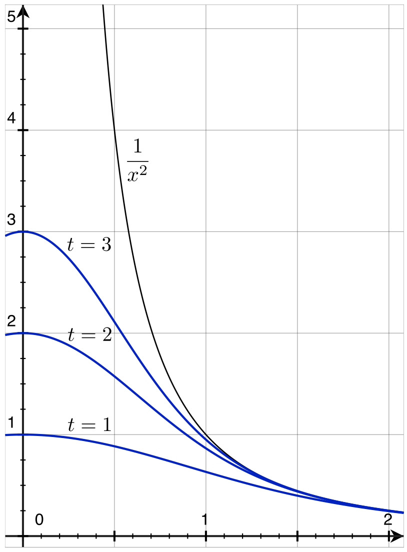
Étude et calcul de $\int \frac{1-e^{-tx^2}}{x^2}$



Posons l'intégrale paramétrique $\forall t \in \Omega = \mathbb{R}_+$,

$$\boxed{F(t) := \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x \, \frac{1-\mathrm{e}^{-tx^2}}{x^2}} = \int f(t,\cdot)$$

avec $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} : (t,x) \longmapsto \frac{1-\mathrm{e}^{-tx^2}}{x^2}$

Définition et continuité sur $\mathbb{R}_+$

- $\forall t \in \Omega, \quad f(t,\cdot) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}_+^*)$ mesurable car continue
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(\cdot,x) \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ continue sur $\mathbb{R}_+$ car composée de fonctions continues (exp continue sur $\mathbb{R}$)
- Domination sur tout intervalle $[0,b] \subset \Omega$ avec $a < +\infty$ par $\varphi_b \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}_+^*) \quad : \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall t \in [0,b]$,

$$\left|f(t,x)\right| = \frac{1-\mathrm{e}^{-tx^2}}{x^2} \leqslant \frac{1-\mathrm{e}^{-bx^2}}{x^2} \leqslant \frac{b\,x^2}{x^2} = b \quad \text{car} \quad \begin{array}{c} \forall u \geqslant 0, \\ 1-\mathrm{e}^{-u} \leqslant u \end{array}$$

$$\text{et} \quad \leqslant \frac{1}{x^2} \quad \text{car} \quad \mathrm{e}^{-tx^2} \geqslant 0$$

$$\text{donc} \quad \left|f(t,x)\right| \leqslant \varphi_b(x) := \begin{cases} b & \text{sur } [0,1[\\ x^{-2} & \text{sur } [1,+\infty[\end{cases} \quad \text{intégrable sur } \mathbb{R}_+^*$$

Ainsi, par continuité des intégrales paramétriques, $\forall t \in \Omega,\ f(t,\cdot) \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}_+^*)$ intégrable, et

$$\boxed{F \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+) \quad \text{définie et continue}}$$

En particulier, $f(0) = \int_0^{+\infty} 0 = 0$.

Limite en $+\infty$

Par l'inégalité de Fatou, comme $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n,\cdot) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+)$ positive mesurable,

$$\liminf_{n\to\infty} \underbrace{\int f(n,\cdot)}_{=F(n)} \underset{\text{Fatou}}{\geqslant} \int \liminf_{n\to\infty} f(n,\cdot) = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-nx^2}}{x^2} \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x = +\infty$$

Comme F est continue, par limite séquentielle, on a $\lim\limits_{+\infty} F = \lim\limits_{n\to\infty} F(n)$. On a donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty}$$

Dérivabilité sur $\mathbb{R}_+^*$

⚠ F n'est pas dérivable en $t=0$.

- $\forall t \in \Omega, \quad f(t,\cdot) \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}_+^*)$ intégrable
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(\cdot,x) \in \mathcal{CD}^0(\Omega)$ dérivable et $\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \partial_t f(t,x) = -\dfrac{1}{x^2} \cdot (-x^2 \, \mathrm{e}^{-tx^2}) = \mathrm{e}^{-tx^2}$
- Domination sur tout intervalle $[a,+\infty[\subset \Omega$ avec $a>0$ par $\varphi_a \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}_+^*)$:
  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall t \in [0,a]$,

$$\left|\partial_t f(t,x)\right| \;=\; \mathrm{e}^{-tx^2} \;\leqslant\; \mathrm{e}^{-ax^2} \;=:\; \varphi_a(x) \quad \text{intégrable sur } \mathbb{R}_+^* \text{ (gaussienne)}$$

Alors par dérivation sous le signe intégral, $F \in \mathcal{CD}^0(\mathbb{R}_+^*)$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\partial F(t) = \int_{\mathbb{R}_+^*} \partial_t f(t,\cdot) \;=\; \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx^2}\,\mathrm{d}x \underset{\substack{\text{dilatation}\\ t>0}}{=} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{t}} \underset{\substack{\text{demi}\\ \text{gaussienne}}}{=} \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Donc

$$\boxed{\partial F(t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}}$$

Calcul de F

F étant dérivable, c'est une primitive de ∂F. Donc par intégration, $\forall t \in \mathbb{R}_+$,

$$\int_0^t \partial F \;=\; \big[F\big]_0^t \;=\; F(t) - \underbrace{F(0)}_{=0}$$

Or

$$\int_0^t \partial F \;=\; \int_0^t \mathrm{d}x\,\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} \;=\; \sqrt{\pi}\,\big[\sqrt{\cdot}\,\big]_0^t \;=\; \sqrt{\pi\, t}$$

Ainsi, on a $\forall t \in \mathbb{R}_+$

$$\boxed{F(t) \;=\; \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x\,\frac{1-\mathrm{e}^{-tx^2}}{x^2} \;=\; \sqrt{\pi\, t}}$$