# Classes monotones et théorème d'unicité des mesures et des probabilités

## 1. Classes monotones

Une **classe monotone** sur $E$ est une classe $\mathcal{C} \subset \wp(E)$ de $E$ telle que :

- $E \in \mathcal{C}$
- $\forall A, B \in \mathcal{C} : A \subset B, \quad B \backslash A \in \mathcal{C}$ (stabilité par *différence*, en particulier par complémentarité : ${}^{\complement}A \in \mathcal{C}$)
- $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}^{\mathbb{N}}_{\nearrow}, \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}$ (stabilité par *union dénombrable croissante* $(A_n \subset A_{n+1})$)

Et donc stabilité par intersection dénombrable décroissante, d'où classe *monotone*.

On note $\mathrm{ClMon}(E)$ l'ensemble des classes monotones sur $E$.
Une **intersection quelconque de classes monotones** est encore une classe monotone :

$$\forall \{\mathcal{C}_i\}_{i\in\mathbb{I}} \subset \mathrm{ClMon}(E), \qquad \bigcap_{i\in\mathbb{I}} \mathcal{C}_i \in \mathrm{ClMon}(E)$$

On peut alors définir la **classe monotone engendrée** par une classe $\mathcal{X} \subset \wp(E)$ quelconque :

$$\mathcal{C}m(\mathcal{X}) := \bigcap \left\{ \mathcal{C} \in \mathrm{ClMon}(E) : \mathcal{C} \supset \mathcal{X} \right\}$$

C'est la **plus petite classe monotone** sur $E$ pour l'inclusion **contenant $\boldsymbol{\mathcal{X}}$** :

$$\forall \mathcal{C} \in \mathrm{ClMon}(E), \qquad \mathcal{X} \subset \mathcal{C} \ \Rightarrow\ \mathcal{C}m(\mathcal{X}) \subset \mathcal{C}$$

Propriétés de l'opérateur de tribus engendrées :

- $\forall \mathcal{C} \in \mathrm{ClMon}(E), \quad \mathcal{C}m(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$
- $\forall \mathcal{X} \subset \mathcal{Y} \subset \wp(E), \quad \sigma(\mathcal{X}) \subset \sigma(\mathcal{Y})$ (croissance par rapport à l'inclusion)

On remarque que tout tribu est en particulier une classe monotone. Ainsi, $\mathcal{C}m(\mathcal{X}) \subset \sigma(\mathcal{X})$.

**Lemme des classes monotones** :

Si $\mathcal{X}$ est une classe stable par *intersection finie*, sa classe monotone engendrée est sa tribu engendrée :

$$\big(\ \forall A, B \in \mathcal{X},\ A \cap B \in \mathcal{X}\ \big) \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{C}m(\mathcal{X}) = \sigma(\mathcal{X})$$

Puisque $\mathcal{C}m(\mathcal{X}) \subset \sigma(\mathcal{X})$ et que $\sigma(\mathcal{X})$ est la plus petite tribu, il suffit de montrer que $\mathcal{C}m(\mathcal{X})$ est une **tribu**. Posons

$$\forall A \in \mathcal{C}m(\mathcal{X}), \quad \mathcal{C}_{\cap A} := \left\{ B \in \mathcal{C}m(\mathcal{X}) :\ A \cap B \in \mathcal{C}m(\mathcal{X}) \right\}$$

qui est une classe monotone. Puisque $\mathcal{X}$ est stable par intersection finie, il est immédiat que $\mathcal{X} \subset \mathcal{C}_{\cap A}$. Donc

$$\mathcal{C}m(\mathcal{X}) \subset \mathcal{C}m(\mathcal{C}_{\cap A}) = \mathcal{C}_{\cap A} \quad \text{donc} \quad \forall A, B \in \mathcal{C}m(\mathcal{X}),\ A \cap B \in \mathcal{C}m(\mathcal{X})$$

donc $\mathcal{C}m(\mathcal{X})$ est stable par intersection finie. Alors $\mathcal{C}m(\mathcal{X})$ est une tribu avec les stabilités des classes monotones.

## 2. Unicité des mesures

**Théorème d'unicité des mesures $\sigma$-finies** :

Si $\mu$ et $\nu$ sont deux mesures sur un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$ coïncidant sur une classe $\mathcal{X} \subset \mathcal{A}$ *stable par intersection finie* $(\forall A, B \in \mathcal{X},\ A \cap B \in \mathcal{X})$ :

$$\forall A \in \mathcal{X} \ :\ \mu(A) = \nu(A)$$

- et si $\mu$ et $\nu$ sont finies de même masse $(\mu(E) = \nu(E) < +\infty)$
- ou si $\mu$ et $\nu$ sont $\sigma$-finies sur $\mathcal{X}$ : $\exists (E_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X}^{\mathbb{N}}_{\nearrow} \ :\ E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ suite croissante dans $\mathcal{X}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \mu(E_n) = \nu(E_n) < +\infty$

alors elles coïncident sur $\sigma(\mathcal{X})$ : $\forall A \in \sigma(\mathcal{X}) \ :\ \mu(A) = \nu(A)$.

- Lorsque $\mu$ et $\nu$ sont finies : posons la classe

  $$\mathcal{C} := \big\{ A \in \mathcal{A} \ :\ \mu(A) = \nu(A) \big\} \supset \mathcal{X} \quad \text{par hypothèse}$$

  On vérifie que c'est une classe monotone :
  - $E \in \mathcal{C}$ car $\mu(E) = \nu(E)$
  - $\forall A, B \in \mathcal{C} : A \subset B$, puisque $\mu$ et $\nu$ sont *finies* et coïncident sur $A$ et $B$, elles coïncident sur $B \backslash A$ : $\mu(B\backslash A) = \mu(B) - \mu(A) = \nu(B) - \nu(A) = \nu(B\backslash A)$ donc $B \backslash A \in \mathcal{C}$.
  - $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}^{\mathbb{N}}_{\nearrow}$, puisque $\mu$ et $\nu$ sont *finies* et coïncident sur les $A_n$, par limite croissante,

    $$\mu\big(\textstyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big) \xleftarrow[n\to\infty]{\nearrow} \mu(A_n) = \nu(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\nearrow} \nu\big(\textstyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big)$$

    donc par unicité de la limite, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}$.

  Par le *lemme des classes monotones*, puisque $\mathcal{X}$ est stable par intersection finie, on a

  $$\sigma(\mathcal{X}) \overset{\text{lemme}}{=} \mathcal{C}m(\mathcal{X}) \overset{\mathcal{X}\subset\mathcal{C}}{\subset} \mathcal{C}m(\mathcal{C}) = \mathcal{C} \quad \text{car} \quad \mathcal{C} \in \mathrm{ClMon}(E)$$

  Donc, par définition de $\mathcal{C}$, $\mu$ et $\nu$ coïncident sur $\sigma(\mathcal{X}) \subset \mathcal{C}$.

- Lorsque $\mu$ et $\nu$ sont $\sigma$-finies sur $\mathcal{X}$ : $\forall n \in \mathbb{N}$, posons les mesures sur $(E, \mathcal{A})$ resteintes à $E_n$ :

  $$\mu_n : A \longmapsto \mu(A \cap E_n) \quad \text{et} \quad \nu_n : A \longmapsto \nu(A \cap E_n)$$

  qui sont finies de même masse totale par hypothèse $(\mu_n(E) = \mu(E_n) = \nu(E_n) = \nu_n(E) < +\infty)$. Elles coïncident encore sur $\mathcal{X}$ car $\mathcal{X}$ est stable par intersection avec $E_n$, donc par le point précédent, elles coïncident sur $\sigma(\mathcal{X})$. Enfin, par limite croissante, $\forall A \in \sigma(\mathcal{X})$,

  $$\mu(A) \xleftarrow[n\to\infty]{\nearrow} \mu(A \cap E_n) = \mu_n(A) = \nu_n(A) = \nu(A \cap E_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\nearrow} \nu(A)$$

  puisque $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A \cap E_n = A \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = A \cap E = A$ par hypothèse; donc $\mu(A) = \nu(A)$.

En particulier, si $\mathcal{X}$ est une classe *stable par intersection finie* engendrant la tribu $(\sigma(\mathcal{X}) = \mathcal{A})$ et si $\mu$ et $\nu$ sont finies de même masse ou si $\mu$ et $\nu$ sont $\sigma$-finies sur $\mathcal{X}$,

$$\big(\ \forall A \in \mathcal{X} \ :\ \mu(A) = \nu(A)\ \big) \quad \Longrightarrow \quad \mu = \nu$$

**Théorème d'unicité des probabilités** :

Si $\mathbb{p}$ et $\mathbb{q}$ sont deux mesures *de probabilité* sur $(\Omega, \mathcal{A})$ coïncidant sur une classe $\mathcal{X} \subset \mathcal{A}$ *stable par intersection finie* $(\forall A, B \in \mathcal{X},\ A \cap B \in \mathcal{X})$ qui engendre $\mathcal{A}$, alors elles sont égales :

$$\big(\ \forall A \in \mathcal{X} \ :\ \mathbb{p}(A) = \mathbb{q}(A) \ \text{ et } \sigma(\mathcal{X}) = \mathcal{A}\ \big) \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{p} = \mathbb{q}$$

C'est de théorème d'unicité des mesures, dans le cas fini : $\mathbb{p}(\Omega) = \mathbb{q}(\Omega) = 1 < \infty$.