Loi géométrique $\leftrightarrow$ Loi exponentielle

Soient $\boxed{\boldsymbol{X} \rightsquigarrow \mathcal{E}xp(\lambda)}$ une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ, ainsi que la variable aléatoire $\boldsymbol{G} := \lfloor \boldsymbol{X} \rfloor$, partie entière de $\boldsymbol{X}$. Puisque $\boldsymbol{X}$ est de densité $x \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$, on a $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{p}\big[k \leqslant \boldsymbol{X} < k+1\big] = \int_k^{k+1} \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x = \Big[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\Big|_k^{k+1} = \mathrm{e}^{-\lambda k}\,(1-\mathrm{e}^{-\lambda})$$

donc par définition de $\boldsymbol{G} = \lfloor \boldsymbol{X} \rfloor$, on a $\big[\boldsymbol{G} = k\big] = \big[k \leqslant \boldsymbol{X} < k+1\big]$, et alors $\boldsymbol{G}$ suit la loi discrète :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{p}_{\boldsymbol{G}}(k) = \mathbb{p}\big[\boldsymbol{G} = k\big] = \mathrm{e}^{-\lambda k}\,(1-\mathrm{e}^{-\lambda})$$

On reconnait une loi géométrique de paramètre $1-\mathrm{e}^{-\lambda}$, donc $\boxed{\boldsymbol{G} = \lfloor \boldsymbol{X} \rfloor \rightsquigarrow \mathcal{G}\acute{e}om\big(p = 1-\mathrm{e}^{-\lambda}\big)}$.

Conséquence :

Si l'on dispose d'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ, on peut générer une variable aléatoire géométrique (sur $\mathbb{N}$) de paramètre de succès $p \in]0,1]$ si l'on prend $\lambda = -\ln(1-p)$. En particulier, si $\boldsymbol{U} \rightsquigarrow \mathcal{U}nif(0,1)$, alors

$$\boldsymbol{G} = \left\lfloor \frac{\ln(\boldsymbol{U})}{\ln(1-p)} \right\rfloor \rightsquigarrow \mathcal{G}\acute{e}om(p)$$

On cherche à déterminer la loi de $\boxed{\boldsymbol{V} := \boldsymbol{X} - \lfloor \boldsymbol{X} \rfloor}$, avec toujours $\boldsymbol{X} \rightsquigarrow \mathcal{E}xp(\lambda)$. Soit $a \in [0,1[$. $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{p}\big[0 < \boldsymbol{X} - k \leqslant a\big] = \mathbb{p}\big[k < \boldsymbol{X} \leqslant k+a\big] = \int_k^{k+a} \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda a}\, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\lambda k}\,(1-\mathrm{e}^{-\lambda a})$$

Or, on a l'union disjointe (sur $k \in \mathbb{N}$ car $\boldsymbol{X}$ est à valeurs positives)

$$\big[0 < \boldsymbol{X} - \lfloor \boldsymbol{X} \rfloor \leqslant a\big] = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} \big[\lfloor \boldsymbol{X} \rfloor = k\big] \cap \big[0 < \boldsymbol{X} - k \leqslant a\big] = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} \big[0 < \boldsymbol{X} - k \leqslant a\big]$$

(puisque $a \in [0,1[$, on a $0 < x - k \leqslant a \Rightarrow \lfloor x \rfloor = k$ par définition de $\lfloor \cdot \rfloor$). Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}_{\boldsymbol{V}}(a) - \mathbb{F}_{\boldsymbol{V}}(0) = \mathbb{p}\big[0 < \boldsymbol{X} - \lfloor \boldsymbol{X} \rfloor \leqslant a\big] &= \mathbb{p}\Big(\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} \big[0 < \boldsymbol{X} - k \leqslant a\big]\Big) \\
\text{[union disjointe dénombrable]} \quad &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{p}\big[0 < \boldsymbol{X} - k \leqslant a\big] \\
&= (1-\mathrm{e}^{-\lambda a}) \sum_{k=0}^{\infty} \big(\mathrm{e}^{-\lambda}\big)^k \\
\text{[série géométrique]} \quad &= \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda a}}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}
\end{aligned}$$

Évidemment, $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} - \lfloor \boldsymbol{X} \rfloor$ est à valeurs dans $[0,1[$ car par définition,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1 \quad \text{d'où} \quad 0 \leqslant x - \lfloor x \rfloor < 1$$

Donc $\mathbb{P}\big[\boldsymbol{V}<0\big]=0$. On vérifie de plus que, puisque $\boldsymbol{X}$ est à densité et $\mathbb{N}$ est de mesure de Lebesgue nulle dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{P}[\boldsymbol{V}=0] = \mathbb{P}\big[\boldsymbol{X}=\lfloor \boldsymbol{X}\rfloor\big] = \mathbb{P}[\boldsymbol{X}\in\mathbb{N}] = 0$. Donc

$$\mathbb{F}_{\boldsymbol{V}}(0) = \mathbb{P}[\boldsymbol{V}\leqslant 0] = \mathbb{P}\big([\boldsymbol{V}<0]\sqcup[\boldsymbol{V}=0]\big) = \mathbb{P}[\boldsymbol{V}<0]+\mathbb{P}[\boldsymbol{V}=0] = 0$$

Ainsi, la fonction de répartition de $\boldsymbol{V}$ est

$$\forall a\in\mathbb{R},\quad \mathbb{F}_{\boldsymbol{V}}(a) = \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda a}}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}\mathbb{1}_{[0,1]}(a)+\mathbb{1}_{]1,+\infty[}(a)$$

qui est continue ($\mathbb{F}_{\boldsymbol{V}}(1)=1$) et dérivable presque partout. Donc $\boldsymbol{V}$ est une variable aléatoire de densité

$$\boxed{\rho_{\boldsymbol{V}}(x) = \frac{\lambda}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathbb{1}_{[0,1]}(x)}$$

puisque $\mathbb{F}_{\boldsymbol{V}}(a)$ est une primitive généralisée de cette fonction.

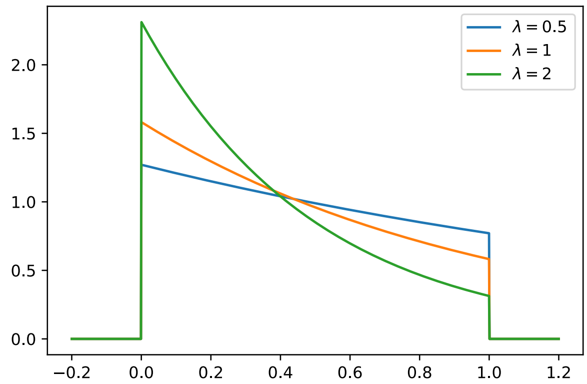

Figure 1. Loi de $\boldsymbol{V}$ pour $\lambda=0.5,1,2$

La loi conjointe du couple $(\boldsymbol{G},\boldsymbol{V})$ se factorise en produit des lois de $\boldsymbol{G}$ et $\boldsymbol{V}$:

$$\begin{aligned}
\forall k\in\mathbb{N},\forall a\in[0,1],\quad \mathbb{P}\big[(\boldsymbol{G},\boldsymbol{V})\in\{k\}\times[0,a[\big] &= \mathbb{P}\big(\big[\lfloor \boldsymbol{X}\rfloor=k\big]\cap\big[0\leqslant \boldsymbol{X}-\lfloor \boldsymbol{X}\rfloor<a\big]\big)\\
&= \mathbb{P}\big(\big[\lfloor \boldsymbol{X}\rfloor=k\big]\cap\big[0\leqslant \boldsymbol{X}-k<a\big]\big)\\
[\,0\leqslant a\leqslant 1\,]\qquad &= \mathbb{P}\big[0\leqslant \boldsymbol{X}-k<a\big]\\
[\text{ calcul précédent }]\qquad &= \mathrm{e}^{-\lambda k}\,(1-\mathrm{e}^{-\lambda x})\\
&= \mathrm{e}^{-\lambda k}\,(1-\mathrm{e}^{-\lambda})\cdot\frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda x}}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}\\
&= \mathbb{P}\big[\boldsymbol{G}=k\big]\cdot\mathbb{P}\big[0\leqslant \boldsymbol{V}<a\big]\\
[\text{ définition de la loi produit }]\qquad &= \big(\mathbb{P}_{\boldsymbol{G}}\otimes\mathbb{P}_{\boldsymbol{V}}\big)\big(\{k\}\times[0,a[\big)
\end{aligned}$$

et évidemment $\mathbb{P}\big[(\boldsymbol{G},\boldsymbol{V})\in\varnothing\times[0,a[\big]=0=\big(\mathbb{P}_{\boldsymbol{G}}\otimes\mathbb{P}_{\boldsymbol{V}}\big)\big(\varnothing\times[0,a[\big)$. Donc $\mathbb{P}_{(\boldsymbol{G},\boldsymbol{V})}$ et $\mathbb{P}_{\boldsymbol{G}}\otimes\mathbb{P}_{\boldsymbol{V}}$ coïncident sur la classe $\mathcal{C}=\big\{\{k\}\times[0,a[\big\}_{k\in\mathbb{N},a\in[0,1]}\cup\big\{\varnothing\times[0,a[\big\}_{a\in[0,1]}$ qui est *stable par intersection finie* et qui engendre $\mathcal{P}(\mathbb{N})\otimes\mathfrak{B}([0,1])$, tibu de définition de $\mathbb{P}_{(\boldsymbol{G},\boldsymbol{V})}$, car $\{[0,a[\}_{a\in[0,1]}$ engendre $\mathfrak{B}([0,1])$. Donc par la théorème d'unicité des mesures de probabilités, $\mathbb{P}_{(\boldsymbol{G},\boldsymbol{V})}=\mathbb{P}_{\boldsymbol{G}}\otimes\mathbb{P}_{\boldsymbol{V}}$. Donc

$$\boxed{\boldsymbol{G}\text{ et }\boldsymbol{V}\text{ sont indépendantes}}$$

On peut montrer que l'espérence se factorise, avec les mêmes idées : $\forall f_1,\, f_2 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$,

$$
\begin{array}{rcl}
& & \mathbb{E}\big(\varphi(\boldsymbol{G})\,\phi(\boldsymbol{V})\big) = \mathbb{E}\big(\varphi(\lfloor \boldsymbol{X} \rfloor)\cdot\phi(\boldsymbol{X}-\lfloor \boldsymbol{X} \rfloor)\big) \\
\left[\begin{array}{c}\text{théorème de transfert, loi de } \boldsymbol{X} \text{ à densité} \\ f=(f_1\circ\pi_1)\cdot(f_2\circ\pi_2)\end{array}\right] & = & \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi(\lfloor x \rfloor)\,\phi(x-\lfloor x \rfloor)\,\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\,\mathrm{d}x \\
\left[\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{\lfloor x \rfloor = k} = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\right] & = & \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \Big(\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{\lfloor x \rfloor = k}\Big)\,\varphi(\lfloor x \rfloor)\,\phi(x-\lfloor x \rfloor)\,\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \\
[\text{ interversion } \textstyle\sum \leftrightarrow \int \text{, positif }] & = & \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\lfloor x \rfloor = k}\,\varphi(k)\,\phi(x-k)\,\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \\
& = & \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \varphi(k)\,\mathrm{e}^{-\lambda k} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\lfloor x \rfloor = k}\,\phi(x-k)\,\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda(x-k)}\,\mathrm{d}x \\
\left[x+k\to x \quad \text{et} \quad \begin{array}{c}\lfloor x+k \rfloor = k \\ \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor = 0\end{array}\right] & = & \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \varphi(k)\,\mathrm{e}^{-\lambda k} \int_0^1 \phi(x)\,\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \\
& = & \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \varphi(k)\,\mathrm{e}^{-\lambda k}\,(1-\mathrm{e}^{-\lambda}) \int_0^1 \phi(x)\,\frac{\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}\,\mathrm{d}x \\
& = & \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \varphi(k)\,\mathbb{p}[\boldsymbol{G}=k]\cdot\int_0^1 \phi(x)\,\rho_{\boldsymbol{V}}(x)\,\mathrm{d}x \\
[\text{ } 2\times \text{ théorème de transfert }] & = & \mathbb{E}\big(f_1(\boldsymbol{G})\big)\cdot\mathbb{E}\big(f_2(\boldsymbol{V})\big)
\end{array}
$$

Donc $\boldsymbol{G}$ et $\boldsymbol{V}$ sont indépendantes.