Convergence presque-partout par Borel-Cantelli

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathcal{M}(E,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ et $f\in\mathcal{M}(E,\mathbb{R})$ mesurables. Par le **lemme de Borel-Cantelli**, on a

$$\forall\varepsilon>0,\quad \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\mu\big\{|f_n-f|(\cdot)>\varepsilon\big\}\ <+\infty}_{\Longrightarrow\quad \limsup\limits_{n\in\mathbb{N}}|f_n-f| \overset{\mu\text{-pp}}{\leqslant} \varepsilon}\qquad\Longrightarrow\qquad f_n\xrightarrow[n\to\infty]{\mu\text{-pp}} f$$

Démonstration. $\forall n\in\mathbb{N}$, posons $\delta_n:=f_n-f$. Soit $i\geqslant 1$. Par hypothèse pour $\varepsilon={}^1\!/_i$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mu\big\{|\delta_n(\cdot)|>{}^1\!/_i\big\}\ <+\infty$$

Donc par le lemme de Borel-Cantelli,

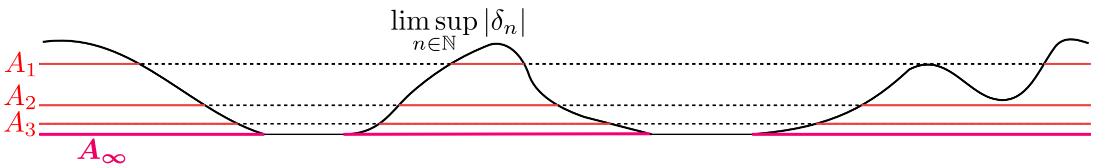
$$\mu(A_i)\ \leqslant\ \mu\Big(\underset{n\in\mathbb{N}}{\text{infinité}}\ \{|\delta_n(\cdot)|>{}^1\!/_i\}\Big)\ =\ 0\quad\text{avec}\quad A_i\ :=\ \Big\{\limsup_{n\in\mathbb{N}}|\delta_n(\cdot)|>{}^1\!/_i\Big\}$$

En effet,

$$\begin{aligned}\forall\varepsilon>0,\forall x\in\mathbb{R},\quad \limsup_{n\in\mathbb{N}}|\delta_n(x)|\ >\ \varepsilon\ &\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\ \inf_{N\in\mathbb{N}}\Big(\sup_{n\geqslant N}|\delta_n(x)|\Big)\ >\ \varepsilon\\ &\Longrightarrow\ \forall N\in\mathbb{N},\ \sup_{n\geqslant N}|\delta_n(x)|\ >\ \varepsilon\\ &\Longleftrightarrow\ \forall N\in\mathbb{N},\ \exists n\geqslant N\ :\ |\delta_n(x)|>\varepsilon\\ &\Longleftrightarrow\ x\ \in\ \bigcap_{N\in\mathbb{N}}\ \bigcup_{n\geqslant N}\ \{|\delta_n(\cdot)|>\varepsilon\}\ \overset{\text{def}}{=}\ \underset{n\in\mathbb{N}}{\text{infinité}}\ \{|\delta_n(\cdot)|>\varepsilon\}\end{aligned}$$

(autrement dit, lorsque la limite supérieure d'une suite, qui est une valeur d'adhérence, est $>\varepsilon$, il y a une infinité de termes de cette suite $>\varepsilon$, sans que la réciproque soit vraie).

Ainsi, $\forall i\geqslant 1$, $\limsup\limits_{n\in\mathbb{N}}|\delta_n(\cdot)| \overset{\mu\text{-pp}}{\leqslant} \frac{1}{i}$. Mais il faut un argument (à cause du μ-pp) pour conclure :



Les ensembles $(A_i)_{i\geqslant 1}$ croissent vers le lieu où δ_n ne converge pas vers 0 :

$$\begin{aligned}A_\infty\ =\ \bigcup_{i\geqslant 1}A_i\ =\ \bigcup_{i\geqslant 1}\Big\{\limsup_{n\in\mathbb{N}}|\delta_n(\cdot)|>{}^1\!/_i\Big\}\ &=\ \Big\{\limsup_{n\in\mathbb{N}}|\delta_n(\cdot)|>0\Big\}\\ &=\ {}^{\mathsf{c}}\Big\{\limsup_{n\in\mathbb{N}}|\delta_n(\cdot)|=0\Big\}\\ [\ \limsup=\liminf=0\ \Rightarrow\ \lim=0\ ]\qquad &=\ {}^{\mathsf{c}}\Big\{\delta_n(\cdot)\xrightarrow[n\to\infty]{}0\Big\}\end{aligned}$$

Donc par limite croissante,

$$\mu(A_\infty)\ =\ \mu\Big(\bigcup_{i\geqslant 1}A_i\Big)\ =\ \lim_{n\to\infty}\!\nearrow\ \overbrace{\mu(A_i)}^{=0}\ =\ 0$$

c'est à dire que le lieu où δ_n ne converge pas vers 0 est de mesure nulle, donc

$$\delta_n=f_n-f\ \xrightarrow[n\to\infty]{\mu\text{-pp}}\ 0\quad\text{donc}\quad f_n\ \xrightarrow[n\to\infty]{\mu\text{-pp}}\ f\qquad\square$$

Plus généralement, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu\big\{ f_n(\cdot) < a \big\} \; < +\infty \quad \Longrightarrow \quad \liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n \overset{\mu\text{-pp}}{\geqslant} a$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu\big\{ f_n(\cdot) > a \big\} \; < +\infty \quad \Longrightarrow \quad \limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n \overset{\mu\text{-pp}}{\leqslant} a$$

Notation. *Se méfier :*

on a seulement $\Big\{ \limsup_{n\in\mathbb{N}} |\delta_n(\cdot)| > \varepsilon \Big\} \subsetneq \limsup_{n\in\mathbb{N}} \big\{ |\delta_n(\cdot)| > \varepsilon \big\} \subsetneq \Big\{ \limsup_{n\in\mathbb{N}} |\delta_n(\cdot)| \geqslant \varepsilon \Big\}$

et $\Big\{ \limsup_{n\in\mathbb{N}} |\delta_n(\cdot)| = \ell \Big\} \neq \limsup_{n\in\mathbb{N}} \big\{ |\delta_n(\cdot)| = \ell \big\} \quad \to$ *mieux vaut utiliser la notation «* $\operatorname*{infinité}_{n\in\mathbb{N}} \{\ldots\}$ *».*