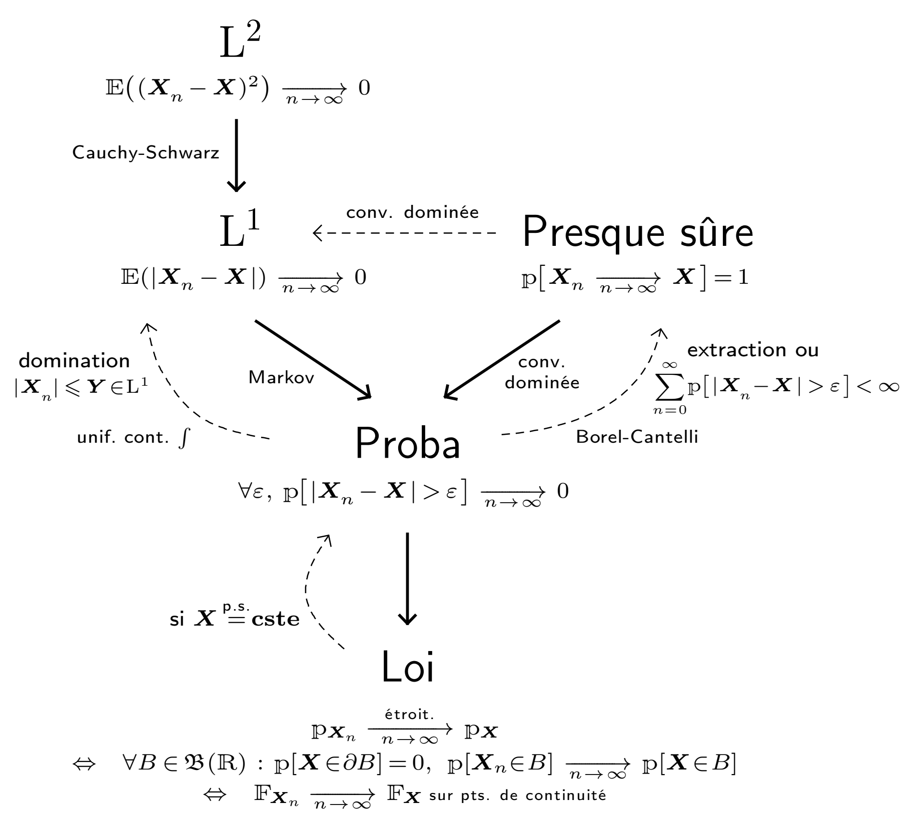
Convergence de suites de variables aléatoires

Résumé des différentes convergences et théorèmes les reliant :



Convergence $\mathbf{L^2} \Rightarrow \mathbf{L^1} \Rightarrow$ en probabilité : Soit $(\boldsymbol{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de V.A.R. et $\boldsymbol{X}$ une V.A.R.

$$\boldsymbol{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{L}^2} \boldsymbol{X} \quad\Longrightarrow\quad \boldsymbol{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{L}^1} \boldsymbol{X} \quad \begin{matrix}\Longrightarrow\\ \not\Longleftarrow\end{matrix} \quad \boldsymbol{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{p}} \boldsymbol{X}$$

- Si $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{L}^2} \boldsymbol{X}$, alors par *Cauchy-Schwarz*, $\mathbb{E}\big(|\boldsymbol{X}_n-\boldsymbol{X}|\big)^2 \leqslant \mathbb{E}\big((\boldsymbol{X}_n-\boldsymbol{X})^2\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ donc $(\sqrt{\cdot})$
$$\mathbb{E}\big(|\boldsymbol{X}_n-\boldsymbol{X}|\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad\text{donc}\quad \boldsymbol{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{L}^1} \boldsymbol{X}$$
- Si $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{L}^1} \boldsymbol{X}$, alors par l'*inégalité de Markov*, $\forall\varepsilon>0$,
$$\mathbb{p}\big[|\boldsymbol{X}_n-\boldsymbol{X}|>\varepsilon\big] \;\leqslant\; \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega |\boldsymbol{X}_n-\boldsymbol{X}|\,\mathrm{d}\mathbb{p} \;=\; \varepsilon^{-1}\,\mathbb{E}\big(|\boldsymbol{X}_n-\boldsymbol{X}|\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad\text{donc}\quad \boldsymbol{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{p}} \boldsymbol{X}$$
- Réciproque fausse : sur $(\Omega,\mathbb{p})=([0,1],\lambda_{[0,1]})$, si on pose $\boldsymbol{X}_n = n\cdot\mathbb{1}_{[0,1/n]}$ et $\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$, on a
$$\forall\varepsilon>0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \mathbb{p}\big[|\boldsymbol{X}_n-\boldsymbol{X}|>\varepsilon\big] = \lambda\big([0,1/n]\big) = 1/n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
mais
$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \mathbb{E}\big(|\boldsymbol{X}_n-\boldsymbol{X}|\big) = \int_{\mathbb{R}} n\cdot\mathbb{1}_{[0,1/n]}\,\mathrm{d}\lambda = n\cdot\lambda\big([0,1/n]\big) = \frac{n}{n} = 1 \;\not\xrightarrow[n\not\to\infty]{}\; 0$$

Convergence en probabilité dominée $\Rightarrow$ convergence $\mathbf{L^1}$:
Soient $(\boldsymbol{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de V.A.R. et $\boldsymbol{X}$ une V.A.R. tels que $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{p}} \boldsymbol{X}$ converge en mesure et

$$\exists \boldsymbol{Y}\in\mathrm{L}^1 \text{ intégrable } : \forall n\in\mathbb{N},\ |\boldsymbol{X}_n|\leqslant \boldsymbol{Y}. \qquad \text{Alors } \boldsymbol{X}\in\mathrm{L}^1 \text{ et } \boldsymbol{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{L}^1} \boldsymbol{X}$$

D'abord, on a $|\boldsymbol{X}| \overset{\text{p.s.}}{\leqslant} \boldsymbol{Y}$. Deux façons de le montrer :

- Soit $\varphi:\mathbb{N}\overset{>}{\hookrightarrow}\mathbb{N}$ extraction telle que $\boldsymbol{X}_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \boldsymbol{X}$ par Borel-Cantelli. Alors par passage à la limite presque sûre de l'inégalité $|\boldsymbol{X}_{\varphi(n)}|\leqslant \boldsymbol{Y}$ et par continuité de $|\cdot|$, on a $|\boldsymbol{X}| \overset{\text{p.s.}}{\leqslant} \boldsymbol{Y}$.
- On a $\mathbb{p}\big[|\boldsymbol{X}|>\boldsymbol{Y}\big] = \mathbb{p}\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} \underbrace{\big[|\boldsymbol{X}|\geqslant \boldsymbol{Y}+\tfrac{1}{i}\big]}\Big) = \lim_{n\to\infty}^{\searrow} \underbrace{\mathbb{p}\big[|\boldsymbol{X}|\geqslant \boldsymbol{Y}+\tfrac{1}{i}\big]} = 0$
$$\left.\begin{array}{lll} [\ \boldsymbol{Y}\geqslant|\boldsymbol{X}_n|\ ] & \subset \big[|\boldsymbol{X}|\geqslant|\boldsymbol{X}_n|+\frac{1}{i}\big] & \leqslant \mathbb{p}\big[|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_n|\geqslant\frac{1}{i}\big] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\ [\ |\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_n|\geqslant|\boldsymbol{X}|-|\boldsymbol{X}_n|\ ] & \subset \big[|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_n|\geqslant\frac{1}{i}\big] & \text{par convergence en proba.} \end{array}\right\}\forall n\in\mathbb{N}$$

Ensuite, soit $\varepsilon>0$. $\forall n\in\mathbb{N}$, posons $\boldsymbol{\Delta}_n =: |\boldsymbol{X}_n-\boldsymbol{X}|$. On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\boldsymbol{\Delta}_n) &= \mathbb{E}\big(\boldsymbol{\Delta}_n\cdot\mathbb{1}_{[\boldsymbol{\Delta}_n>\varepsilon]}\big) + \mathbb{E}\big(\boldsymbol{\Delta}_n\cdot\mathbb{1}_{[\boldsymbol{\Delta}_n\leqslant\varepsilon]}\big)\\ &\leqslant \mathbb{E}\big(2\,\boldsymbol{Y}\cdot\mathbb{1}_{[\boldsymbol{\Delta}_n>\varepsilon]}\big) + \varepsilon\cdot\mathbb{E}(\mathbf{1})\end{aligned}$$

car $\boldsymbol{\Delta}_n = |\boldsymbol{X}_n-\boldsymbol{X}| \leqslant |\boldsymbol{X}_n|+|\boldsymbol{X}| \overset{\text{p.s.}}{\leqslant} 2\,\boldsymbol{Y}$, par domination et puisque $|\boldsymbol{X}| \overset{\text{p.s.}}{\leqslant} \boldsymbol{Y}$. Alors par *uniforme continuité de l'intégrale* de $2\,\boldsymbol{Y}$ contre $\mathrm{d}\mathbb{p}$, à $\varepsilon>0$ fixé,

$$\exists\eta_\varepsilon>0 \;:\; \forall A\in\mathcal{A},\ \Big(\ \mathbb{p}(A)<\eta_\varepsilon \implies \int_A |2\,\boldsymbol{Y}|\,\mathrm{d}\mathbb{p} = \mathbb{E}\big(2\,\boldsymbol{Y}\cdot\mathbb{1}_A\big) < \varepsilon\ \Big)$$

Par convergence de $\boldsymbol{X}_n$ en proba., $\mathbb{p}[\boldsymbol{\Delta}_n\geqslant\varepsilon] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ donc $\exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geqslant N_\varepsilon$, $\mathbb{p}[\boldsymbol{\Delta}_n>\varepsilon]<\eta_\varepsilon$. Alors

$$\forall n\geqslant N_\varepsilon,\quad \mathbb{E}(|\boldsymbol{X}_n-\boldsymbol{X}|) = \mathbb{E}(\boldsymbol{\Delta}_n) \leqslant \mathbb{E}\big(2\,\boldsymbol{Y}\cdot\mathbb{1}_{[\boldsymbol{\Delta}_n>\varepsilon]}\big)+\varepsilon \leqslant \varepsilon+\varepsilon$$

C'est vrai $\forall\varepsilon>0$, donc $\mathbb{E}(|\boldsymbol{X}_n-\boldsymbol{X}|) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Convergence presque sûre $\Rightarrow$ en probabilité : Soit $(\boldsymbol{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de V.A.M. et $\boldsymbol{X}$ une V.A.M.

$$\boldsymbol{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \boldsymbol{X} \quad \begin{matrix}\Longrightarrow\\ \not\Longleftarrow\end{matrix} \quad \boldsymbol{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{p}} \boldsymbol{X}$$

- Cas des variables réelles : si $\boldsymbol{X}_n-\boldsymbol{X} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \mathbf{0}$, alors $\forall\varepsilon>0$, $\mathbb{1}_{[|\boldsymbol{X}_n-\boldsymbol{X}|>\varepsilon]} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \mathbf{0}$, donc
$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \mathbb{p}\big[|\boldsymbol{X}_n-\boldsymbol{X}|>\varepsilon\big] = \mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{[|\boldsymbol{X}_n-\boldsymbol{X}|>\varepsilon]}\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}(\mathbf{0}) = 0$$
par convergence dominée par $\mathbf{1}$, constante donc intégrable.
- À la main dans un espace métrique quelconque : Supposons que $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \boldsymbol{X}$.
$$\begin{aligned} C := \big[\boldsymbol{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \boldsymbol{X}\big] &= \big\{\omega\in\Omega : \forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N} : \forall n\geqslant N,\ d\big(\boldsymbol{X}_n(\omega),\boldsymbol{X}(\omega)\big)\leqslant\varepsilon\big\}\\ &= \bigcap_{\varepsilon>0}\ \bigcup_{N\in\mathbb{N}}\ \bigcap_{n\geqslant N}\ [d(\boldsymbol{X}_n,\boldsymbol{X})\leqslant\varepsilon]\\ &= \bigcap_{\varepsilon>0} {}^{c}A_{\varepsilon,\infty} \quad\text{avec}\quad A_{\varepsilon,\infty} := \bigcap_{N\in\mathbb{N}} A_{\varepsilon,N} \quad\text{et}\quad A_{\varepsilon,N} := \bigcup_{n\geqslant N} [d(\boldsymbol{X}_n,\boldsymbol{X})>\varepsilon]\end{aligned}$$
La convergence presque sûre donne $\mathbb{p}({}^{c}C)=0$. Soit $\varepsilon>0$. On a
$$A_{\varepsilon,\infty} \subset \bigcup_{\varepsilon'>0} A_{\varepsilon',\infty} = {}^{c}C \quad\text{donc}\quad \mathbb{p}(A_{\varepsilon,\infty}) \leqslant \mathbb{p}({}^{c}C) = 0 \quad\text{donc}\quad \mathbb{p}(A_{\varepsilon,\infty})=0$$
Enfin, puisque $\forall n\geqslant N$, $[d(\boldsymbol{X}_n,\boldsymbol{X})>\varepsilon]\subset A_{\varepsilon,N}$ et que les ensembles $(A_{\varepsilon,N})_{N\in\mathbb{N}}$ décroissent vers $A_{\varepsilon,\infty}$,
$$\forall n\geqslant N,\quad \mathbb{p}\big[|\boldsymbol{X}_n-\boldsymbol{X}|>\varepsilon\big] \leqslant \mathbb{p}(A_{\varepsilon,N}) \xrightarrow[n\to\infty]{\searrow} \mathbb{p}\Big(\bigcap_{N\in\mathbb{N}} A_{\varepsilon,N}\Big) = \mathbb{p}(A_{\varepsilon,\infty}) = 0$$
par limite décroissante.
- Réciproque fausse : sur $(\Omega,\mathbb{p})=([0,2],\lambda_{[0,2]})$, on pose $\forall n\geqslant1$, $\boldsymbol{X}_n = \mathbb{1}_{[0,1/n]+\cos(n)}$. On sait que $\mathrm{Adh}\,(\cos(n))_{n\geqslant1}=[0,1]$: les pics de taille 1 et de largeur $1/n$ balayent tout $[0,1]$ de façon irrégulière : $\forall\omega\in[0,1]$ fixé, on va avoir des bumps de $\boldsymbol{X}_n(\omega)$ de temps en temps, et clairement pas de convergence vers 0. Donc $\boldsymbol{X}_n \;\not\xrightarrow[n\not\to\infty]{\text{p.s.}}\; \mathbf{0}$ car $\lambda([0,1])\neq0$. Pourtant, on a convergence en mesure car $\forall\varepsilon>0$,
$$\mathbb{p}\big[|\boldsymbol{X}_n-\mathbf{0}|>\varepsilon\big] = \lambda\big([0,1/n]+\cos(n)\big) = 1/n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Convergence en probabilité $\Rightarrow$ extraction convergente presque sûrement :
Soient $(\boldsymbol{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de V.A.R. et $\boldsymbol{X}$ une V.A.R. tels que $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{p}} \boldsymbol{X}$ converge en mesure. Alors $\exists\varphi:\mathbb{N}\overset{>}{\hookrightarrow}\mathbb{N}$ extraction telle que $\boldsymbol{X}_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \boldsymbol{X}$.

Soit $\varepsilon>0$. Puisque $p_n := \mathbb{p}\big[|\boldsymbol{X}_n-\boldsymbol{X}|>\varepsilon\big] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, soit $\varphi:\mathbb{N}\overset{>}{\hookrightarrow}\mathbb{N}$ extractrice telle que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ p_n\leqslant\frac{1}{2^n} \qquad [\text{ genre } \varphi(n+1)=\min\{m>\varphi(n):\ p_n\leqslant2^{-n}\}\ ]$$

Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{p}\big[|\boldsymbol{X}_{\varphi(n)}-\boldsymbol{X}|>\varepsilon\big] = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 2 < +\infty$$

Donc par le *lemme de Borel-Cantelli appliqué à la convergence presque sûre*, $\boldsymbol{X}_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \boldsymbol{X}$.

Convergence $\mathbf{L^1} \Rightarrow$ extraction convergente presque sûrement :
Si $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{L}^1} \boldsymbol{X}$ converge dans L^1, alors $\exists\varphi:\mathbb{N}\overset{>}{\hookrightarrow}\mathbb{N}$ extraction telle que

$$\boldsymbol{X}_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \boldsymbol{X} \quad\text{et}\quad \exists\boldsymbol{Y}\in\mathrm{L}^1 \;:\; \forall n\in\mathbb{N},\ |\boldsymbol{X}_{\varphi(n)}|\leqslant\boldsymbol{Y}$$

Puisque $\mathbb{E}\big(|\boldsymbol{X}_n-\boldsymbol{X}|\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, soit $\varphi:\mathbb{N}\overset{>}{\hookrightarrow}\mathbb{N}$ extractrice telle que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{E}\big(|\boldsymbol{X}_{\varphi(n)}-\boldsymbol{X}|\big)\leqslant\frac{1}{2^n}$. Alors

$$\int\mathrm{d}\mathbb{p}\sum_{n=0}^{\infty}|\boldsymbol{X}_{\varphi(n)}-\boldsymbol{X}| = \sum_{n=0}^{\infty}\int|\boldsymbol{X}_{\varphi(n)}-\boldsymbol{X}|\,\mathrm{d}\mathbb{p} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 2 < +\infty$$

par interversion série intégrale positive. Donc $\boldsymbol{Y} := |\boldsymbol{X}|+\sum_{n=0}^{\infty}|\boldsymbol{X}_{\varphi(n)}-\boldsymbol{X}| \in\mathrm{L}^1$ car $\boldsymbol{X}\in\mathrm{L}^1$, et surtout :

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\boldsymbol{X}_{\varphi(n)}-\boldsymbol{X}| \overset{\text{p.s.}}{<} +\infty \quad \text{(argument à la Borel-Cantelli)} \quad\text{donc}\quad |\boldsymbol{X}_{\varphi(n)}-\boldsymbol{X}| \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} 0$$

par contraposée de la divergence grossière. Enfin, $\forall n\in\mathbb{N}$, $|\boldsymbol{X}_{\varphi(n)}| \leqslant |\boldsymbol{X}|+|\boldsymbol{X}_{\varphi(n)}-\boldsymbol{X}| \leqslant \boldsymbol{Y} \in\mathrm{L}^1$.