal{O}_d$ engendrée par les boules ouvertes
$\Leftrightarrow \mathcal{B}_O := \{\mathrm{B}_d(x, r) : x \in E, r \in \mathbb{R}^+\}$ base de topologie

$(E, \mathcal{O}_E)$ **métrisable** $\Leftrightarrow \exists d$ distance : $\mathcal{O}_E = \mathcal{O}(\mathcal{B}_O^d)$
(pas unique : λd engendre la même topologie)

d_1 et d_2 **topologiquement équivalentes** (rel. d'équiv.)

$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ engendrent la même topologie : $\mathcal{O}(\mathcal{B}_O^{d_1}) = \mathcal{O}(\mathcal{B}_O^{d_2})$

$\Leftrightarrow \ \forall x \in E, \ \forall r > 0, \ \exists r_1, r_2 > 0 : \begin{cases} \mathrm{B}_{d_1}(x, r_1) \subset \mathrm{B}_{d_2}(x, r) \\ \mathrm{B}_{d_2}(x, r_2) \subset \mathrm{B}_{d_1}(x, r) \end{cases}$

d_1 et d_2 **distances Lipschitz-équivalentes** si

$$
\begin{aligned}
& \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^* : \ \alpha \, d_1(\cdot, \cdot) \leqslant d_2(\cdot, \cdot) \leqslant \beta \, d_1(\cdot, \cdot) \\
\Longleftrightarrow \ & \exists C \in \mathbb{R}_+^* : \ C^{-1} d_1(\cdot, \cdot) \leqslant d_2(\cdot, \cdot) \leqslant C \, d_1(\cdot, \cdot)
\end{aligned}
$$

$\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ d_1 et d_2 topologiquement équivalentes

(ex: $d_{\mathsf{b}}(\cdot, \cdot) := \min(1, d(\cdot, \cdot))$ distance bornée, topologiquement équivalente avec d, mais pas équivalente si d non bornée)

$\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* : d_1(\cdot, \cdot) \leqslant \alpha \, d_2(\cdot, \cdot) \implies \mathcal{O}_{d_2}$ plus fine que $\mathcal{O}_{d_1}$

Diamètre d'une partie $X \subset E$ non vide :
$\mathrm{diam}(X) := \sup_{x, y \in X} d(x, y)$

$A \subset X$ est dite **bornée** si $\mathrm{diam}(X) < +\infty$
$\Leftrightarrow \ d$ majorée sur $A \times A$
$\Leftrightarrow \ \exists x \in X, r > 0 : A \subset \mathrm{B}_d(x, r)$

Distance d'un point $x \in E$ **à une partie** $X \subset E$ non vide :
$\mathrm{dist}(x, X) := \inf_{y \in X} d(x, y)$

Distance entre deux parties $X, Y \subset E$ non vides :
$\mathrm{dist}(X, Y) := \inf_{x \in X, \, y \in Y} d(x, y)$

$x \mapsto d(x, a)$ et $x \mapsto d(x, A)$ 1-lipschitziennes donc continues

Espaces vectoriels normés

E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ corps valué

$\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ **norme** sur $E \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

- $\|x\| = 0 \implies x = 0_E$
- $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (inégalité de Minkowski)

(applicat° homogène minkowskienne définie positive)

$\hookrightarrow$ Inégalités triangulaires : $\big| \|x\| - \|y\| \big| \begin{array}{l} \leqslant \|x - y\| \\ \leqslant \|x + y\| \end{array}$

Distance naturelle engendrée par $\|\cdot\|$:
$d_{\|\cdot\|}(x, y) := \|x - y\|$
Elle est invariante par translation et telle que $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \, d(y, x)$

$\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ **normes équivalentes** si
$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^* : \alpha \|\cdot\|_1 \leqslant \|\cdot\|_2 \leqslant \beta \|\cdot\|_1$
(pour monter la non équivalence, on exhibe une suite telle que $\|x_n\|_1 / \|x_n\|_2 \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$)

$\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ normes équivalentes
$\Longleftrightarrow \|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ **topologiquement** équivalentes

En **dimension finie** et si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,
toutes les normes sont **équivalentes**

Espace préhilbertien réel $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$:
$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ **produit scalaire** $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bilinéaire ($\Leftrightarrow \langle x, \cdot \rangle \in \mathrm{Lin}(E)$ par sym.)
- $\langle x, x \rangle \geqslant 0$ et $\langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0_E$

(forme bilinéaire symétrique définie positive)

Inég. de **Cauchy-Schwarz** : $\begin{array}{l} \langle x, y \rangle^2 \leqslant \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle \\ |\langle x, y \rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\| \end{array}$

Norme euclidienne : $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

$$
\begin{aligned}
\text{Minkowski : } \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\
&= \langle x, x \rangle + 2 \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\
\text{(Cauchy-Schwarz)} \quad &\leqslant \|x\|^2 + 2 \|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned}
$$

Distance à F sous-EV de E de dimension *finie* :
$d(x, F) = \|x - \pi_F(x)\|$ (et $d(x, F)^2 = \|x\|^2 - \|\pi_F(x)\|^2$)
(est un minimum, atteint uniqu' en la **proj. orthogonale** π_F)

$\|\cdot\|$ est 1-lipschitzienne (inégalité triangulaire)
$(x, y) \longmapsto x + y$ est 2-lipschitzienne
$(\lambda, y) \longmapsto \lambda \cdot y$ est continue
(pour les topo produit de $E \times E$ et $\mathbb{K} \times E$)

$(\mathbb{R}, +, \cdot, \geq)$ corps commutatif *totalement* ordonné
$\to$ permet de définir $\max(x, y)$, $|x| := \max(x, -x)$, et ainsi $d_{\mathsf{u}}(x, y) = |x - y|$
Topologie de l'ordre, Topologie usuelle $\mathcal{O}_{\mathsf{u}}$ de $\mathbb{R}$

Toute partie non vide majorée/minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne sup/inf

$$
\begin{aligned}
a = \inf X \iff & \begin{cases} \forall x \in X, \ a \leqslant x \\ \forall \varepsilon > 0, \ \exists x \in X : a + \varepsilon > x \end{cases} \iff \begin{cases} \forall x \in X, \ a \leqslant x & \text{(minorant)} \\ \exists (x_n) \in X^{\mathbb{N}} : x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a \end{cases} \\
\iff & a = \underbrace{\max \mathfrak{Min}(X)}_{\text{existe dans } \mathbb{R}} \quad \text{avec} \quad \mathfrak{Min}(X) = \{a \in \mathbb{R} : \forall x \in X, \ a \leqslant x\} \text{ minorants de } X
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b = \sup X \iff & \begin{cases} \forall x \in X, \ x \geqslant b \\ \forall \varepsilon > 0, \ \exists x \in X : b - \varepsilon < x \end{cases} \iff \begin{cases} \forall x \in X, \ b \leqslant x & \text{(minorant)} \\ \exists (x_n) \in X^{\mathbb{N}} : x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} b \end{cases} \\
\iff & b = \underbrace{\min \mathfrak{Maj}(X)}_{\text{existe dans } \mathbb{R}} \quad \text{avec} \quad \mathfrak{Maj}(X) = \{b \in \mathbb{R} : \forall x \in X, \ x \geqslant b\} \text{ majorants de } X
\end{aligned}
$$

Intervalles de $\mathbb{R}$: $I \subset \mathbb{R}$ intervalle $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ I convexe $\Leftrightarrow$ $\forall a, b \in I : a \leqslant b, \ [a, b] \subset I$
(avec le segment $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\} = \{(1 - t) a + t b : t \in [0, 1]\}$)

$$
\iff I \in \left\{ \left\{ x \in \mathbb{R} : a \left\{ \begin{matrix} \leqslant \\ < \end{matrix} \right\} x \left\{ \begin{matrix} \leqslant \\ < \end{matrix} \right\} b \right\} : a, b \in \bar{\mathbb{R}} \right\} \backslash \{\bar{\mathbb{R}}\} \quad (\mathbb{R} \text{ et } \varnothing \text{ inclus})
$$

G sous-groupe $\substack{\neq \{0\} \\ \neq \mathbb{R}}$ de $(\mathbb{R}, +)$, $a := \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$
$\to \ a = 0 \implies \bar{G} = \mathbb{R}$ **dense** $\implies G$ non fermé
$\to \ a \neq 0 \implies G = a \mathbb{Z}$ **discret** $\implies G$ fermé
$\to \ \alpha \mathbb{Z} + \beta \mathbb{Z}$ fermé $\iff \dfrac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$ rapport *rationnel*
$\to \ {}^{\complement}\mathbb{Q}$ irrationnels denses dans $\mathbb{R}$ (avec $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$)

Norme sup $\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_\infty := \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$ sur $\mathbb{K}^{\mathbb{N}} \ell^\infty$: Homogénéité :

$$
\begin{aligned}
& \|\lambda \cdot (x_n)_n\|_\infty = \sup_n |\lambda \, x_n| = |\lambda| \sup_n |x_n| = |\lambda| \cdot \|(x_n)_n\|_\infty \\
& \text{car } \forall n, \ |\lambda \, x_n| = |\lambda| \, |x_n| \leqslant |\lambda| \sup_n |x_n| \\
& \qquad \text{donc } \sup_n |\lambda \, x_n| \leqslant |\lambda| \sup_n |x_n| \\
& \text{et en posant } \lambda' = 1/\lambda \text{ et } x'_n = \lambda \, x_n, \text{ avec ci-dessus,} \\
& \qquad \sup_n \underbrace{|\lambda' \, x'_n|}_{= |x_n|} \leqslant |\lambda'| \sup_n |x'_n| = \frac{1}{\lambda} \sup_n |\lambda \, x_n| \\
& \quad \text{donc } |\lambda| \sup_n |x_n| \leqslant \sup_n |\lambda \, x_n|
\end{aligned}
$$

Espace $\mathbb{C}^{\mathbb{N}} \ell^2$ muni de $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} \overline{u_n} v_n$, bien défini car
$0 \leqslant |a - b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2 |ab|$ donc $\sum_n |u_n v_n| \leqslant \frac{1}{2} (\|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2) < +\infty$
donc $\sum_n \overline{u_n} v_n$ ACV donc CV et $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$ fini
et $\mathbb{C}^{\mathbb{N}} \ell^2$ bien un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ car

$$
\left\{
\begin{array}{c}
\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2 + 2 \, \mathfrak{Re}(\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle) < +\infty \quad \text{car } \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle, \|\boldsymbol{u}\|, \|\boldsymbol{v}\| \text{ finis} \\
\text{ou } (|a + b| \leqslant |a| + |b| \leqslant 2 \max(|a|, |b|))^p \leqslant 2^p \max(|a|^p, |b|^p) \leqslant 2^p (|a|^p + |b|^p) \\
\implies \|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2 \leqslant 4 \|\boldsymbol{u}\|^2 + 4 \|\boldsymbol{v}\|^2 < +\infty \\
\text{ou Cauchy-Schwarz} \Rightarrow \text{Minkowski} \quad \|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2 \leqslant \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2 < +\infty
\end{array}
\right\}
$$

Norme $p \in [1, +\infty[$ sur

- $\ell^p = \mathrm{L}^p$ avec $\|f\|_p^p = \int |f|^p < +\infty$
- $\ell^p = \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \ell^p$ avec $\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_p^p = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < +\infty$ ($\Leftrightarrow$ mesure de comptage)
- $\ell^p = \mathbb{K}^n$ avec $\|(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}\|_p^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p$

Inégalité de Hölder : $\forall p, q \in [1, +\infty] : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \ \forall f \in \ell^p, \ \forall g \in \ell^q,$
$fg \in \ell^1$ et $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q$

Espaces topologiques	**Espaces métriques**	**Espaces vectoriels normés**
Ouverts, Fermés, Voisinages, Intérieurs, Adhérences		
$\mathcal{O}_E$ sont les **ouverts** de l'espace topologique $(E,\mathcal{O}_E)$ $F\in E$ **fermé** $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $^{\complement}F$ ouvert $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $F\in\mathcal{F}_{\mathcal{O}_E}$ avec $\mathcal{F}_{\mathcal{O}_E}:=\{F\in E : E\backslash F\in\mathcal{O}_E\}$ $\mathcal{F}$ est stable par : – $\bigcup$ finie – $\bigcap$ quelconque	$U\in E$ **ouvert** $\Leftrightarrow$ $\forall x\in U,\ \exists r_x>0 : \mathrm{B}(x,r_x)\subset U$ $\Leftrightarrow$ réunion de boules ouvertes Les boules ouvertes sont des ouverts. Les boules fermées sont des fermés. (par inegalité triangulaire) Critère du caractère fermé / **distance à un fermé** : $F\in\mathcal{F}\backslash\{\varnothing\}$ fermé $\iff$ $\forall x\in E,\ \ \mathrm{dist}(x,F)=0 \iff x\in F$ $\qquad\qquad\qquad > \qquad\quad \notin$ (de façon équivalente)	
Voisinages de $x\in E$: $\mathrm{Vois}_{\mathcal{O}_E}(x):=\{V\in E : \exists U\in\mathcal{O}_E : x\in U\subset V\}$ (V voisinage de $x\iff$ contient un ouvert qui contient V) $\mathrm{Vois}(x)$ est stable par : – $\bigcap$ finie – $\bigcup$ quelconque Propriété locale : P est vraie localement en $x\in E$ $\iff \exists V\in\mathrm{Vois}(x) : P$ vraie sur V $U\in\mathcal{O} \iff \forall x\in U,\ U\in\mathrm{Vois}(x)$ (ouvert $\iff$ voisinage de chacun de ses points)	$V\subset E$ **voisinage** de $x\in E$ $\Leftrightarrow$ $\exists\, r>0 : \mathrm{B}(x,r)\subset V$ (contient une boule centrée en x) (grâce au sys fonda de voisinages)	
$\mathcal{V}_x$ **système fondamental de voisinages** de x $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ • $\mathcal{V}_x\subset\mathrm{Vois}(x)$ • $\forall V\in\mathrm{Vois}(x),\ \exists U\in\mathcal{V}_x : U\subset V$ Existe toujours : Si $\mathcal{B}$ base de topologie pour E, $\{U\in\mathcal{B} : x\in U\}$ est un système fondamental de voisinages Un espace topologique $(E,\mathcal{O})$ est à **base dénombrable de voisinages** si $\forall x\in E$, $\exists\mathcal{V}_x$ système fondamental de voisinages au plus dénombrable. Base dénombrable $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ Base dénombrable de voisinages	$\mathcal{V}_x=\{\mathrm{B}(x,r) : r>0\}$ est un système fondamental de voisinages de x $\mathcal{V}_x=\{\mathrm{B}(x,{}^1\!/_n) : n\in\mathbb{N}\}$ est un système fondamental dénombrable de voisinages de x. $\to$ Les espaces métriques sont à base dénombrable de voisinages	
Adhérence de $X\subset E$: $\bar{X}=\mathrm{Adh}_{\mathcal{O}_E}(X):=\left\{x\in E : \forall V\in \begin{smallmatrix}\mathrm{Vois}_{\mathcal{O}_E}(x)\\ \mathcal{V}_x\end{smallmatrix}, X\cap V\neq\varnothing\right\}$ (x adhérent à $X\iff X$ intersecte tout ouvert contenant x) $\bar{X}$ est le plus petit fermé contenant X : $\to$ $X\subset\bar{X}\in\mathcal{F}_{\mathcal{O}_E}$ et $\forall F\in\mathcal{F},\ X\subset F\Rightarrow\bar{X}\subset F$ $\to$ $\bar{X}=\bigcap\{F\in\mathcal{F} : F\supset X\}$ $\to$ $\bar{F}=F \Leftrightarrow F\in\mathcal{F}$ fermé	**Adhérence** : $\bar{X}=\{x\in E : \forall\, r>0,\ \mathrm{B}(x,r)\cap X\neq\varnothing\}$ $\ \ =\{x\in E : \mathrm{dist}(x,X)=0\}$ $\forall X\subset E$ non vide, $\forall x\in E$, $\mathrm{dist}(x,X)=\mathrm{dist}(x,\bar{X})$	$\forall x\in E,\ \forall r>0,\quad \overline{\mathrm{B}(x,r)}=\mathrm{B}^{\mathrm{f}}(x,r)$ F sous-EV de E $\Rightarrow$ $\bar{F}$ sous-EV de E $\overline{A+B}$? $\overline{\mathbb{K}A+\mathbb{K}B}$? $\overline{\langle A\cup B\rangle_+}$
Intérieur de $X\subset E$: $\mathring{X}=\mathrm{Int}_{\mathcal{O}_E}(X):=\{x\in E : X\in\mathrm{Vois}(x)\}$ $\qquad\qquad\qquad=\{x\in X : \exists U\in\mathcal{O} : x\in U\subset X\}$ (x point intérieur $\iff X$ voisinage de x) $\mathring{X}$ est le plus grand ouvert contenu dans X : $\to$ $X\supset\mathring{X}\in\mathcal{O}_E$ et $\forall U\in\mathcal{O},\ U\subset X\Rightarrow U\subset\mathring{X}$ $\to$ $\mathring{X}=\bigcup\{U\in\mathcal{O} : U\subset X\}$ $\to$ $\mathring{U}=U \Leftrightarrow U\in\mathcal{O}$ ouvert	**Intérieur** : $\mathring{X}=\{x\in X : \exists\, r>0 : \mathrm{B}(x,r)\subset X\}$ $\ \ =\{x\in E : \mathrm{dist}(x,{}^{\complement}X)>0\}$	$\forall x\in E,\ \forall r>0,\quad \mathring{\mathrm{B}^{\mathrm{f}}}(x,r)=\mathrm{B}(x,r)$ F sous-EV strict de dimension finie $(\dim F<\dim E)$ $\Rightarrow$ $\mathring{F}=\varnothing$
Frontière de $X\subset E$: $\partial X=\mathrm{Fr}_{\mathcal{O}_E}(X):=\bar{X}\backslash\mathring{X}$ $\partial X=\left\{x\in E : \forall V\in\mathrm{Vois}(x),\ \begin{smallmatrix}V\cap X\neq\varnothing\\ V\cap{}^{\complement}X\neq\varnothing\end{smallmatrix}\right\}$ Fermée car intersection $\bar{X}\cap{}^{\complement}\mathring{X}$ de fermés		$\forall x\in E,\ \forall r>0,\quad \partial\mathrm{B}(x,r)\subset\mathrm{S}(x,r)$
Points isolés de $X\subset E$: $\mathrm{Isol}_{\mathcal{O}_E}(X):=\{x\in X : \exists V\in\mathcal{V}(x) : V\cap X=\{x\}\}$ **Points d'accumulation** de $X\subset E$: $\mathrm{Acc}_{\mathcal{O}_E}(X):=\{x\in X : \forall V\in\mathcal{V}(x) : V\cap X\neq\{x\}\}$ (tous ses voisinages rencontrent X en un autre point que x) $\forall X\subset E,\ \ \mathrm{Acc}(X)\cap\mathrm{Isol}(X)=\varnothing$ $\qquad\qquad\ \mathrm{Acc}(X)\cup\mathrm{Isol}(X)=\mathrm{Adh}(X)$ En général, aucune relation entre $X,\mathring{\bar{X}},\bar{\mathring{X}}$ $\overset{\circ}{\widehat{\bigcup_{i\in\mathbb{I}}X_i}}\supset\bigcup_{i\in\mathbb{I}}\mathring{X}_i\qquad\overline{\bigcap_{i\in\mathbb{I}}X_i}\subset\bigcap_{i\in\mathbb{I}}\overline{X_i}$ $\overset{\circ}{\widehat{\bigcap_{i\in\mathbb{I}}X_i}}\underset{\mathbb{I}\text{ fini}}{\overset{\subset}{=}}\bigcap_{i\in\mathbb{I}}\mathring{X}_i\qquad\overline{\bigcup_{i\in\mathbb{I}}X_i}\underset{\mathbb{I}\text{ fini}}{\overset{\supset}{=}}\bigcup_{i\in\mathbb{I}}\overline{X_i}$ ${}^{\complement}\bar{X}=\overset{\circ}{\widehat{{}^{\complement}X}}\qquad{}^{\complement}\mathring{X}=\overline{{}^{\complement}X}$		
Topologie induite		
Topologie induite sur $A\subset E$ par $\mathcal{O}_E$: $\mathcal{O}_{\vert A}:=\{U\cap A : U\in\mathcal{O}_E\}$, qui est une topo pour A ($U\cap A$ est la **trace** de U sur A) U ouvert rel. de A $\Leftrightarrow$ $\exists X\in\mathcal{O}_E : U=X\cap A$ F fermé rel. de A $\Leftrightarrow$ $\exists X\in\mathcal{F}_{\mathcal{O}_E} : F=X\cap A$ $\Leftrightarrow$ $^{\complement}F$ ouvert relatif de A Pour $x\in A$ et $X\subset A$: $\mathrm{Int}_A(X)\supset\mathrm{Int}_E(X)\cap A$ Ex: $A=\mathcal{F}/\mathcal{O}\Rightarrow\mathrm{Int}_A(A)=A\neq\mathrm{Int}_E(A)\cap A$ $\mathrm{Vois}_A(x)=\{V\cap A : V\in\mathrm{Vois}_E(x)\}$ $\mathrm{Adh}_A(X)=\mathrm{Adh}_E(X)\cap A$ $\mathrm{Fr}_A(X)\subset\mathrm{Fr}_E(X)\cap A$	**Distance induite** sur A : $d_{\vert A}:=d_{\vert A\times A}$ définit une distance sur A $\to$ Engendre la topologie induite $\mathcal{O}_{\vert A}$ car $\mathrm{B}_{d_{\vert A}}(x,r) = \mathrm{B}_d(x,r)\cap A \subset \mathrm{B}_d(x,r)$	**Norme induite** sur A : $\Vert\cdot\Vert_A:=\Vert\cdot\Vert_{\vert A}$ norme sur A (trivial...)

<table>
<tr><th>Espaces topologiques</th><th>Espaces métriques</th><th>Espaces vectoriels normés</th></tr>
<tr><td colspan="3">Densité, Séparabilité</td></tr>
<tr>
<td>
$X \subset E$ dense dans $Y \subset E \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} Y \subset \bar{X}$

Si $X \subset Y \subset E$ dense dans Y fermé, alors $\bar{X} = Y$
car alors $Y \underset{\text{dense}}{\subset} \bar{X} \underset{X \subset Y}{\subset} \bar{Y} \underset{\text{fermé}}{=} Y$

$X \subset E$ dense dans E
$\Leftrightarrow \bar{X} = E \Leftrightarrow \overset{\circ}{\widehat{\complement X}} = \varnothing$
$\Leftrightarrow \forall x \in E, \forall V \in \begin{matrix}\text{Vois}_{\mathcal{O}_E}(x) \\ \mathcal{V}_x\end{matrix}, V \cap X \neq \varnothing$
(tout point de E est adhérent à X)
$\Leftrightarrow \forall U \subset \mathcal{B}_{\mathcal{O}_E}, U \cap X \neq \varnothing$ avec $\mathcal{B}_{\mathcal{O}_E}$ base de topologie
(tout ouvert de base contient un point de X)
$\Leftrightarrow E$ est l'unique fermé $\supset X$

$(E, \mathcal{O}_E)$ espace topologique séparable $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$
$\exists X \subset E$: X dénombrable et dense dans E
À base dénombrable d'ouverts $\Longrightarrow$ Séparable

Produit de séparables :
$\big((E_i, \mathcal{O}_i)\big)_{i \in \mathbb{N}}$ famille dénombrable d'espaces séparables
$\Longrightarrow \big(\times_{i \in \mathbb{N}} E_i, \mathcal{O}_\times\big)$ séparable
</td>
<td>
$X \subset E$ dense dans E
$\Longleftrightarrow \forall x \in E, \forall r \gt 0, \mathrm{B}(x, r) \cap X \neq \varnothing$
$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon \gt 0, \forall y \in E, \exists x \in X : d(x, y) \lt \varepsilon$
(tout $y \in E$ est approché arbitrairement près par un $x \in X$)

Si espace métrisable, alors
À base dénombrable d'ouverts $\Longleftrightarrow$ Séparable
$(X = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ dense dans E
$\Longrightarrow \mathcal{B} = \{\mathrm{B}(x_n, {}^1\!/_m)\}_{n, m \in \mathbb{N}^*}$ base de topologie dénombrable)
</td>
<td>
$X \subset E$ partie totale de E
$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ Vect(X) dense dans E
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon \gt 0, \forall y \in E,$
$\exists ((x_i, \lambda_i))_{1 \leqslant i \leqslant k} \in (X \times \mathbb{K})^k : \left\Vert x - \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \right\Vert \lt \varepsilon$
(tout $y \in E$ est arbitrairement proche d'une combinaison linéaire (finie) d'éléments de X)

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$,
$\exists X \subset E$ partie totale dénombrable $\Rightarrow E$ séparable
(coeffs de la comb.lin. $\in \mathbb{K}$ indenombrable)

$\rightarrow$ L^p et $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\ell^p$ séparables pour $1 \leqslant p \lt \infty$
(mais L^∞ et $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\ell^\infty$ non séparables)

Dans $(\mathbb{R}, \vert\cdot\vert)$,
$\forall U \in \mathcal{O}, \exists \big(]a_n, b_n[\big)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{O}^{\mathbb{N}}_{\cap \varnothing} : U = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}}]a_n, b_n[$
tout ouvert est l'union disjointe d'une famille dénombrable d'intervalles ouverts (ses composantes connexes)
par séparabilité de $(\mathbb{R}, \vert\cdot\vert)$
⚠ faux avec les fermés
</td>
</tr>
<tr><td colspan="3">Séparation</td></tr>
<tr>
<td>
$(E, \mathcal{O}_E)$ espace topologique séparé $(\mathrm{T}_2) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$
$\forall (x, y) \in E^2_{\neq}, \exists V_x \in \text{Vois}(x), V_y \in \text{Vois}(y) : V_x \cap V_y = \varnothing$
$\Leftrightarrow$ tout singleton $\{x\}$ est fermé
(points distincts $\Rightarrow \exists$ voisinages respectifs disjoints)

Critère avec l'espace produit :
$(E, \mathcal{O})$ séparé $\Longleftrightarrow \Delta = \{(x, x) : x \in E\}$ fermé de $(E \times E, \mathcal{O}_\times)$

$(E, \mathcal{O}_E)$ séparé et $\exists f : E \hookrightarrow F \in \mathcal{C}^0_{\mathcal{O}_E, \mathcal{O}_F}$ continue <u>injective</u>
$\Longrightarrow (F, \mathcal{O}_F)$ séparé (séparation : notion toplogique)

Produit de séparés :
$\big((E_i, \mathcal{O}_i)\big)_{i \in \mathbb{I}}$ espaces séparés $\Longleftrightarrow \big(\times_{i \in \mathbb{I}} E_i, \mathcal{O}_\times\big)$ séparé
</td>
<td>
Tout espace métrique/métrisable est séparé.
$(l = d(x, y) \neq 0 \Rightarrow \mathrm{B}(x, {}^l\!/_3) \cap \mathrm{B}(y, {}^l\!/_3) = \varnothing)$
</td>
<td></td>
</tr>
<tr><td colspan="3">Connexité</td></tr>
<tr>
<td>
$(E, \mathcal{O})$ connexe
$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \nexists U, V \in \mathcal{O} \backslash \{\varnothing\} : U \sqcup V = E$ $(U \cup V = E$ et $U \cap V = \varnothing)$
(E ne se partitionne pas en deux ouverts)
$\Leftrightarrow \mathcal{O} \cap \mathcal{F} = \{E, \varnothing\}$
(les seuls ouverts-fermés sont E et $\varnothing$)
$A \subset E$ partie connexe $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} A \in \text{Cnx}(E, \mathcal{O}) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$
$(A, \mathcal{O}_{\vert A})$ connexe

A partie connexe $\Longrightarrow$ $\mathring{A}$ connexe (mais $\not\Rightarrow$ $\mathring{A}$ connexe)
$A \subset X \subset \overline{A} \Longrightarrow B$ connexe

$\exists (A_i)_{i \in \mathbb{I}} \in \text{Cnx}(E, \mathcal{O})^{\mathbb{I}} : \bigcap_{i \in \mathbb{I}} A_i \neq \varnothing \Longrightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{I}} A_i$ connexe
$\exists$ recouvrement de E par des parties connexes d'$\cap \neq \varnothing$
$\Longrightarrow (E, \mathcal{O})$ connexe

Lemme du passage des douanes : A, C parties non vides
C connexe, $C \cap \mathring{A} \neq \varnothing$, $C \cap \complement\overline{A} \neq \varnothing \Longrightarrow C \cap \partial A \neq \varnothing$
(C intersecte l'intérieur et l'exterieur de $A \Rightarrow$ intersecte la frontière)

$(E, \mathcal{O})$ connexe
$\Longleftrightarrow \forall f : E \longrightarrow \{0, 1\} \in \mathcal{C}^0_{\mathcal{O}, \mathcal{O}_{\text{discr}}}$ continue, f constante

L'image d'un connexe par une fonction <u>continue</u> est connexe :
$(E, \mathcal{O}_E)$ connexe et $\exists f \in \mathcal{C}^0_{\mathcal{O}_E, \mathcal{O}_F}(E, F)$ continue
$\Longrightarrow (F, \mathcal{O}_F)$ connexe (connexité : notion topologique)

Pour montrer qu'une propriété est vraie pour tous les points d'une partie que l'on sait connexe, on montre que l'ensemble des points qui la satisfait est ouvert et fermé dans cette partie.
</td>
<td></td>
<td>
Le seul ouvert-fermé non vide de $(\mathbb{R}, \vert\cdot\vert)$ est $\mathbb{R}$
$\rightarrow$ $(\mathbb{R}, \vert\cdot\vert)$ est connexe
$\rightarrow$ parties connexes de $(\mathbb{R}, \vert\cdot\vert) \equiv$ intervalles
(pas intervalle $\Rightarrow$ trou $\Rightarrow$ pas connexe ;
intervalle $\Rightarrow$ image de $\mathbb{R}$ par une fonction continue)
$\rightarrow$ un segment $[a, b] = \big\{(1 - t)\, a + t\, b : t \in [0, 1]\big\}$ $(a, b \in E)$ d'un EVN est connexe
$\rightarrow$ EVN connexe par segment $\Rightarrow$ connexe
$\rightarrow$ un sous-espace affine, une partie convexe d'un EVN est connexe

$n \geqslant 2$: $\mathbb{R}^n \backslash D$ est connexe avec $D \subset \mathbb{R}^n$ fini
$\rightarrow$ Théorème d'invariance du domaine :
$\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$ ne peuvent être homéomorphes

Théorème des valeurs intermédiaires :
L'image d'un connexe $X \subset E$ (par exemple un intervalle si $E = \mathbb{R}$) par une fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ réelle continue $f(X)$ est un intervalle :
$\forall x_0, x_1 \in X, \big[f(x_0), f(x_1)\big] \subset f(X)$
</td>
</tr>
</table>

$$f(A \cap B) \underset{\text{surj}}{\overset{\subset}{=}} f(A) \cap f(B) \qquad f^{\leftarrow}(X \cap Y) = f^{\leftarrow}(X) \cap f^{\leftarrow}(Y)$$

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \qquad f^{\leftarrow}(X \cup Y) = f^{\leftarrow}(X) \cup f^{\leftarrow}(Y)$$

$$f^{\leftarrow}(f(A)) \underset{\text{inj}}{\overset{\supset}{=}} A \qquad f(f^{\leftarrow}(X)) \underset{\text{surj}}{\overset{\subset}{=}} X$$

$$f(\complement A) \begin{matrix} \neq \\ \underset{\text{inj}}{\subset} \\ \underset{\text{surj}}{\supset} \end{matrix} \complement f(A) \qquad f^{\leftarrow}(\complement X) = \complement f^{\leftarrow}(X)$$

Espaces topologiques	Espaces métriques Espaces topologiques à base dénombrable de voisinage	Espaces vectoriels normés

Limites de suites

Espaces topologiques

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E^{\mathbb{N}}$ **converge** vers $\ell\in E \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (x_n)_n\in E^{\mathbb{N}}_{\text{cv}(\ell)_{\mathcal{O}_E}} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$
$\forall V_\varepsilon\in\underbrace{\text{Vois}_{\mathcal{O}_E}(\ell)}_{\text{ou } \mathcal{V}_\ell},\ \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N},\ \forall n\geqslant N,\ x_n\in V_\varepsilon$

Dite **divergente** dans E si converge nulle part.
Si $(E,\mathcal{O}_E)$ séparé, $\lim (x_n)_{n\in\mathbb{N}}=\lim\limits_{n\to\infty} x_n:=\ell$ **unique**.

$\forall (x_n)_n\in X^{\mathbb{N}}_{\text{cv}}$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} x_n\in\bar{X}$. Mais réciproque fausse en général.

Suite $\longrightarrow\ell \iff$ Toute Sous-suite $\longrightarrow\ell$
☞ Pour montrer la divergence,
il suffit de trouver deux sous-suites de lim $\neq$

Valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
$x\in\text{Adh}\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)\subset E \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$
$\forall V_x\in\text{Vois}_{\mathcal{O}_E}(x),\ \forall N\in\mathbb{N},\ \exists n\geqslant N,\ x_n\in V_x$
(tout voisinage de x contient une *infinité* de termes de la suite)
En d'autres termes :
$\text{Adh}\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)=\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}\overline{\{x_k : k\geqslant n\}}$ donc fermé

Sous-suite $\longrightarrow\ell \implies \ell\in\text{Adh}\big((x_n)_n\big)$

Espaces métriques

$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{d_E} \ell\in X$
$\iff \forall\varepsilon>0,\ \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N},\ \forall n\geqslant N_\varepsilon,\ d_E(x_n,\ell)<\varepsilon$

Et alors $\ell=\lim (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unique.
$(\forall n,\ d(\ell_1,\ell_2)\leqslant d(\ell_1,x_n)+d(x_n,\ell_2)$ donc $d(\ell_1,\ell_2)=0$ donc $\ell_1=\ell_2)$

Caractérisation séquentielle de l'adhérence, des fermés :
Espace topologique à base dénombrable de voisinages :
$\to$ Soit $x\in E$. $x\in\bar{X} \iff \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in X^{\mathbb{N}}\longrightarrow x$
$\to$ $F\subset E$ fermé $\iff \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in F^{\mathbb{N}}_{\text{cv}_{\mathcal{O}_E}},\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n\in F$
⚠ $\dashv$

$x\in\text{Adh}\big((x_n)_n\big) \iff$
$\forall\varepsilon>0,\ \forall N\in\mathbb{N},\ \exists n\geqslant N,\ d(x,x_n)<\varepsilon$

$(x_n)_n$ converge $\overset{\text{non compact}}{\not\Leftarrow}$ / $\Longrightarrow$ $\Big\{\lim\limits_{n\to\infty} x_n\Big\}=\text{Adh}\big((x_n)_n\big)$
$\uparrow$

Adhérence et suite extraite :
Espace topologique à base dénombrable de voisinages :
$a\in\text{Adh}\big((x_n)_n\big) \iff \exists\varphi:\mathbb{N}\overset{>}{\hookrightarrow}\mathbb{N} : x_{\varphi(n)}\xrightarrow[n\to\infty]{} a$

Espaces vectoriels normés

Théorème de convergence monotone
Suites adjacentes
Suites numériques
Passage à la limite des inégalités
Théorème d'encadrement
…

Limites de fonctions, Continuité

Espaces topologiques

$(E,\mathcal{O}_E),(F,\mathcal{O}_F),(G,\mathcal{O}_G)$ espaces topologiques,
$X\subset E,\ Y\subset F,\ \mathcal{O}_X,\mathcal{O}_Y$ topologies induites.

$f:X\longrightarrow F$ | admet $\ell\in F$ pour limite en $a\in\bar{X}$
converge vers ℓ en a $\Big(f\xrightarrow[a]{\mathcal{O}_E,\mathcal{O}_F}\ell\Big)$ $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$
$\forall V_\varepsilon\in\underbrace{\text{Vois}_{\mathcal{O}_F}(\ell)}_{\text{ou } \mathcal{V}_\ell},\ \exists U_\varepsilon\in\text{Vois}_{\mathcal{O}_E}(a) : f(U_\varepsilon\cap X)\subset V_\varepsilon$
avec $\mathcal{V}_\ell$ système fondamental de voisinages de ℓ dans $(F,\mathcal{O}_F)$.
⚠ a n'$\in$ pas forcément à X. De façon équivalente (topo ind.),
$\forall V_\varepsilon\in\text{Vois}_{\mathcal{O}_F}(\ell),\ \exists U_\varepsilon\in\text{Vois}_{\mathcal{O}_X}(a) : f(U_\varepsilon)\subset V_\varepsilon$

Alors $\ell\in\overline{f(X)}$. Si $(F,\mathcal{O}_F)$ séparé, et $\lim\limits_a f:=\ell$ **unique**.
(si non séparé et ℓ,ℓ' topologiquement indistinguable, $f\to\ell\Leftrightarrow f\to\ell'$)

$f:E\longrightarrow F$ **continue** en $x\in E$
$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\ \forall V_\varepsilon\in\begin{matrix}\text{Vois}_F(f(x))\\ \mathcal{V}_{f(x)}\end{matrix},$ | $\exists U_\varepsilon\in\text{Vois}_E(x) : f(U_\varepsilon)\subset V_\varepsilon$
$\Leftrightarrow f^{\leftarrow}(V_\varepsilon)\in\text{Vois}_E(x)$
$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\ f\xrightarrow[x]{} f(x)$

$f:E\longrightarrow F$ **continue globalement** sur E (notion locale)
$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\ \forall U\in\left|\begin{matrix}\mathcal{O}_F\\ \mathcal{B}_F\end{matrix}\right.,\ f^{\leftarrow}(U)\in\mathcal{O}_E \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} f\in\mathcal{C}^0\big((E,\mathcal{O}_E),(F,\mathcal{O}_F)\big)$
$\Leftrightarrow\ \forall X\in\mathcal{F}_F,\ f^{\leftarrow}(X)\in\mathcal{F}_E$
(image réciproque d'un ouvert/fermé de F = ouvert/fermé de E)
$\Leftrightarrow\ \forall X\subset E,\ f(\bar{X})\subset\overline{f(X)}$
$\Leftrightarrow\ \forall x\in E,\ f$ continue en x

$\to$ si $f\in\mathcal{C}^0\big((E,\mathcal{O}_E),(F,\mathcal{O}_F)\big)$ continue
X **dense** dans $(E,\mathcal{O}_E)\implies f(X)$ dense dans $(F,\mathcal{O}_F)$

Limite séquentielle : $f:X\longrightarrow F,\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in X^{\mathbb{N}}$
$\left.\begin{matrix}(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\longrightarrow a\in\bar{X}\\ f\xrightarrow[a]{}\ell\end{matrix}\right\}\implies f(x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}\ell$
$\left.\begin{matrix}(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\longrightarrow x\in X\\ f \text{ continue en } x\end{matrix}\right\}\implies f(x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$
⚠ faux en général pour $x\in\overline{X}$

Composition :
$\left.\begin{matrix}f:E\longrightarrow F \text{ continue en } x\in E\\ g:F\longrightarrow G \text{ continue en } f(x)\end{matrix}\right\}\implies g\circ f$ continue en x
Si $f:X\subset E\longrightarrow F,\ g:Y\subset F\longrightarrow G,\ x\in\bar{X}$
$\left.\begin{matrix}f\xrightarrow[x]{\mathcal{O}_E,\mathcal{O}_F} y\in\bar{Y}\\ g\xrightarrow[y]{\mathcal{O}_F,\mathcal{O}_G}\ell\end{matrix}\right\}\implies g\circ f\xrightarrow[x]{\mathcal{O}_E,\mathcal{O}_G}\ell$

Restriction : pour $(A\subset E,\mathcal{O}_E|_A)$ *topo. induite* :
l'injection canonique $\text{id}_E|_A : A\hookrightarrow E$ est continue
$f:E\longrightarrow F$ continue $\implies f|_A=f\circ\text{id}|_A$ continue
f continue $\forall x\in A \underset{\not\Leftarrow}{\implies} f|_A$ continue
pour $(B\subset F,\mathcal{O}_F|_B)$ *topo. induite* telle que $f(E)\subset B$:
$f:E\longrightarrow F$ continue $\implies f|^B : E\longrightarrow B$ continue

Prolongements : si $(F,\mathcal{O}_F)$ *séparé* et $f,g\in\mathcal{C}^0(E,F)$
$\{x\in E : f(x)=g(x)\}$ fermé si f,g continues
donc $f|_A=g|_A$ sur A *dense* dans $E \implies f=g$
en particulier, f nulle sur une partie dense $\Rightarrow f$ nulle partout

Espaces métriques

$(E,d_E),(F,d_F),(G,d_G)$ espaces métriques, $X\subset E,\ Y\subset F$

$\forall a\in\bar{X},\ f\xrightarrow[a]{d_E,d_F}\ell\in F$
$\Leftrightarrow\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0 : f\big(\text{B}_{d_E}(a,\delta)\cap X\big)\subset\text{B}_{d_F}(\ell,\varepsilon)$
$\Leftrightarrow\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0 : \forall x\in X,\ d_E(x,a)<\delta \Rightarrow d_F(f(x),\ell)<\varepsilon$

Et alors $\ell=\lim\limits_a f$ unique.

f **continue** en $x\in E$
$\Leftrightarrow\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta_{x,\varepsilon}>0 : f\big(\text{B}_{d_E}(x,\delta_{x,\varepsilon})\big)\subset\text{B}_{d_F}(f(x),\varepsilon)$
$\Leftrightarrow\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0 : \forall y\in E,\ d_E(x,y)<\delta \Rightarrow d_F(f(x),f(y))<\varepsilon$
$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\ \lim\limits_x f=f(x)$

f **uniformément continue** $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} f\in\mathcal{CU}^0\big((E,d_E),(F,d_F)\big)$
$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta_\varepsilon>0 : \forall x,y\in E,\ d_E(x,y)<\delta_\varepsilon \Rightarrow d_F(f(x),f(y))<\varepsilon$
$\Rightarrow\ f$ continue (réciproque vraie sur un compact : thm. de Heine)

f **k-lipschitzienne** $(k\in\mathbb{R}_+)$ $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} f\in\mathcal{L}ip^k\big((E,d_E),(F,d_F)\big) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$
$\forall x,y\in E,\ d_F\big(f(x),f(y)\big)\leqslant k\,d_E(x,y)$
Constante de Lipschitz : $\text{lip}(f):=\sup\limits_{\substack{x,y\in E\\ x\neq y}}\dfrac{d_F(f(x),f(y))}{d_E(x,y)}$

f **a-höldérienne** $(a\in]0,1])$ $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} f\in\mathcal{H}\ddot{o}l^a\big((E,d_E),(F,d_F)\big) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$
$\exists k\in\mathbb{R}_+ : \forall x,y\in E,\ d_F\big(f(x),f(y)\big)\leqslant k\,(d_E(x,y))^a$

$\to$ f lipschitzienne $\iff f$ 1-höldérienne
$\to$ f höldérienne/lipschitzienne $\implies f$ **uniformément continue**
$\to$ f localement lipschitzienne $\implies f$ continue

Limite et continuité séquentielle :
Espace topologique à base dénombrable de voisinages.
$f\xrightarrow[a]{}\ell \iff \begin{pmatrix}\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in X^{\mathbb{N}} : x_n\xrightarrow[n\to\infty]{} a,\\ f(x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}\ell\end{pmatrix}$ pour $a\in\bar{X}$
f continue en $x\in X$ $\iff \begin{pmatrix}\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in X^{\mathbb{N}} : x_n\xrightarrow[n\to\infty]{} x,\\ f(x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)\end{pmatrix}$
($\Rightarrow$: direct $(\exists N : \forall n\geqslant N,\ d(x_n,x)<\eta)$. $\Leftarrow$: contraposée.)

Espaces vectoriels normés

Limites en $\pm\infty$
$f:[a,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ continue tq $\lim_{+\infty}f=0\Rightarrow\mathcal{CU}^0$

$f\in\mathcal{C}^0\big((E,\|\cdot\|_E),(F,\|\cdot\|_F)\big) \Leftrightarrow$
$\forall x\in E,\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta_{x,\varepsilon}>0 : \forall y\in E,$
$\|x-y\|_E<\delta_{x,\varepsilon} \Rightarrow \|f(x)-f(y)\|_F<\varepsilon$

$f\in\mathcal{CU}^0\big((E,\|\cdot\|_E),(F,\|\cdot\|_F)\big) \Leftrightarrow$
$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta_\varepsilon>0 : \forall x,y\in E$
$\|x-y\|_E<\delta_\varepsilon \Rightarrow \|f(x)-f(y)\|_F<\varepsilon$
$\sqrt{x}$ unif' continue ($^1/_2$-höldérienne, mais pas lipschitz.)
x^α non unif' continue pour $\alpha\geqslant 2$

Applications linéaires : $f\in\text{Lin}(E,F)$
f **continue** $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} f\in\mathcal{L}\big((E,\|\cdot\|_E),(F,\|\cdot\|_F)\big)$
$\Leftrightarrow\ f$ continue en 0_E
$\Leftrightarrow\ f$ bornée sur $\text{B}_{\|\cdot\|_E}(0_E,1)$ (f(boule unité) bornée)
$\Leftrightarrow\ \exists k\geqslant 0 : \forall x\in E,\ \|f(x)\|_F\leqslant k\,\|x\|_E$
$\Leftrightarrow\ f$ lipschitzienne

$f\in\text{Lin}(E,F)$ non continue
$\Leftrightarrow\ \exists (x_n)_n\in E^{\mathbb{N}} : \dfrac{\|f(x_n)\|_F}{\|x_n\|_E}\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$

$\big(\mathcal{L}(E,F),|||\cdot|||\big)$ EVN des **opérateurs bornés**
$|||f|||:=\text{lip}(f)$, et si $\mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C}$,
$|||f|||=\sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$ (norme d'opérateur) (norme subordonnée)
$=\sup\limits_{\|x\|_E=1}\|f(x)\|_F = \sup\big\|f\big(\text{S}_{\|\cdot\|_E}(0,1)\big)\big\|_F$
$=\inf\{k\geqslant 0 : \|f(\cdot)\|_F\leqslant k\,\|\cdot\|_E\}$

En pratique, on majore $\|f(x)\|/\|x\|\leqslant M$ au mieux, puis on prend une suite $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{} x_\infty$ telle que $\|f(x_n)\|\xrightarrow[n\to\infty]{} M\,\|x_\infty\|$

C'est une **norme d'algèbre** :
si $f\in\mathcal{L}(E,F)$ et $g\in\mathcal{L}(F,G)$,
$|||g\circ f|||\leqslant|||g|||\cdot|||f|||$
de plus si $f\in\text{GL}(E)$ inversible, $|||f^{-1}|||=|||f|||^{-1}$
$\to\big(\mathcal{L}(E,E),+,\cdot,\circ,\|\cdot\|_{\text{op}}\big)$ $\mathbb{K}$-algèbre normée

Si E est de **dimension finie**, toute application linéaire est **continue** : $\text{Lin}(E,F)=\mathcal{L}(E,F)$
et **norme atteinte** $\|f(x_u)\|=|||f|||$ pour $\|x_u\|=1$
(cf. compacité)

Fonctions numériques dans ($\mathbb{K}=(\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, $\mathcal{O}_u$) :
$f,g : E\longrightarrow\mathbb{K}$ continues en x
$\implies f+g$ et $f\cdot g$ continues en x
$\to$ Une fonction (multi-)polynômiale est continue

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(E,F)^{\mathbb{N}}$ **converge simplment** vers $f \in \mathcal{F}(E,F) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$

$\Leftrightarrow \quad \forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N,\ d_F\big(f_n(x), f(x)\big) < \varepsilon$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(E,F)^{\mathbb{N}}$ **converge uniformément** vers $f \in \mathcal{F}(E,F) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f$

$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N,\ \forall x \in X,\ d_F\big(f_n(x), f(x)\big) < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \quad \sup\limits_{x,y\in X} d_F\big(f_n(x), f_n(y)\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Convergence uniforme $\Rightarrow$ Convergence simple

$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n$ continue (en x) $\implies f = \lim\limits_{n\to+\infty}^{\text{CU}} f_n$ continue (en x)

<table>
<tr><th>Espaces topologiques</th><th>Espaces métriques</th><th>Espaces vectoriels normés</th></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">Transport, Isométrie</td></tr>
<tr>
<td>
$(E,\mathcal{O})$ espace topologique, $f : E' \longrightarrow E$
alors $f^{\leftarrow}(\mathcal{O})$ topologie sur E'
(topologie image réciproque de $\mathcal{O}$ par f)

Homéomorphisme : isomorphisme de struct. topologique
$\varphi : E \longrightarrow F \in \mathrm{Homeo}((E,\mathcal{O}_E),(F,\mathcal{O}_F))$
$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \varphi \text{ bijective} \\ \varphi \in \mathcal{C}^0((E,\mathcal{O}_E),(F,\mathcal{O}_F)) \\ \varphi^{\leftarrow} \in \mathcal{C}^0((F,\mathcal{O}_F),(E,\mathcal{O}_E)) \end{cases}$
(bijective continue de bijection reciproque continue : bicontinue)
Préservent les notions topologiques :
caract. ouvert, fermé, séparation, voisinages, intérieurs adhérence, frontière, compacité, connexité
$\to$ pour montrer que deux espaces ne sont pas homéomorphes, on cherche une notion topologique satisfaite pour l'un et pas pour l'autre
Critère d'homéomorphisme : si E et F compacts,
φ bijective continue $\implies \varphi$ homéomorphisme

$f \in \mathcal{C}^0((E,\mathcal{O}_E),(F,\mathcal{O}_F))$ continue $\iff \mathcal{O}_E \supset f^{\leftarrow}(\mathcal{O}_F)$
$\mathrm{id}_E \in \mathcal{C}^0((E,\mathcal{O}_1),(F,\mathcal{O}_2))$ continue $\iff \mathcal{O}_1 \supset \mathcal{O}_2$

$(E,\mathcal{O}_E)$ et $(F,\mathcal{O}_F)$ homéomorphes $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$
$\exists \varphi \in \mathrm{Homeo}((E,\mathcal{O}_E),(F,\mathcal{O}_F)) \implies \mathcal{O}_F = \varphi(\mathcal{O}_E)$
$\mathrm{id}_E \in \mathrm{Homeo}((E,\mathcal{O}_1),(E,\mathcal{O}_2)) \iff \mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$
</td>
<td>
(E,d_E) espace métrique, $f : E' \hookrightarrow E$ injective ; alors
$d_{E'}(x,y) := d_E\big(f(x),f(y)\big)$ distance sur E'
(distance image réciproque de d_E par f)

$(E,d_E),(E',d_{E'})$ espaces métriques. $f : E \longrightarrow E'$
isométrique $\Leftrightarrow \forall x,y \in E,\ d_{E'}\big(f(x),f(y)\big) = d_E(x,y)$
Une application isométrique est continue, injective.
Isométrie = application isométrique et bijective

$\mathrm{id}_E \in \mathcal{L}ip((E,d_E),(E,d_{E'})) \cap \mathcal{L}ip((E,d_{E'}),(E,d_E))$
bilipschitzienne $\iff d_1$ et d_2 Lipschitz-équivalentes

$\iff d_1$ et d_2 topologiquement équivalentes
</td>
<td>
Translations $\to$ homéomorphismes, isométries

Sont homéomorphes pour $(\mathbb{R},\ \mathcal{O}_{\mathsf{u}})$:
– les intervalles fermés entre eux
– les intervalles ouverts entre eux

$\forall n \geqslant 1,\ \mathbb{R}^n$ homéomorphe à sa boule $\mathrm{B}(\mathbf{0},1)$

$\iff \lVert\cdot\rVert_1$ et $\lVert\cdot\rVert_2$ équivalentes
</td>
</tr>
<tr><td colspan="3" align="center">Espaces produits</td></tr>
<tr>
<td>
$\big((E_i,\mathcal{O}_i)\big)_{i\in\mathbb{I}}$ espaces topologiques. $E_\times := \bigtimes\limits_{i\in\mathbb{I}} E_i$
$\pi_i : \begin{array}{l} E \longrightarrow E_i \\ (x_j)_{j\in\mathbb{I}} \longmapsto x_i \end{array}$ projections/surjections canoniques
Topologie produit $\mathcal{O}_\times$
= topologie initiale pour $\big((\mathcal{O}_i,\ \pi_i : E_\times \to E_i)\big)_{i\in\mathbb{I}}$
= topo. la moins fine telle que les π_i soient continues
$\mathcal{O}_\times := \bigcap \big\{\mathcal{O} \text{ topo pour } E_\times : \forall i \in \mathbb{I},\ \pi_i \in \mathcal{C}^0_{\mathcal{O},\mathcal{O}_i}(E_\times,E_i)\big\}$

La base des rectanges élémentaires
$\mathcal{R} := \left\{R_{(U_j)_j} : (U_j)_{j\in J} \in \bigtimes\limits_{j\in J} \mathcal{O}_j \text{ avec } J \subset \mathbb{I} \text{ \underline{fini}}\right\}$
est une base de topologie pour l'espace produit $(E_\times,\mathcal{O}_\times)$
avec $R_{(U_j)_j} := \bigcap\limits_{j\in J} \pi_i^{\leftarrow}(U_j) = \bigtimes\limits_{i\in I} \begin{cases} U_i & \text{si } i \in J \\ E_i & \text{sinon} \end{cases}$
produit carthésien d'ouverts égaux à E_i sauf pour un nombre fini

Topologie engendrée : $U \in \mathcal{O}_\times \iff \exists R \in \mathcal{R} : x \in R \subset U$
Pour $\mathbb{I} = [\![1,n]\!]$ fini :
$\mathcal{O}_\times = \left\{U \subset E_\times : \forall x \in U,\ \exists (U_i)_i \in \bigtimes\limits_{i=1}^{n} \mathcal{O}_i \ :\ x \in \bigtimes\limits_{i=1}^{n} U_i \subset U\right\}$
$\overline{\bigtimes\limits_{i=1}^{n} X_i} = \bigtimes\limits_{i=1}^{n} \overline{X_i}$ et $\overset{\circ}{\overbrace{\bigtimes\limits_{i=1}^{n} X_i}} = \bigtimes\limits_{i=1}^{n} \overset{\circ}{X_i}$ pour $X_i \subset E_i$

Base dénombrable :
$\big((E_i,\mathcal{O}_i)\big)_{i\in\mathbb{N}}$ famille dénombrable d'espaces à base dénombrable
$\implies \big(\bigtimes_{i\in\mathbb{N}} E_i, \mathcal{O}_\times\big)$ à base dénombrable

Convergence de suites : $\big((x_{n,i})_{i\in\mathbb{I}}\big)_{n\in\mathbb{N}} \in {E_\times}^{\mathbb{N}},\ (x_i)_{i\in\mathbb{I}} \in E_\times$
convergence $\Leftrightarrow$ toutes les composantes convergent :
$\boldsymbol{x}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{O}_\times} \boldsymbol{x} \iff \forall i \in \mathbb{I},\quad x_{n,i} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{O}_i} x_i$

Continuité : $(E,\mathcal{O}_E)$ esp. topo, $\Big(F_\times = \bigtimes\limits_{i\in\mathbb{I}} F_i, \mathcal{O}_\times\Big)$ esp. produit
$f : E \longrightarrow F_\times \in \mathcal{C}^0((E,\mathcal{O}_E),(F_\times,\mathcal{O}_\times))$ continue $\iff$
$\forall i \in \mathbb{I},\ f_i = \pi_i \circ f \in \mathcal{C}^0((E,\mathcal{O}_E),(F_i,\mathcal{O}_i))$ continue
(mais rien pour un ensemble de départ produit : analyse multivariée)

La notion d'espace produit est compatible avec l'associativité du produit carthésien $(\cdot\times\cdot\times\cdot = (\cdot\times\cdot)\times\cdot)$
</td>
<td>
$\big((E_i,d^{(i)})\big)_{1\leqslant i\leqslant n}$ suite d'espaces métriques finie
$\Big(\bigtimes\limits_{i=1}^{n} E_i,\ d_\infty\Big)$ espace métrique produit, avec
$d_\infty((x_i)_i,(y_i)_i) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} d^{(i)}(x_i,y_i)$; on a $\forall U_j \in \mathcal{O}_{d^{(j)}}$
$\pi_j^{\leftarrow}(U_j) = \bigtimes_{i=1}^{n} \begin{cases} U_i & \text{si } i=j \\ E_i & \text{sinon} \end{cases} \in \mathcal{O}_d$ ouvert donc π_j continue

On peut prendre $d = d_1, d_2, d_p,\ d_\infty$... distances équivalentes
<hr>
$\big((E_i,d^{(i)})\big)_{i\in\mathbb{N}}$ suite d'espaces métriques dénombrable
$\forall i$, posons $d_{\mathsf{b}}^{(i)}(\cdot,\cdot) := \min\big(1, d^{(i)}(\cdot,\cdot)\big)$ distance bornée

$\Big(E_\times = \bigtimes\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i\ ,\ d\Big)$ espace métrique produit avec $d = d_\times, d_\Sigma$

$\to\ d_\times\big((x_i)_i,(y_i)_i\big) := \sup\limits_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{i+1} d_{\mathsf{b}}^{(i)}(x_i,y_i)$
engendre la topologie produit $\mathcal{O}_\times$, la moins fine des topologies où les projections π_i sont continues
$\to\ d_\Sigma\big((x_i)_i,(y_i)_i\big) := \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} d_{\mathsf{b}}^{(i)}(x_i,y_i) \quad \leqslant d_\times \not\leqslant M d_\Sigma$
engendre une topologie pour laquelle les projections π_i sont continues, et moins fine que celle de $d_\times$
$\to$ donc d_1 et d_∞ topologiquement (pas Lipschitz) équivalentes !
$\to\ d_\infty\big((x_i)_i,(y_i)_i\big) := \sup\limits_{i\in\mathbb{N}} d_{\mathsf{b}}^{(i)}(x_i,y_i)$
n'engendre pas la topologie produit, mais une topologie plus fine (parfois discrète)

Voisinages : $V \subset E_\times$ voisinage de $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i\in I} \in E_\times$
$\iff \exists N \in \mathbb{N}, \exists r > 0 : \bigtimes\limits_{i=0}^{N} \mathrm{B}_{d^{(i)}}(x_i,r) \times \bigtimes\limits_{i>N} E_i \subset V$
</td>
<td>
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,
toutes les normes de $\mathbb{K}^n$ sont équivalentes (à $\lVert\cdot\rVert_\infty$) et engendrent donc la topologie produit
<hr>
1. $\lVert\cdot\rVert \in \mathcal{L}ip^C((\mathbb{K}^n,\lVert\cdot\rVert_\infty),(\mathbb{R},\vert\cdot\vert))$ donc continue
avec $C = \sum_{i=1}^{n} \lVert\mathbf{e}_i\rVert$ (1e et 2nd ineg. trig, base can.)
2. donc $\lVert\cdot\rVert$ continue sur la sphère unitée
$S = \mathrm{S}_{\lVert\cdot\rVert_\infty}(\mathbf{0}_n,1)$ fermée-bornée donc $\lVert\cdot\rVert_\infty$-compacte
donc $\lVert\cdot\rVert$ bornée par M; de plus $0 \notin \lVert S\rVert$ (vraie distance)
donc $m := \inf_S \lVert\cdot\rVert \neq 0$ (car atteint ses bornes)
3. $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n \backslash \{\mathbf{0}\},\ \boldsymbol{x}/\lVert\boldsymbol{x}\rVert_\infty \in S$ donc $m \leqslant \big\lVert \boldsymbol{x}/\lVert\boldsymbol{x}\rVert_\infty \big\rVert \leqslant M$
donc $m\,\lVert\boldsymbol{x}\rVert_\infty \leqslant \lVert\boldsymbol{x}\rVert \leqslant M\,\lVert\boldsymbol{x}\rVert_\infty$
4. Pour $\mathbb{C}$, identif° $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ $(\mathfrak{Re},\mathfrak{Im}) \to$ topo produit
<hr>
Si E est de $\dim_{\mathbb{K}} E = n$ finie, et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,
toutes les normes sont équivalentes, et engendrent la topologie naturelle d'un EVN de dimension finie
(car $E \overset{\phi}{\longleftrightarrow} \mathbb{K}^n$ et $\lVert\cdot\rVert \circ \phi$ normes sur $\mathbb{K}^n$ donc equiv. donc $\lVert\cdot\rVert$ equiv. par surjectivité de l'isomorphisme ϕ)
On retrouve les propriétés de la topo. produit de convergence et de continuité coordonnée par coordonnée dans une base $\mathcal{E} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$:
$\big((e_i^*(x_n))_i\big)_n$ et $\big(e_i^*(f)\big)_i$
Normes usuelles :
$\lVert x\rVert_{\infty,\mathcal{E}} := \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \big\vert e_i^*(x)\big\vert \qquad \lVert x\rVert_{1,\mathcal{E}} := \sum\limits_{i=1}^{n} \big\vert e_i^*(x)\big\vert$
</td>
</tr>
</table>

Espaces topologiques	Espaces métriques	Espaces vectoriels normés
	Compacité	
$(E,\mathcal{O})$ espace topologique <u>*séparé*</u>.	(E,d) espace métrique. (toujours séparé)	
Propriété de Borel-Lebesgue : $(E,\mathcal{O})$ **compact** $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\forall (U_i)_{i\in\mathbb{I}} \in \mathcal{O}^{\mathbb{I}}$ **recouvrement** de E d'*ouverts*, $\left(E = \bigcup_{i\in\mathbb{I}} U_i \right)$ on peut en extraire un **sous-recouvrement fini** $(U_j)_{j\in J}$ avec $J \subset \mathbb{I}$ fini $\left(E = \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k} \right)$ $\Leftrightarrow$ $\forall (F_i)_{i\in\mathbb{I}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{I}} : \bigcap_{i\in\mathbb{I}} F_i = \varnothing$, $\exists J \subset \mathbb{I}$ fini : $\bigcap_{k=1}^{n} F_{i_k} = \varnothing$	**Propriété de Bolzano-Weierstrass** : (E,d) compact $\Leftrightarrow$ $\forall (x_n)_n \in E^{\mathbb{N}},\ \exists \varphi : \mathbb{N} \overset{>}{\hookrightarrow} \mathbb{N} : x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \in E$ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Adh}\big((x_n)_n\big) \neq \varnothing$ De toute suite, on peut en extraire une sous-suite convergente dans E	**Théorème de Bolzano-Weierstrass** : $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $[a,b]$ partie compacte de $(\mathbb{R}, \vert\cdot\vert)$ (construction de la limite supérieure par dichotomie, en utilisant la *propriété de la borne sup* de $\mathbb{R}$)
Une partie $K \subset E$ est **compacte** si $(K, \mathcal{O}_{\vert K})$ compact $\Leftrightarrow$ propriété de Borel-Lebesgue avec des ouverts **de *E***	**Unique valeur d'adhérence** : K compact : si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ à valeur dans un compact et $\mathrm{Adh}\big((x_n)_n\big) \subset \{x\}$ au plus une valeur d'adhérence alors $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ converge	
U<u>F</u>K : $\forall (K_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ compacts, $\bigcup_{i=1}^{n} K_i$ compact **IQK** : $\forall (K_i)_{i\in\mathbb{I}}$ compacts, $\bigcap_{i\in\mathbb{I}} K_i$ compact si $\neq\varnothing$ et si $(K_i \neq \varnothing)_i$ suite **décroissante**, $\bigcap_{i\in\mathbb{I}} K_i \neq \varnothing$ (**théorème des compacts emboîtés**)	**Borel-Lebesgue $\Longrightarrow$ Bolzano-Weierstrass** car l'intersection $\mathrm{Adh}\big((x_n)_n\big) = \bigcap_n \overline{\{x_k : k \geqslant n\}}$ décroissante de fermés non vides est non vide dans un espace compact	**Parties compactes en evn de dimension finie** : $\rightarrow$ $(X \subset \mathbb{R}, \vert\cdot\vert)$ compacte $\Longleftrightarrow$ X **fermée bornée** ($\Longrightarrow$: X bornée donc $\subset [-R,+R]$, qui est compact, donc X partie fermée d'un compact, donc compacte) $\rightarrow$ $(X \subset \mathbb{R}^n, \Vert\cdot\Vert_\infty)$ compacte $\Longleftrightarrow$ **fermée bornée** ($\Longrightarrow$: X bornée donc $\subset [-R,+R]^n$, qui est compact car *produit de compacts*, donc X partie fermée d'un compact)
Produit de compacts : $\big((E_i, \mathcal{O}_i)\big)_{i\in\mathbb{I}}$ espaces compacts $\Longleftrightarrow$ $\big(\times_{i\in\mathbb{I}} E_i, \mathcal{O}_\times\big)$ compact ($\Longleftarrow$: $E_\times$ compact et π_i continues donc $E_i = \pi_i(E_\times)$ compact $\Longrightarrow$: théorème de Tychonov, avec la notion de filtre)	($\Longrightarrow$ pour produit fini : on prend une suite $E_\times^{\mathbb{N}}$ et on effectue par récurr. une extraction pour chaque coordonnée, et après les n extractions, on a une sous-suite convergente pour la topologie produit $\Longrightarrow$ pour produit dénombrable : on ne peut faire une infinité d'extractions sans prendre de précautions : avec le procédé diagonal, il reste des termes)	$\rightarrow$ La sphère unité $S_{\Vert.\Vert_\infty}(\mathbf{0}_n, 1)$ est compacte $\rightarrow$ Dans $(E, \Vert\cdot\Vert)$ de **dimension finie**, toutes les distances sont donc équivalentes à $\Vert\cdot\Vert_\infty$, donc par isométrie $(E, \Vert\cdot\Vert) \longleftrightarrow (\mathbb{K}^{\dim E}, \Vert\cdot\Vert_\infty)$, $(X \subset E, \Vert\cdot\Vert)$ compacte $\Longleftrightarrow$ X **fermée bornée**
Fermés et compacts : K fermé $\Longleftarrow$ K compact $(E,\mathcal{O})$ compact et K fermé $\Longrightarrow$ K compact	**Fermés-Bornés** et compacts : K compact $\Longrightarrow$ K borné pour d (donc fermé borné) (comme tout espace métrique précompact)	
Continuité : $f : E \longrightarrow F$, $(F, \mathcal{O}_F)$ séparé, K compact et f continue $\Longrightarrow$ $f(K)$ compact Donc f application fermée. Mais même si f continue, $f^{\leftarrow}(B)$ compact $\not\Longrightarrow$ B compact $f(A)$ compact $\not\Longrightarrow$ A compact K compact $\not\Longrightarrow$ $f^{\leftarrow}(K)$ compact	$\rightarrow$ $f : K \longrightarrow F$ **continue** sur un compact K $\Longrightarrow$ f **bornée et atteint ses bornes** ($\mathrm{Im}(f)$ bornée fermée) $\Longrightarrow$ f **uniformément continue** (Théorème de Heine)	$\rightarrow$ $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ **continue** sur un compact K $\Longrightarrow$ $\exists a,b \in \mathbb{R} : f(a) = \inf_K f$ et $f(b) = \sup_K f$
La compacité est donc une *notion topologique* : un espace homéomorphe à un compact est compact. Si $A \cap B = \varnothing$ parties compactes, $\exists U_A, U_B \in \mathcal{O}$ ouverts disjoints : $U_A \supset A$ et $U_B \supset B$ Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_{\mathrm{cv}}^{\mathbb{N}}$, $\Big\{x_n\Big\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \Big\{\lim_{n\to\infty} x_n\Big\}$ compact	**Bolzano-Weierstrass $\Longrightarrow$ Borel-Lebesgue** : (E,d) espace métrique Bolzano-Weierstrass-compact : 1. **Lemme d'uniformité de Lebesgue** : $(U_i)_{i\in\mathbb{I}} \in \mathcal{O}^{\mathbb{I}}$ recouvrement ouvert de E, alors $\exists r > 0 : \forall x \in E,\ \exists i_x \in \mathbb{I} : \mathrm{B}(x,r) \subset U_{i_x}$ (toute boule de rayon r est contenue dans un ouvert du recouvr') 2. B-W-Compacité $\Longrightarrow$ **Précompacité** : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in E^n : E = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{B}(x_i, \varepsilon)$ (il existe un recouvrement fini de E par des boules de rayon r) ($\Longrightarrow$ Un espace métrique **compact** est **séparable**) 3. **Théorème de Borel-Lebesgue** : (E,d) est Borel-Lebesgue-compact.	En **dimension finie**, une appl. linéaire est **continue** : $\dim E < \infty \Longrightarrow \mathrm{Lin}(E,F) = \mathcal{L}((E, \Vert\cdot\Vert_E), (F, \Vert\cdot\Vert_F))$ et **norme atteinte** $\Vert f(x_{\mathrm{u}})\Vert_F = \vert\vert\vert f \vert\vert\vert$ pour $\Vert x_{\mathrm{u}}\Vert_E = 1$ ($\Vert\cdot\Vert_E$ équivalente à $\Vert f(x)\Vert_{\infty,\mathcal{E}}$ et $\Vert f(x)\Vert_{\infty,\mathcal{E}} \leqslant k\ \Vert x\Vert_{\infty,\mathcal{E}}$ avec $k = \max_{i=1}^{n} \Vert f(e_i)\Vert$ f continue sur le compact $S(0_E, 1)$: atteint ses bornes)

<table>
<tr><th>Espaces métriques</th><th>Espaces vectoriels normés</th></tr>
<tr><td colspan="2">Complétude</td></tr>
<tr><td rowspan="2">
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}_{\mathrm{cauchy}_{d_E}}$ suite de Cauchy de (E,d_E)
$\overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow}$ $\forall\varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N},\ \forall p,q\geqslant N_\varepsilon,\ \underbrace{d_E(x_p,x_q)}_{\text{ou } d_{|X}} < \varepsilon$
(☞ Ça reste une suite de Cauchy dans tout sous-espace métrique $(X,d_{|X})$ si les $x_n\in X$)
$\Leftrightarrow$ $\mathrm{diam}(X_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ avec $X_n := \{x_k : k\geqslant n\}$
$\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{p,q\to\infty} d_E(x_p,x_q) = 0$ (limite simultanée, abus de notation)

Convergence $\Longrightarrow$ Cauchy-convergence
Une suite de Cauchy est bornée

(E,d_E) espace complet $\overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow}$ $E^{\mathbb{N}}_{\mathrm{cauchy}_{d_E}} = E^{\mathbb{N}}_{\mathrm{cv}_{d_E}}$
(toute suite de Cauchy est convergente dans E)

$\big((E_i,d_i)\big)_{1\leqslant i\leqslant n}$ suite finie d'espaces complets $\Longrightarrow$ $\big(\times_{i=1}^{n} E_i,\ d_\times\big)$ complet

(E,d_E) complet $\Longrightarrow$ $\forall A\in\mathcal{F}$ fermé, $(A,d_{|A})$ complet
$(A\subset E,d_{|A})$ complet $\Longrightarrow$ $A\in\mathcal{F}_{(E,d_E)}$ fermé (cv $\Rightarrow$ Cauchy-cv $\Rightarrow$ cv dans A)

La complétude est une propriété métrique, pas topologique :
(X,d_Y) isométrique à (Y,d_Y) complet $\Longrightarrow$ (X,d_X) complet
(d_1,d_2 Lipschitz équivalentes $\Longrightarrow$ $X^{\mathbb{N}}_{\mathrm{cauchy}_{d_1}} = X^{\mathbb{N}}_{\mathrm{cauchy}_{d_2}}$)
(X,d_X) homéomorphe à (Y,d_Y) complet $\not\Longrightarrow$ (X,d_X) complet
(d_1,d_2 topologiquement équiv. $\not\Longrightarrow$ $X^{\mathbb{N}}_{\mathrm{cauchy}_{d_1}} = X^{\mathbb{N}}_{\mathrm{cauchy}_{d_2}}$)
(ex : $\mathbb{R}$ complet homéomorphe à $]0,1[$ non complet)
Mais si $\exists\varphi\in\mathrm{Homeo}((X,d_X),(Y,d_Y))$ uniformément continu,
(Y,d_Y) complet $\Longrightarrow$ (X,d_X) complet (faux dans l'autre sens)

$(x_n)_n\in X^{\mathbb{N}}_{\mathrm{cauchy}}$ suite de Cauchy $\Longrightarrow$ $\big|\mathrm{Adh}\big((x_n)_n\big)\big|\leqslant 1$
Et si $\mathrm{Adh}\big((x_n)_n\big) = \{x\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$
(possède au plus 1 valeur d'adhérence, et converge dès qu'elle en a une)
$\rightarrow$ (E,d_E) compact $\Longrightarrow$ (E,d_E) complet !

Théorème des fermés emboîtés : $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}\in(\mathcal{F}\backslash\{\varnothing\})^{\mathbb{N}}$ suite de fermés non vides, décroissante ($F_{n+1}\subset F_n$), tq $\mathrm{diam}(F_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. Alors l'intersection se réduit à un point $\exists x\in E$: $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{x\}$

Théorème du point fixe de Picard :
(E,d) espace métrique complet
$f : E\longrightarrow E$ strictement contractante pour (E,d)
$\overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow}$ f est k-lipschitzienne pour $k < 1$ (⚠ $\not\Longleftrightarrow \forall x,y\in E,\ d\big(f(x),f(y)\big) < d(x,y)$)
Alors f admet un unique point fixe : $\exists! a\in E : f(a) = a$
Et il est obtenu come limite des itérés de tout $x_0\in E$:
$a = \lim\limits_{n\to\infty}(\circ^n f)(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ avec $x_{n+1} := f(x_n)$
Vitesse de convergence : $d(x_n,a)\leqslant\frac{k^n}{1-k}\alpha$ avec $\alpha = d(f(x_0),x_0)$

($(x_n)_n$ suite de Cauchy (par double récurrence en utilisant la lipschitziannité) avec
$N_\varepsilon = \max\Big(0,\Big\lceil\frac{\ln(\varepsilon/\alpha)}{2\ln(k)}+\frac{1}{2}\Big\rceil\Big)$ donc convergente vers a, puis continuité pour point fixe)
</td><td>
$(\mathbb{R},|\cdot|)$ complet, par complétion de $(\mathbb{Q},|\cdot|)$

$(E,\|\cdot\|)$ espace de Banach $\overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow}$ espace vectoriel normé complet
$(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ espace de Hilbert $\overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow}$ espace préhilbertien complet

$\forall n\geqslant 1$, $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|)$ complet ($\|\cdot\|$ quelconque)
EVN de dimension finie $\Longrightarrow$ complet !

$\rightarrow$ $F\subset E$ sous-EVN de $\dim(F) < \infty$ $\Longrightarrow$ $F\in\mathcal{F}_E$ fermé
</td></tr>
<tr><td>
Espace des opérateurs bornés/continus :
$(F,\|\cdot\|_F)$ complet $\Longrightarrow$ $\big(\mathcal{L}((E,\|\cdot\|_E),(F,\|\cdot\|_F)),|\!|\!|\cdot|\!|\!|\big)$ complet
$\rightarrow$ Le dual topo $E' = \mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ toujours complet
</td></tr>
<tr><td>
Espaces de convergence uniforme des suites/fonctions bornées :
(F,d_F) complet $\Longrightarrow$ $\big(\mathcal{FB}(E,(F,d_F)),d_\infty\big)$ et $\big(F^{\mathbb{N}}\ell^\infty,d_\infty\big)$ complets
(K,d_K) compact et (F,d_F) complet $\Longrightarrow$ $\big(\mathcal{C}^0((K,d_K),(F,d_F)),d_\infty\big)$ complet
Espace produit, cas dénombrable :
$\big((E_i,d^{(i)})\big)_{i\in\mathbb{N}}$ famille dénombrable d'espaces complets bornées ($d^{(i)}$ bornée)
$\Longrightarrow$ $\big(\times_{i\in\mathbb{N}} E_i,\ d_\times\big)$ complet avec $d_\times(\cdot,\cdot) = \sup_{i\in\mathbb{N}}\frac{1}{i+1}d^{(i)}(\cdot_i,\cdot_i)$
</td><td>
Espaces non complets en général :
$\big(E^{\mathbb{N}}\ell^p,\|\cdot\|_\infty\big)$, $\big(\mathcal{C}^0(K,F),\|\cdot\|_p\big)$ pour $p\in[1,+\infty[$
</td></tr>
</table>

Todo :

- $(\mathbb{R},|\cdot|)$ et propriétés de $\mathbb{R}$
- Espace normaux, Espaces réguliers
- Connexité par arcs, Produit de connexes, Composantes connexes, Connexité dans les EV
- Convexité ??
- Applications n-multilinéaires $\mathrm{Lin}_n((E_i)_i,F)$
- Algèbres et normes d'algèbres, (u_n) et (v_n) cv $\Rightarrow$ $(u_n v_n)$ cv et $\lim(u_n v_n) = \lim u_n\cdot\lim v_n$ si norme d'algèbre
- Faire des exemples d'espaces et de boules
- Importer tous ce qui est dans le poly de petrus
- Limite pointée / épointée -> voir le frido 8.1.9 et `https://www.math.u-psud.fr/~perrin/CAPES/analyse/fonctions/definitiondelimite.pdf` ; la limite pointée semble plus pratique et simplifier les énnoncés, mais elle perd un peu de son utilité et n'est pas compatible avc la limite à droite/gauche

  La limite épointée de f(x) quand x tend vers p existe si et seulement si les limites à droite et à gauche en p existent et sont égales (peu importe ici que p appartienne ou pas au domaine de définition U de f et, s'il lui appartient, peu importe la valeur de f(p)). Si p est un point de U, alors : f est continue en p $\Leftrightarrow$ la limite de f(x) quand x tend vers p existe $\Leftrightarrow$ la limite épointée de f(x) quand x tend vers p existe et est égale à f(p) $\Leftrightarrow$ les limites à droite et à gauche en p existent et sont égales à f(p). Si p n'appartient pas U, alors : la limite de f(x) quand x tend vers p existe $\Leftrightarrow$ la limite épointée de f(x) quand x tend vers p existe $\Leftrightarrow$ les limites à droite et à gauche en p existent et sont égales.
- Théorèmes de Dini :
  i. La convergence simple d'une suite monotone de fonctions à valeurs réelles définies et continues sur un espace compact vers une fonction continue implique sa convergence uniforme.
  ii. La convergence simple d'une suite de fonctions réelles d'une variable réelle définies et croissantes (non nécessairement continues) sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ vers une fonction continue sur $[a,b]$ implique la convergence uniforme.
  iii. La convergence simple d'une suite monotone de fonctions continues vers une fonction continue implique son équicontinuité.
- Inclure les trucs de distance à une partie
- Critère de compacité dans un ouvert (sans doute généralisable) : soit U ouvert (genre domaine de fonction) d'un EVN de dim finie et $X\subset U$. alors X compact relativement à l'ouvert U $\Leftrightarrow$ fermé, borné, et $\mathrm{dist}(X,\partial U) > 0$ (distance au bord non nulle)
- Exhaustion des ouverts d'un EVN (dim finie ??) : U ouvert. $K_n := \big\{x\in U : \|x\|\leqslant n \text{ et } \mathrm{dist}(x,\partial U)\geqslant\frac{1}{n}\big\}$ suite (dénombrable) de compacts croissants d'union U, d'intérieur $\mathring{K}_n = \big\{x\in U : \|x\| < n \text{ et } \mathrm{dist}(x,\partial U) > \frac{1}{n}\big\}$ et tq $K_n\subset\mathring{K}_{n+1}\subset K_{n+1}$