Lemme de Slutsky

Soient $(\boldsymbol{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\boldsymbol{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de variables aléatoirs réelles telles que

$$\boldsymbol{X}_n \underset{n\to\infty}{\rightsquigarrow} \boldsymbol{X} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{A}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{p}} a\,\mathbf{1}$$

avec $a\in\mathbb{R}$, et sans aucune hypothèse d'indépendance. Alors le couple converge en loi :

$$(\boldsymbol{X}_n,\boldsymbol{A}_n) \underset{n\to\infty}{\rightsquigarrow} (\boldsymbol{X}, a\,\mathbf{1})$$

Démonstration :

On veut montrer qu'il y a convergence des fonctions caractéristiques $\Phi_{(\boldsymbol{X}_n,\boldsymbol{A}_n)}$ vers $\Phi_{(\boldsymbol{X},a\mathbf{1})}$.
Soit $\varepsilon>0$. $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall u,v\in\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
|\Phi_{(\boldsymbol{X}_n,\boldsymbol{A}_n)}(u,v)-\Phi_{(\boldsymbol{X},a\mathbf{1})}(u,v)| &= \left|\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(u\boldsymbol{X}_n+v\boldsymbol{A}_n)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(u\boldsymbol{X}+va\mathbf{1})}\right)\right| \\
&= \left|\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}u\boldsymbol{X}_n}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}v\boldsymbol{A}_n}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}u\boldsymbol{X}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}av}\right)\right| \\
[\ -+\mathrm{e}^{\mathrm{i}u\boldsymbol{X}_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}av}\ ] \quad &= \left|\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}u\boldsymbol{X}_n}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}v\boldsymbol{A}_n}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}av})\right)+\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}u\boldsymbol{X}_n}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}u\boldsymbol{X}}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}av}\right| \\
[\ \text{inég. triangulaire et intégrale}\ ] \quad &\leqslant \mathbb{E}(|\mathrm{e}^{\mathrm{i}u\boldsymbol{X}_n}|)\cdot\mathbb{E}(|\mathrm{e}^{\mathrm{i}v\boldsymbol{A}_n}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}av}|)+|\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}u\boldsymbol{X}_n}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}u\boldsymbol{X}})|\cdot|\mathrm{e}^{\mathrm{i}av}| \\
[\ |\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot}|\leqslant 1,\ \mathbb{E}(\mathbf{1})=1\ ] \quad &\leqslant \mathbb{E}(|\mathrm{e}^{\mathrm{i}v\boldsymbol{A}_n}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}av}|)+|\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}u\boldsymbol{X}_n}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}u\boldsymbol{X}})|
\end{aligned}$$

Or, en regardant sur $[|\boldsymbol{A}_n-a|>\varepsilon]$, on a par inégalité triangulaire et par inégalité des accroissements finis

$$\begin{aligned}
\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{A}_n v}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}av}\right| &= \mathbb{1}_{[|\boldsymbol{A}_n-a|>\varepsilon]}\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{A}_n v}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}av}\right|+\mathbb{1}_{[|\boldsymbol{A}_n-a|\leqslant\varepsilon]}\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{A}_n v}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}av}\right| \\
[\ |\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot}|\leqslant 1 \text{ et } |\partial\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot}|=|\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot}|=1\ ] \quad &\leqslant \mathbb{1}_{[|\boldsymbol{A}_n-a|>\varepsilon]}\cdot 2+\mathbb{1}_{[|\boldsymbol{A}_n-a|\leqslant\varepsilon]}\cdot 1\cdot|\boldsymbol{A}_n v-a\,v| \\
&\leqslant \mathbb{1}_{[|\boldsymbol{A}_n-a|>\varepsilon]}\cdot 2+\varepsilon\,|v|
\end{aligned}$$

donc, par convergence en loi de $(\boldsymbol{X}_n)_n$ vers $\boldsymbol{X}$ et en probabilité de $(\boldsymbol{A}_n)_n$ vers a,

$$\begin{aligned}
|\Phi_{(\boldsymbol{X}_n,\boldsymbol{A}_n)}(u,v)-\Phi_{(\boldsymbol{X},a\mathbf{1})}(u,v)| &\leqslant \mathbb{E}(\mathbb{1}_{[|\boldsymbol{A}_n-a|\geqslant\varepsilon]}\cdot 2+\varepsilon\,|v|\,\mathbf{1})+|\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}u\boldsymbol{X}_n}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}u\boldsymbol{X}})| \\
&= 2\cdot\mathbb{p}[|\boldsymbol{A}_n-a|\geqslant\varepsilon]+\varepsilon\,|v|+|\Phi_{\boldsymbol{X}_n}(u)-\Phi_{\boldsymbol{X}}(u)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0+\varepsilon\,|v|+0
\end{aligned}$$

et ce $\forall\varepsilon>0$. Donc $\Phi_{(\boldsymbol{X}_n,\boldsymbol{A}_n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi_{(\boldsymbol{X},a\mathbf{1})}$, donc par le théorème de Levy, on a $(\boldsymbol{X}_n,\boldsymbol{A}_n) \underset{n\to\infty}{\rightsquigarrow} (\boldsymbol{X},a\,\mathbf{1})$.