Espaces Duaux, Quadratiques et Hilbertiens

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Dualité

Le **dual** de E est le $\mathbb{K}$-EV des formes linéaires : $E^* := \mathrm{Lin}(E, \mathbb{K})$
Le **bidual** de E est le dual de E^* : $E^{**} = \mathrm{Lin}\big(\mathrm{Lin}(E, \mathbb{K}), \mathbb{K}\big)$

Le **crochet de dualité** est la forme bilinéaire

$$\begin{array}{rcl} \langle \cdot, \cdot \rangle : E^* \times E & \longrightarrow & E \\ (\varphi, x) & \longmapsto & \varphi(x) \end{array}$$

Formes linéaires coordonnées d'une base $(e_i)_{i \in I}$ de E :

$$\big(e_i^* : E \longrightarrow \mathbb{K}\big)_{i \in I} \quad \text{telles que} \quad \forall i, j \in I, \ \langle e_i^*, e_j \rangle = e_i^*(e_j) := \mathbb{1}_{i,j}$$

⚠ Chaque e_i^* dépend de *toute* la base, pas seulement de e_i.

Théorème de la base duale : En dimension finie n, si $(e_n)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de E, alors

$$\boxed{(e_i^*)_{1 \leqslant i \leqslant n} \text{ est une base de } E^*} \quad \text{donc} \quad \boxed{\dim E = \dim E^*}$$

Démonstration. Quelque soit la dimension, $(e_i^*)_{i \in I}$ est une famille **libre** :
Soient $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ tels que $\sum_{i \in I} \lambda_i e_i^* = 0_{E^*}$. Alors $\forall j \in I$, $0 = \big(\sum_{i \in I} \lambda_i e_i^*\big)(e_j) = \sum_{i \in I} \lambda_i \overbrace{e_i^*(e_j)}^{= \mathbb{1}_{i,j}} = \lambda_j$.
Donc $(\lambda_i)_{i \in I} = \mathbf{0}$. Ainsi, les $(e_i^*)_{i \in I}$ sont linéairement indépendants.

De plus, en dimension finie, $(e_i^*)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille **génératrice** de E^*. En effet, soit $\varphi \in \mathrm{Lin}(E, \mathbb{K})$. Alors

$$\boxed{\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i)\, e_i^*}$$

En effet, $\forall x \in E$, si l'on décompose x dans la base $(e_n)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, $\exists (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^n : x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ et alors

$$\forall j \in I, \ e_j^*(x) = e_j^*\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underbrace{e_j^*(e_i)}_{= \mathbb{1}_{i,j}} = \lambda_j \quad \text{donc} \quad \varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i)\, e_i^*(x)$$

□

Isomorphisme canonique avec le bidual : en *dimension finie*,

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \Psi : E & \longleftrightarrow & E^{**} \\ x & \longmapsto & \langle \cdot, x \rangle = \begin{array}{l} E^* \to \mathbb{K} \\ \varphi \mapsto \varphi(x) \end{array} \end{array} \quad \text{est un isomorphisme de } \mathbb{K}\text{-EV}}$$

Démonstration. Ψ est bien une application linéaire de E dans le bidual E^{**}.

Quelque soit la dimension, Ψ est toujours **injective** : $\mathrm{Ker}\,\Psi = \{0\}$.
En effet, supposons par l'absurde que $\exists x \in \mathrm{Ker}\,\Psi \backslash \{0\}$. On complète la famille (x) en une base $(x, b_i)_{i \in I}$ et on considère sa famille duale. En particulier, $x^*(x) = 1 \neq 0$ donc $\langle x^*, x \rangle \neq 0$, donc $\Psi(x) \neq 0_{E^{**}}$ donc $x \notin \mathrm{Ker}\,\Psi$. Contradiction.

Et alors, en dimension finie, Ψ surjective car Ψ injective et $\dim E = \dim E^{**}$. Donc Ψ isomorphisme. □

Base antéduale en dimension finie : Soit $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in (E^*)^n$ une base du dual E^*. Alors

- $\forall \mathcal{B}$ base de E, la base duale de $\mathcal{B}^*$ est $\mathcal{B}^{**} = \Psi(\mathcal{B})$
- $\exists! (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ base de E telle que $\forall i$, $e_i^* = f_i$. C'est la **base antéduale**.

- $$\boxed{\underbrace{(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}}_{\text{base antéduale}} = \Psi^{-1}\big(\underbrace{(f_i^*)_{1\leqslant i\leqslant n}}_{\text{base duale de } (f_i)_i}\big) \text{ est l'unique base de } E \text{ telle que } \forall i,\ e_i^* = f_i}$$

Démonstration.

i. En notant $\mathcal{B} =: (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, on a $\forall i,j,\ \Psi(e_i)(e_j^*) = \langle e_j^*, e_i\rangle = \mathbb{1}_{i,j}$ donc par définition $\Psi(e_i) = e_i^{**}$. Donc $\Psi(\mathcal{B}) = \mathcal{B}^{**}$

ii. **Existence** : troisième point. **Unicité** :

Par injectivité de Ψ,

iii. En effet, $\forall i$, les formes $e_i^* = \Psi^{-1}(f_i^*)^*$ et f_i sont égales car coïncident sur $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ (qui est une base de E car $(f_i^*)_{1\leqslant i\leqslant n}$ base de E^{**} et Ψ^{-1} isomorphisme) :

$$\forall i,j,\quad f_i(e_j) = f_i\big(\Psi^{-1}(f_j^*)\big) = \big\langle f_i, \Psi^{-1}(f_j^*)\big\rangle = \overbrace{\Psi\big(\Psi^{-1}(f_i^*)\big)}^{\Psi\circ\Psi^{-1}=\mathrm{id}}(f_j) = f_i^*(f_j) = \mathbb{1}_{i,j} = e_i^*(e_j)$$

□

2. Orthogonalité en Dualité

To do

3. Formes Quadratiques et Hermitiennes

$\psi = \phi(\cdot,*) = x \mapsto \phi(x,\cdot)$

4. Orthogonalité dans les Espaces Quadratiques

Isotropie

Un vecteur x est dit Φ-**isotrope** si

$$\Phi(x) = 0$$

Le **cône** de la forme Φ est l'ensemble de ses vecteurs isotropes :

$$\mathrm{Cone}(\Phi) := \{x\in E : \Phi(x) = 0\} = \Phi^{\leftarrow}(\{0\})$$

Le cône d'une forme quadratique est bien un cône au sens de l'alèbre linéaire : c'est une partie *stable par multiplication scalaire*. Mais ce n'est en général *pas* un espace vectoriel : ce n'est pas forcément une partie convexe.

Une forme quadratique/hermitienne est dite **définie** si elle ne possède pas de vecteurs isotropes non nuls, c'est à dire lorsque le cône est réduit à zéro :

$$\mathrm{Cone}(\Phi) = \{0\}$$

Identités d'orthogonalité

Soient F et G des sous-EV de E.

To do

$$(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$$
(reste vrai pour $A,B\subset E$ quelconque car $\langle A+B\rangle_{\mathbb{K}} = \langle A\rangle_{\mathbb{K}} + \langle B\rangle_{\mathbb{K}}$)

$$(F\cap G)^\perp \underset{\substack{=\\ \text{non}\\ \text{dégénéré}}}{\supset} F^\perp + G^\perp$$
(pas d'égalité pour $A,B\subset E$ quelconque car $\langle A\cap B\rangle_{\mathbb{K}} \subset \langle A\rangle_{\mathbb{K}} \cap \langle B\rangle_{\mathbb{K}}$ seulement)

Démonstration. Par orthogonalité en dualité, en *dimension finie* $(*)$, avec $\psi = \phi(\cdot,*) = x \mapsto \phi(x,\cdot)$:

$$(F+G)^\perp \;=\; \underbrace{\psi(F+G)}_{=\psi(F)+\psi(G)\ \text{par linéarité.}}{}^\circ \;=\; \big(\psi(F)+\psi(G)\big)^\circ \overset{(*)}{=} \psi(F)^\circ \cap \psi(G)^\circ \;=\; F^\perp \cap G^\perp$$

$$(F\cap G)^\perp \;=\; \underbrace{\psi(F\cap G)}_{\subset\,\psi(F)\cap\psi(G)}{}^\circ \;\supset\; \big(\psi(F)\cap\psi(G)\big)^\circ \overset{(*)}{=} \psi(F)^\circ + \psi(G)^\circ \;=\; F^\perp + G^\perp$$

avec <u>égalité</u> lorsque ψ est surjective $\overset{(*)}{\Leftrightarrow}$ ψ injective $\Leftrightarrow$ Φ *non dégénérée*.

Ou encore $(F^\perp+G^\perp)^\perp \overset{\text{premier}}{\underset{\text{point}}{=}} F^{\perp\perp}\cap G^{\perp\perp} \overset{(**)}{\supset} F\cap G$ donc $F^\perp+G^\perp \overset{(**)}{\subset} (F^\perp+G^\perp)^{\perp\perp} \;=\; (F\cap G)^\perp$
car $(**)$ $F\subset F^{\perp\perp}$ pour tout sous-EV F, avec <u>égalité</u> lorsque Φ *non dégénérée*.

On pourrait aussi utiliser un argument dimensionnel pour montrer l'égalité lorsque Φ non dégénérée. □

Démonstration. À la main, en dimension quelconque. Pour la première identité :

$$\begin{aligned}
x\in(F+G)^\perp &\iff \forall y\in F+G,\ \ \phi(x,y)=0\\
&\iff \begin{cases}\forall y\in F,\ \ \phi(x,y)=0\\ \forall y\in G,\ \ \phi(x,y)=0\end{cases} \qquad \text{(car } F,G\subset F+G\text{)}\\
&\iff \begin{cases}x\in F^\perp\\ x\in G^\perp\end{cases} \iff x\in F^\perp\cap G^\perp
\end{aligned}$$

Pour la seconde identité :

Soit $x\in F^\perp+G^\perp$. Soient alors $f\in F^\perp$ et $g\in G^\perp$ tels que $x=f+g$.
$\forall y\in F,\ \ \phi(f,y)=0$ et $\forall y\in G,\ \ \phi(g,y)=0$. Donc $\forall y\in F\cap G,\ \ \phi(x,y)=\underbrace{\phi(f,y)}_{=0\text{ car }y\in F}+\overbrace{\phi(g,y)}^{=0\text{ car }y\in G}=0$.
Donc $x\in(F\cap G)^\perp$.
⚠ La réciproque est fausse en général : on pourrait ne pas pouvoir décomposer x dans $F^\perp+G^\perp$. □

Contre-exemple. Lorsque Φ est dégénérée, c'est à dire $\operatorname{Ker}\Phi\neq\{0\}$.

Par exemple, $\operatorname{Ker}\Phi=\mathbb{K}\,x+\mathbb{K}\,y$ avec $x,y\in E$ non colinéaires, et $\dim E=3$. Alors :
Posons $F:=\mathbb{K}\,x$ et $G:=\mathbb{K}\,y$. Alors $F\cap G=\mathbb{K}\,x\cap\mathbb{K}\,y=\{0\}$. Donc $(F\cap G)^\perp=E$.
Pourtant, $\dim(F^\perp)=\dim E-\dim(F)+\dim(F\cap\operatorname{Ker}\Phi)=3-1-1=1$ car $F\subset\operatorname{Ker}\Phi$. De même, $\dim(G^\perp)=1$.
Donc $\dim(F^\perp+G^\perp)=2<3$. Donc $F^\perp+G^\perp\subsetneq E=(F\cap G)^\perp$.

Autre contre-exemple plus explicite, dans $E=\mathbb{R}^3$:
On prend comme forme bilinéaire symétrique $\phi:\ ((x_i)_i,(y_i))\longmapsto x_1\,y_1-x_3\,y_3$ dans la base canonique $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant 3}$.
Posons $F:=\mathbb{R}\,e_1$ et $G:=\mathbb{R}\,(e_1+e_2)$. Alors $F\cap G=\{0\}$ car (e_1,e_1+e_2) libre. Donc $(F\cap G)^\perp=\mathbb{R}^3$.
Mais on vérifie que $F^\perp=G^\perp=\mathbb{R}\,e_2+\mathbb{R}\,e_3$, donc $F^\perp+G^\perp=\mathbb{R}\,e_2+\mathbb{R}\,e_3\neq\mathbb{R}^3$. □

Famille orthogonale

Une famille $(x_i)_{i\in I}\in E^I$ est orthogonale $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

$$\forall (i,j)\in I^2_{\neq},\quad x_i\perp x_j \qquad (\Leftrightarrow\quad \phi(x_i,x_j)=0)$$

Étant donné l'existence de vecteurs isotropes, la notion de famille ortho*normale* n'a pas grand sens pour les formes non définies.

5. Formes Positives

On se place désormais dans un espace quadratique (E,Φ), avec Φ une forme *positive* :

$$\forall x\in E,\quad \phi(x,x)=\Phi(x)\geqslant 0$$

quadratique si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou hermitienne si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, c'est à dire que Φ est à valeurs dans $\mathbb{R}$. Ainsi, on ne considère pas le cas quadratique sur $\mathbb{C}$. On note ϕ la forme polaire associée à Φ.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Lorsque Φ est *positive*, on a $\forall x, y \in E$,

$$\boxed{|\phi(x,y)|^2 \;\leqslant\; \Phi(x)\cdot\Phi(y)}$$

et, si Φ est *définie* ($\Leftrightarrow$ non dégénérée ici), on a égalité lorsque

$$|\phi(x,y)|^2 \;=\; \Phi(x)\,\Phi(y) \quad\Longleftrightarrow\quad x, y \text{ \underline{colinéaires}}$$

mais les cas d'égalité sont bien plus nombreux (vecteurs isotropes) lorsque ϕ est dégénérée.

Démonstration. Dans le cas quadratique réel ou hermitien : $\phi(x,y)\in\mathbb{R}$. Par positivité de Φ,

$$\forall\lambda\in\mathbb{R},\quad \Phi(\lambda\,x+y) \;=\; \lambda^2\,\Phi(x)+2\,\lambda\,\phi(x,y)+\Phi(y) \;\geqslant\; 0$$

- Si $\Phi(x)\neq 0$, $P = \Phi(x)\,X^2+2\,\phi(x,y)\,X^1+\Phi(y)\,X^0 \;\in\; \mathbb{R}[X]$ est alors un polynôme du second degré positif, donc de déterminant
$$\Delta_{x,y} \;=\; 4\,\phi(x,y)^2-4\,\Phi(x)\,\Phi(y) \;\leqslant 0$$
négatif. Donc $\phi(x,y)\leqslant\Phi(x)\,\Phi(y)$. Quand Φ est définie, on a égalité si et seulement si
$$\begin{aligned}\Delta_{x,y}=0 \;&\Longleftrightarrow\; P \text{ possède une racine}\\ &\Longleftrightarrow\; \exists\lambda_0\in\mathbb{R} : \underbrace{\Phi(\lambda_0\,x+y)=0}\\ &\qquad\qquad\qquad\quad \Longleftrightarrow\; \lambda_0\,x+y=0 \qquad \text{car } \Phi \text{ définie}\\ &\Longleftrightarrow\; x, y \text{ colinéaires}\end{aligned}$$
- Si $\Phi(x)=0$, alors $\forall\lambda\in\mathbb{R},\; 2\,\lambda\,\phi(x,y)+\Phi(y)\geqslant 0$, donc nécessairement $\phi(x,y)=0$.
On a donc l'(in)égalité $|\phi(x,y)|^2=\Phi(x)\,\Phi(y)$. □

Démonstration. Dans le cas quadratique sur $\mathbb{C}$. On se ramène au cas quadratique sur $\mathbb{R}$ en posant $\theta=\arg(\phi(x,y))$ et $x':=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,x$. Alors $\phi(x',y)=\phi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,x,y)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\arg(\phi(x,y))}\,\phi(x,y)\in\mathbb{R}$

donc $\quad|\phi(x,y)|^2 \;=\; \left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\,\phi(x,y)\right|^2 \;=\; |\phi(x',y)|^2 \;\left\{\begin{matrix}\leqslant\\ \underset{\text{colin.}}{=}\end{matrix}\right\}\; \Phi(x')\cdot\Phi(y) \;=\; \Phi(x)\cdot\Phi(y)$

car $\Phi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,x)=\phi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,x,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,x)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\phi(x,x)=\Phi(x)$ et $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,x,y)$ colinéaires $\Longleftrightarrow$ (x,y) colinéaires. □

On a démontré du même coup que lorsque Φ est *positive*,

$$\mathrm{Cone}(\Phi)=\mathrm{Ker}(\Phi) \quad \text{et} \quad \Phi \text{ définie} \;\Longleftrightarrow\; \Phi \text{ non dégénérée}$$

Inégalité de Minkowski.

Lorsque Φ est une forme *quadratique positive*, on a $\forall x, y\in E$,

$$\boxed{\sqrt{\Phi(x+y)} \;\leqslant\; \sqrt{\Phi(x)}+\sqrt{\Phi(y)}}$$

Démonstration. Puisque Φ est positive, $\Phi(x+y)\in\mathbb{R}_+$. On peut donc passer à la racine l'inégalité :

$$\begin{aligned}\Phi(x+y) \;&=\; \phi(x,x)+\phi(y,x)+\phi(x,y)+\phi(y,y)\\ &=\; \Phi(x)+2\,\mathfrak{Re}(\phi(x,y))+\Phi(y)\\ &\leqslant\; \Phi(x)+2\,|\phi(x,y)|+\Phi(y)\\ \text{(Cauchy-Schwarz)}\qquad &\leqslant\; \Phi(x)+2\sqrt{\Phi(x)\,\Phi(y)}+\Phi(y) \;=\; \left(\sqrt{\Phi(x)}+\sqrt{\Phi(y)}\right)^2\end{aligned}$$

□

6. Espaces Préhilbertiens et Hilbertiens

Un **espace préhilbertien** est un espace quadratique (E, Φ), avec forme Φ *définie* et *positive* (donc quadratique si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, ou hermitienne si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$).
On note $\langle\cdot,\cdot\rangle$ la forme polaire de Φ, qui prend le nom de **produit scalaire**. Pour résumer :

Un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle : E^2 \longrightarrow \begin{smallmatrix}\mathbb{R}\\ \mathbb{C}\end{smallmatrix}$ est une forme $\begin{smallmatrix}\text{bilinéaire symétrique}\\ \text{sesquilinéaire hermitienne}\end{smallmatrix}$ définie positive :

- $\forall x, y \in E, \quad \langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ (symétrique/hermitienne)
- $\forall x \in E, \quad \langle\cdot, x\rangle$ est linéaire (donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sesquilinéaire/bilinéaire par symétrie)
- $\forall x \in E, \quad \langle x, x\rangle \geqslant 0$ (positive), et $\langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$ (définie)

Et alors $\|\cdot\| := \sqrt{\Phi} = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ est une norme sur E (car forme définie positive, homogène car Φ est 2-homogène, et respectant l'inégalité de Minkowski), dite **norme euclidienne**.

On munit un espace préhilbertien de sa topologie d'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$.

Un **espace euclidien** est un espace préhilbertien de dimension finie sur $\mathbb{K}=\mathbb{R}$.

Un **espace de Hilbert** est un espace préhilbertien *complet* pour sa norme d'EVN $\|\cdot\|$.

Continuité du produit scalaire

Le produit scalaire est, pour chaque variable, lipschitzien donc <u>continu</u> par linéarité.

Démonstration. Soit $x_0 \in E$ fixé. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,
$\forall x \in E, \quad |\langle x_0, x\rangle| \leqslant \|x_0\| \cdot \|x\|$. Donc la forme linéaire $\langle x_0, \cdot\rangle$ est $\|x_0\|$-lipschitzienne, donc continu. $\square$

Famille orthogonale, orthonormée

Une famille $(x_i)_{i\in I} \in E^I$ est orthogonale $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

$$\forall (i,j) \in I^2_{\neq}, \quad x_i \perp x_j \qquad (\Leftrightarrow \quad \langle x_i, x_j\rangle = 0)$$

et est orthonormée $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

$$\forall i, j \in I, \quad \langle x_i, x_j\rangle = \mathbb{1}_{i,j}$$

Une famille orthonormée est nécessairement *libre*.

Démonstration. Soit $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ famille presque nulle telle que $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0$.
Alors $\forall j \in I$, $0 = \left\langle x_j, \sum_{i\in I} \lambda_i x_i\right\rangle = \sum_{i\in I} \lambda_i \underbrace{\langle x_j, x_i\rangle}_{=\mathbb{1}_{i,j}} = \lambda_j$. Donc $(\lambda_i)_{i\in I} = (0)_I$. Donc $(x_i)_{i\in I}$ libre. $\square$

Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit $(x_n)_{1\leqslant n\leqslant N} \in E^N$ (avec $n \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$) une famille *libre*. On construit par récurrence une famille *orthonormée* $(e_n)_{1\leqslant n\leqslant N}$ telle que

$$\boxed{\forall n \in [\![1, N]\!], \quad \mathrm{Vect}(e_k)_{1\leqslant k\leqslant n} = \mathrm{Vect}(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}}$$

par le procédé de Gram-Schmidt : soit $n \in [\![1, N]\!]$, on construit $(e_n)_{1\leqslant k\leqslant n+1}$ de la façon suivante :

1. Par récurrence, on a $(e_n)_{1\leqslant k\leqslant n}$ orthonormée telle que $\mathrm{Vect}(e_k)_{1\leqslant k\leqslant n} = \mathrm{Vect}(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$

2. On cherche e_{n+1} sous la forme $e_{n+1} = x_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$. On veut que $\forall k \in [\![1, n]\!]$,

$$0 = \langle e_k, e_{n+1} \rangle = \left\langle e_k, x_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \right\rangle = \langle e_k, x_{n+1} \rangle + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle e_k, e_i \rangle = \langle e_k, x_{n+1} \rangle + \lambda_k$$

c'est à dire $\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_k = -\langle e_k, x_{n+1} \rangle$. Posons donc

$$\boxed{e'_{n+1} := x_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \langle x_{n+1}, e_k \rangle \, e_k \quad \text{que l'on normalise en} \quad e_{n+1} := \frac{e'_{n+1}}{\|e'_{n+1}\|}}$$

3. On a donc $(e_n)_{1 \leqslant k \leqslant n+1}$ orthonormée, $e_{n+1} \in \mathbb{K}\, x_{n+1} + \mathrm{Vect}(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} = \mathrm{Vect}(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n+1}$ par récurrence, et $x_{n+1} \in \mathbb{K}\, e_{n+1} + \mathrm{Vect}(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} = \mathrm{Vect}(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant n+1}$, donc

$$\mathrm{Vect}(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant n+1} = \mathrm{Vect}(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n+1}$$

Inégalité de Bessel

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une famille *orthonormée* au plus *dénombrable*. Alors $\forall x \in E$,

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \left|\langle x_n, x \rangle\right|^2 \leqslant \|x\|^2 < +\infty}$$

Démonstration.

——————————> □

Convergence normale dans un espace de Hilbert : Lemme de Riesz-Fischer

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert, c'est à dire *complet*. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une famille *orthogonale* au plus *dénombrable* de E. Alors

$$\boxed{\sum (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge pour } \|\cdot\| \iff \sum \left(\|x_n\|^2\right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge}}$$

Et dans ce cas, on a l'égalité de **Pythagore** infinie :

$$\boxed{\left\|\sum_{n=0}^{\infty} x_n\right\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|^2}$$

Démonstration.

——————————> □

Conséquence : dans un espace de Hilbert, la série de décomposition dans une famille *orthonormée* au plus *dénombrable* $(e_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ converge normalement :

$$\forall x \in E, \quad \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \langle e_n, x \rangle \, e_n \quad \text{converge}}$$

Démonstration. Par l'inégalité de Bessel (famille orthonormée dénombrable),

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\|\langle e_n, x \rangle \, e_n\right\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left|\langle e_n, x \rangle\right|^2 \underbrace{\|e_n\|^2}_{=1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left|\langle e_n, x \rangle\right|^2 \underset{\text{Bessel}}{\leqslant} \|x\|^2 < +\infty$$

Donc $\sum (\langle e_n, x\rangle\, e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge normalement, donc par le lemme de Riesz-Fischer, converge dans E. Mais pas forcément vers x, il faut pour cela (voir plus bas) que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une base hilbertienne. □

Complété d'un préhilbertien

Si $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace préhilbertien, alors il existe un espace de Hilbert $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ tel que

- $E \subset H$ et E dense dans H
- $\langle\cdot,\cdot\rangle = \langle\cdot,\cdot\rangle_H|_E$

---

7. Séparabilité, Bases hilbertiennes, et Décomposition

On se place dans un espace préhilbertien $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Rappels de séparabilité sur les EVNS

$(E, \|\cdot\|)$ est séparable $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\exists X \subset E$: X partie *dénombrable* et *dense* dans E

$X \subset E$ est une partie totale de E $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ le sous-espace engendré $\mathrm{Vect}(X)$ est dense dans E

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\exists X \subset E$ partie *totale* et *dénombrable* $\Longrightarrow$ E séparable

(extension de [à base dénombrable d'ouverts ⇒ séparable], par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ (coeffs des combinaisons linéaires))

Dénombrabilité d'une famille orthonormale

Si l'espace $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est *séparable*, toute famille *orthonormée* $(x_i)_{i\in I} \in E^I$ est *dénombrable*.

Démonstration. Par séparabilité, il existe une partie dénombrable $Y = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dense dans E.

Par densité de Y, avec $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{3}$, on construit $\phi : I \hookrightarrow \mathbb{N}$ telle que $\forall i \in I$, $\|x_i - y_{\phi(i)}\| \leqslant \varepsilon$, qui est en effet injective :

Soient $(i,j) \in I^2_{\neq}$. Par orthonormalité, $x_i \perp x_j$ donc $\|x_i - x_j\|^2 = \|x_i\|^2 + \|x_j\|^2 = 2$.

Alors $\sqrt{2} = \|x_i - x_j\| \leqslant \|x_i - y_{\phi(i)}\| + \|y_{\phi(i)} - y_{\phi(j)}\| + \|y_{\phi(j)} - x_j\| \leqslant 2\frac{\sqrt{2}}{3} + \|y_{\phi(i)} - y_{\phi(j)}\|$.

Donc $\|y_{\phi(i)} - y_{\phi(j)}\| \geqslant \sqrt{2} - {}^2\!/_3\sqrt{2} > 0$ donc $y_{\phi(i)} \neq y_{\phi(j)}$ donc nécessairement $\phi(i) \neq \phi(j)$.

I est donc dénombrable. □

Base hilbertienne

Une base hilbertienne est une famille *orthonormée* $\mathcal{E} = (e_i)_{i\in I} \in E^I$ qui est *totale* dans E, c'est à dire qu'elle engendre une partie *dense* de E :

$$\overline{\mathrm{Vect}(e_i)_{i\in I}} = E$$

ou encore que $\forall x \in E$, on peut approcher arbitrairement cet élément par une combinaison linéaire :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)} : \quad \left\| x - \sum_{i\in I} \lambda_i\, e_i \right\| < \varepsilon$$

⚠ Une combinaison linéaire est *finie*. Une base hilbertienne n'est en général *pas* une base algébrique. On a déplacé l'infini dans la densité. Ça remplace le concept de B.O.N. en dimension infinie.

Construction d'une base hilbertienne par séparabilité

Si l'espace $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est *séparable*, il possède une base hilbertienne (dénombrable comme prévu) :

1. Par séparabilité, on prend une partie $X = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ dénombrable dense dans E.
2. On en extrait une famille libre $(x_{\varphi(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ *maximale* et donc *totale*
3. On l'orthonormalise en $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ par le procédé de Gram-Schmidt :

$$\mathrm{Vect}(e_i)_{i\in\mathbb{N}} = \mathrm{Vect}(x_{\varphi(i)})_{i\in\mathbb{N}} \underset{\text{maximale}}{\overset{\text{extraction}}{=}} \mathrm{Vect}(X)$$

alors $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est encore totale, donc c'est une base hilbertienne.

Plus explicitement. Extraction maximale : on ne conserve un vecteur que s'il est linéairement indépendant des vecteurs précédents : posons $\varphi(0) = 0$ et par récurrence

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \varphi(k+1) := \min\left\{n > \varphi(k) \,:\, x_n \notin \mathrm{Vect}(x_{\varphi(i)})_{i\in[\![1,k]\!]}\right\} > \varphi(k)$$

Le procédé de Gram-Schmidt assure que tout reste dans une suite grandissante d'espaces vectoriels :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{Vect}(e_i)_{i\in[\![1,k]\!]} = \mathrm{Vect}(x_{\varphi(i)})_{i\in[\![1,k]\!]} = \mathrm{Vect}(x_n)_{n\in[\![1,\varphi(k)]\!]}$$

Alors par densité de X, on a que $\forall x \in E, \quad \forall \varepsilon > 0,$
$\exists k \in \mathbb{N} : \quad \|x - x_k\| < \varepsilon$. Par construction, puisque $\varphi(k) \geqslant k$, on a que $x_k \in \mathrm{Vect}(x_n)_{n\in[\![1,\varphi(k)]\!]} = \mathrm{Vect}(e_i)_{i\in[\![1,k]\!]}$
Alors $\exists (\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant k} \in \mathbb{K}^k \hookrightarrow \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$: $x_k = \sum_{i=1}^k \lambda_i\, e_i$. Donc $\left\|x - \sum_{i=1}^k \lambda_i\, e_i\right\| < \varepsilon$. □

Orthogonalité à une base hilbertienne

Soit $x \in E$ et $(e_i)_{i\in I} \in E^I$ une base hilbertienne de E. Alors

$$\boxed{(\forall i \in I,\ x \perp e_i) \quad \Longrightarrow \quad x = 0}$$

Démonstration. Par totalité de $\mathcal{E} = (e_i)_{i\in I}$ dans E, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$: $\left\|x - \sum_{i\in I} \lambda_i\, e_i\right\| < \varepsilon$.

$$\begin{array}{rcl}
\left\|x - \sum\limits_{i\in I} \lambda_i\, e_i\right\|^2 & = & \|x\|^2 - 2\,\mathfrak{Re}\left\langle x, \sum\limits_{i\in I} \lambda_i\, e_i\right\rangle + \left\|\sum\limits_{i\in I} \lambda_i\, e_i\right\|^2 \\
\text{(orthonormalité de } \mathcal{E}\text{)} & = & \|x\|^2 - \sum\limits_{i\in I} 2\,\mathfrak{Re}(\lambda_i \underbrace{\langle x, e_i\rangle}_{=0}) + \sum\limits_{i\in I} |\lambda_i|^2 \underbrace{\|e_i\|^2}_{=1} \\
(x \perp \mathcal{E}) & = & \|x\|^2 + \sum_{i\in I} |\lambda_i|^2 \\
\text{(densité)} & < & \varepsilon^2
\end{array}$$

Les deux termes étant positifs, on a nécessairement $\|x\| < \varepsilon$. C'est vrai $\forall \varepsilon > 0$, donc $\|x\| = 0$, donc $x = 0$. □

En particulier, on ne peut pas rajouter un vecteur à une base hilbertienne : les bases hilbertiennes sont donc maximales pour l'inclusion.

On a même la réciproque :

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un *espace de Hilbert*. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une famille *orthonormée dénombrable* de E (ce qui est toujours le cas si E est séparable). Alors

$$\boxed{\big(\forall x \in E,\ (\forall n \in \mathbb{N},\ x \perp e_n) \Rightarrow x = 0\big) \quad \Longrightarrow \quad (e_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une base hilbertienne}}$$

Démonstration. Montrons que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale dans E. Soit $x \in E$. Posons alors

$$z \ := \ x - \sum_{n=0}^{\infty} \langle e_n, x\rangle\, e_n$$

qui est bien défini car on a vu que la série $\sum\,(\langle e_n, x\rangle\, e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (inégalité de Bessel et lemme de Riesz-Fischer).

Maintenant, z vérifie que $\forall k \in \mathbb{N}$, $z \perp e_k$ car en utilisant la continuité du produit scalaire,

$$\langle e_k, z\rangle \;=\; \langle e_k, x\rangle - \left\langle e_k, \sum_{n=0}^{\infty} \langle e_n, x\rangle\, e_n \right\rangle \;=\; \langle e_k, x\rangle - \sum_{n=0}^{\infty} \langle e_n, x\rangle \overbrace{\langle e_k, e_n\rangle}^{=\mathbb{1}_{k,n}} \;=\; \langle e_k, x\rangle - \langle e_k, x\rangle \;=0$$

Donc $z=0$ par hypothèse. Ainsi,

$$\left\| \overbrace{x - \sum_{n=0}^{N} \langle e_n, x\rangle\, e_n}^{\in \operatorname{Vect}(e_n)_{n\in\mathbb{N}}} \right\| \xrightarrow[N\to\infty]{} \|z\| = 0$$

On peut donc approcher tout $x \in E$ par des combinaisons linéaires arbitrairement proches de $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Donc $\overline{\operatorname{Vect}(e_n)_{n\in\mathbb{N}}} = E$, donc $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale. C'est donc une base hilbertienne. □

Décomposition dans une base hilbertienne

Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une base hilbertienne *dénombrable* de l'*espace de Hilbert* $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Alors

$$\forall x \in E, \quad x \text{ se décompose en } \quad \boxed{x = \sum_{n=0}^{\infty} \langle e_n, x\rangle\, e_n}$$

Démonstration. Par l'inégalité de Bessel et le lemme de Riesz-Fischer, on a déjà vu que la série converge dans E :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \langle e_n, x\rangle\, e_n \;=:\; x'$$

Reste à montrer que $x' = x$. Maintenant, $\forall k \in \mathbb{N}$, $(x - x') \perp e_k$ car en utilisant la continuité du produit scalaire,

$$\langle e_k, x - x'\rangle \;=\; \langle e_k, x\rangle - \left\langle e_k, \sum_{n=0}^{\infty} \langle e_n, x\rangle\, e_n \right\rangle \;=\; \langle e_k, x\rangle - \sum_{n=0}^{\infty} \langle e_n, x\rangle \overbrace{\langle e_k, e_n\rangle}^{=\mathbb{1}_{k,n}} \;=\; \langle e_k, x\rangle - \langle e_k, x\rangle \;=0$$

Ainsi, $x - x'$ est orthogonal à une base hilbertienne, donc $x - x' = 0$, donc $x = x' = \sum_{n=0}^{\infty} \langle e_n, x\rangle\, e_n$ □

Identités de Parseval-Plancherel généralisées

Dans une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ *dénombrable* de l'*espace de Hilbert* $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, on a les identités

$$\forall x \in E, \quad \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \left|\langle x, e_n\rangle\right|^2 = \|x\|^2} \qquad \text{et} \qquad \forall x, y \in E, \quad \boxed{\langle x, y\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, e_n\rangle \langle e_n, y\rangle}$$

Démonstration. Pour la première identité, c'est la réécriture de l'égalité de Pythagore infinie après décomposition.
Pour la deuxième identité : Par décomposition dans la base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \langle e_n, x\rangle\, e_n \quad \text{et} \quad y = \sum_{n=0}^{\infty} \langle e_n, y\rangle\, e_n$$

Ainsi, par sesquilinéarité et continuité du produit scalaire,

$$\langle x, y\rangle = \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} \langle e_n, x\rangle\, e_n, \sum_{m=0}^{\infty} \langle e_m, y\rangle\, e_m \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \overline{\langle e_n, x\rangle}\, \langle e_m, y\rangle \underbrace{\langle e_n, e_m\rangle}_{=\delta_{n,m}} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, e_n\rangle \langle e_n, y\rangle$$

□

---

8. Projection orthogonale / sur un convexe fermé

8.1. Projection sur un convexe fermé

To do

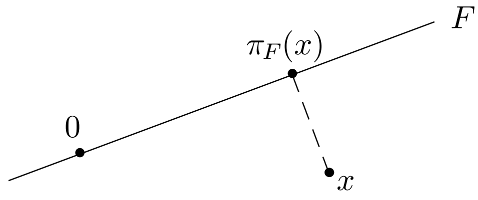
8.2. Projection sur un sous-EV de dimension finie

Soit un espace préhilbertien $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. On considère le cas particulier de convexe fermé :

Soit F un sous-EV de E de dimension finie et $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\in F^n$ une B.O.N. de F.

Le projeté orthogonal $\pi_F(x)$ de $x\in E$ sur F est caractérisé par :

- $\pi_F(x)\in F$, c'est à dire que
$$\exists(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\in\mathbb{K}^n : \quad \pi_F(x)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\, e_i$$
- c'est un projeté orthogonal :
$x-\pi_F(x)\in F^{\perp}$, c'est à dire que
$$\forall i\in[\![1,n]\!], \quad x-\pi_F(x)\perp e_k$$



Détermination. On retrouve que le projeté orthogonal est déterminé uniquement : $\forall k\in[\![1,n]\!]$,
$$0 \;=\; \langle x-\pi_F(x), e_k\rangle \;=\; \left\langle x-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\, e_i, e_k\right\rangle \;=\; \langle x, e_k\rangle-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\underbrace{\langle e_i, e_k\rangle}_{=\delta_{i,k}} \;=\; \langle x, e_k\rangle-\lambda_k$$
Donc $\forall k\in[\![1,n]\!], \quad \lambda_k=\langle x, e_k\rangle$. □

Ainsi, lorsque $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base orthonormée de F, $\boxed{\pi_F(x)=\sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle\, e_i}$.

Distance à F et meilleure approximation

La projection orthogonale est la meilleure approximation de x par un élément de F :
$$\forall y\in F, \quad \|x-\pi_F(x)\|\leqslant\|x-y\|, \quad \text{avec égalité} \Leftrightarrow y=\pi_F(x)$$
Autrement dit, la distance à F
$$\boxed{\operatorname{dist}(x,F):=\inf_{y\in F}\|x-y\|=\|x-\pi_F(x)\| \quad \text{est un minimum, atteint uniquement en } y=\pi_F(x)}$$

Démonstration.

——————————> □

De plus, l'approximation par projection orthogonale s'améliore lorsque F grossit :

——————————>

Reformulé en un problème d'optimisation :
$$\underset{(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\in\mathbb{K}^n}{\arg\inf}\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\, e_i\right\|=\big(\langle x, e_i\rangle\big)_{1\leqslant i\leqslant n}$$
Et plus généralement, lorsque $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\in E^n$ est une famille libre quelconque,