LGN/TCL trafiqués

Soit $(\boldsymbol{X}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de V.A.R.s indépendantes identiquement distribuées selon une loi de Bernoulli :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad \boldsymbol{X}_k \rightsquigarrow \mathcal{B}er(p) \quad \text{avec} \quad p\in\,]0,1[$$

$$\hookrightarrow\ \mu := \mathbb{E}(\mathcal{B}er(p)) = p \text{ et } \sigma^2 := \mathbb{V}\mathrm{ar}(\mathcal{B}er(p)) = p\,(1-p)$$

Notons $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\hat{\boldsymbol{X}}_n := \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{X}_k$ la moyenne empirique, à valeurs dans $[0,1]$ car les $\boldsymbol{X}_k$ sont dans $\{0,1\}$.

On considère la variable aléatoire à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$ (qui ressemble beaucoup au $\boldsymbol{Z}_n$ du TCL)

$$\boldsymbol{Y}_n := \sqrt{\frac{n}{\hat{\boldsymbol{X}}_n\,(1-\hat{\boldsymbol{X}}_n)}}\,\big(\hat{\boldsymbol{X}}_n-\mu\big) = f\big(\boldsymbol{Z}_n,\boldsymbol{V}_n\big) \quad \text{avec} \quad \begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \bar{\mathbb{R}} \\ (u,v) & \longmapsto & \dfrac{u}{\sqrt{v}} \end{array}$$

$$\boldsymbol{Z}_n := \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\big(\hat{\boldsymbol{X}}_n-\mu\big) \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{V}_n := \frac{1}{\sigma^2}\hat{\boldsymbol{X}}_n\,(1-\hat{\boldsymbol{X}}_n) \quad \begin{array}{c}\text{à valeurs dans } \mathbb{R}_+ \\ \text{car } 0\leqslant\hat{\boldsymbol{X}}_n\leqslant 1\end{array}$$

→ On a $\boldsymbol{V}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \mathbf{1}$. En effet, la *loi faible des grands nombres* ($(\boldsymbol{X}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ IID intégrables) donne la convergence en probabilités de la moyenne empirique $\hat{\boldsymbol{X}}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \mu\,\mathbf{1}$. De plus, on a

$$\boldsymbol{V}_n = g\big(\hat{\boldsymbol{X}}_n\big) \quad \text{avec} \quad g:\, x\longmapsto x(1-x)\,\sigma^{-2} \text{ continue sur } \mathbb{R}$$

donc par le *théorème de l'application continue* pour la convergence en probabilités, on a

$$\boldsymbol{V}_n = g\big(\hat{\boldsymbol{X}}_n\big) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} g(\mu\,\mathbf{1}) = \frac{p\,(1-p)}{\sigma^2}\mathbf{1} = \mathbf{1}$$

→ Le *théorème central limite* ($(\boldsymbol{X}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ IID carré-intégrables) donne la convergence en loi

$$\boldsymbol{Z}_n = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\big(\hat{\boldsymbol{X}}_n-\mu\big) \underset{n\to\infty}{\rightsquigarrow} \boldsymbol{N} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{N}\rightsquigarrow\mathcal{N}(0,1)$$

→ Le *lemme de Slutsky* donne alors la convergence en loi du couple

$$\big(\boldsymbol{Z}_n,\boldsymbol{V}_n\big) \underset{n\to\infty}{\rightsquigarrow} (\boldsymbol{N},\mathbf{1})$$

→ Finalement, le *théorème de l'application continue* pour la convergence en loi donne

$$\boldsymbol{Y}_n = f\big(\boldsymbol{Z}_n,\boldsymbol{V}_n\big) \underset{n\to\infty}{\rightsquigarrow} f(\boldsymbol{N},\mathbf{1}) = \frac{\boldsymbol{N}}{\sqrt{\mathbf{1}}} = \boldsymbol{N}$$

car $\mathbb{P}\big[(\boldsymbol{N},\mathbf{1})\in\mathrm{Discont}_f\big] = \mathbb{P}\big[(\boldsymbol{N},\mathbf{1})\in\mathbb{R}\times\{0\}\big] = \mathbb{P}[\mathbf{1}\in\{0\}] = 0$.

$$\boxed{\sqrt{\frac{n}{\hat{\boldsymbol{X}}_n\,(1-\hat{\boldsymbol{X}}_n)}}\,\big(\hat{\boldsymbol{X}}_n-\mu\big) \underset{n\to\infty}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(0,1)}$$

Remarque. On aurait le même résultat si on se ramenait à une varibale dans $\mathbb{R}$ en multipliant par l'indicatrice $\mathbb{1}_{[\hat{\boldsymbol{X}}_n(1-\hat{\boldsymbol{X}}_n)\neq 0]}$ qui converge en probabilité vers $\mathbf{1}$ (ce qui ne changerait donc pas la limite) car

$$\mathbb{P}\big[\hat{\boldsymbol{X}}_n\,(1-\hat{\boldsymbol{X}}_n)=0\big] = \mathbb{P}\big[\hat{\boldsymbol{X}}_n=0 \text{ ou } 1-\hat{\boldsymbol{X}}_n=0\big] = \mathbb{P}\big[\hat{\boldsymbol{X}}_n=0\big]+\mathbb{P}\big[\hat{\boldsymbol{X}}_n=1\big] = (1-p)^n+p^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

car, puisque les $\boldsymbol{X}_k$ sont à valeurs dans $\{0,1\}$ et sont IID Bernoulli,

$$\mathbb{p}[\hat{\boldsymbol{X}}_n = 0] = \mathbb{p}\left[\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{X}_k = 0\right] = \mathbb{p}[\forall k \in [\![1,n]\!], \boldsymbol{X}_k = 0] = \mathbb{p}\Big(\bigcap_{k=1}^{n} [\boldsymbol{X}_k = 0]\Big) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{p}[\boldsymbol{X}_k = 0] = (1-p)^n$$

Soit $(\boldsymbol{X}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de V.A.R.s indépendantes (pas forcément identiquement distribuées) de carrés intégrables, telle que la suite des variances $\big(\mathbb{V}\mathrm{ar}(\boldsymbol{X}_k)\big)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est bornée :

$$\exists C \in \mathbb{R}_+ \ : \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{V}\mathrm{ar}(\boldsymbol{X}_k) \leqslant C$$

On considère la variable aléatoire réelle $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\boldsymbol{M}_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\big(\boldsymbol{X}_k - \mathbb{E}(\boldsymbol{X}_k)\big)$, qui est une moyenne de variables centrées $\boldsymbol{X}_k - \mathbb{E}(\boldsymbol{X}_k)$: on s'attend donc à une convergence vers 0.

En effet, il y a convergence L^2 (donc L^1, en probabilité et en loi) :

$$\mathbb{E}\big(\boldsymbol{M}_n\big) = \mathbb{E}\bigg(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\big(\boldsymbol{X}_k - \mathbb{E}(\boldsymbol{X}_k)\big)\bigg) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\underbrace{\mathbb{E}\big(\boldsymbol{X}_k - \mathbb{E}(\boldsymbol{X}_k)\big)}_{=0} = 0$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(\boldsymbol{M}_n^2\big) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(\boldsymbol{M}_n) \ &= \ \mathbb{V}\mathrm{ar}\bigg(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\big(\boldsymbol{X}_k - \mathbb{E}(\boldsymbol{X}_k)\big)\bigg) \\
\text{[indépendance des } \big(\boldsymbol{X}_k - \mathbb{E}(\boldsymbol{X}_k)\big)_{k\in\mathbb{N}^*} \text{]} \quad &= \ \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{V}\mathrm{ar}\big(\boldsymbol{X}_k - \mathbb{E}(\boldsymbol{X}_k)\big) \\
\text{[variance invariante par translation]} \quad &= \ \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{V}\mathrm{ar}(\boldsymbol{X}_k) \\
\text{[variance bornée]} \quad &\leqslant \ \frac{1}{n^2}\, n\, C \ = \ \frac{C}{n} \ \xrightarrow[n\to\infty]{} \ 0
\end{aligned}$$

Donc on a une sorte de loi faible des grands nombres généralisée :

$$\boxed{\boldsymbol{M}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\big(\boldsymbol{X}_k - \mathbb{E}(\boldsymbol{X}_k)\big) \ \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{L}^2,\ \mathbb{P}} \ \mathbf{0}}$$

Soit $(\boldsymbol{X}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de V.A.R.s indépendantes de Bernoulli :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \boldsymbol{X}_k \rightsquigarrow \mathcal{B}er(p_k) \quad \text{avec} \quad (p_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \in \,]0,1[^{\mathbb{N}^*}$$

$\hookrightarrow$ $\mu_k := \mathbb{E}(\boldsymbol{X}_k) = p_k$ et $\sigma_k^2 := \mathbb{V}\mathrm{ar}(\boldsymbol{X}_k) = p_k\,(1-p_k)$

On est dans la situation précédente puisque $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\boldsymbol{X}_k) = p_k\,(1-p_k) \leqslant {}^1\!/_4$.

Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

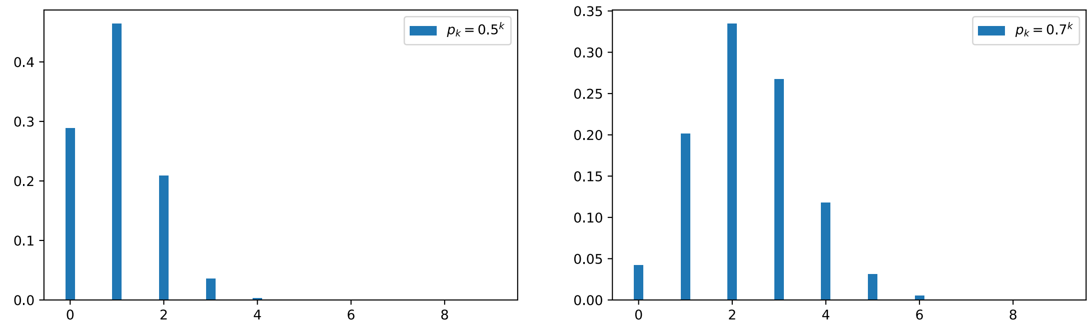
$$\boldsymbol{Z}_n \ := \ \frac{\sum_{k=1}^{n}\big(\boldsymbol{X}_k - \mu_k\big)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2}} \ = \ \frac{\boldsymbol{M}_n}{\bar{\sigma}_n}$$

avec (même $\boldsymbol{M}_n$ que précédemment) $\bar{\sigma}_n^2 = \mathbb{V}\mathrm{ar}(\boldsymbol{M}_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2$. On est dans une situation proche du TCL, mais sans distribution unique. On s'attend à une convergence en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$.

Premier cas : $\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k^2 < +\infty$. On n'a pas convergence vers une loi normale en général :

Distribution de $\sum_{k=1}^{100} \boldsymbol{X}_k$ lorsque $p_k = a^k$ (et donc $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} a^k(1-a^k) = \frac{a}{1-a^2} < \infty$) :

```
def do (a, ax):
    P = [1]
    for k in range(1,100):
        P = np.convolve(P, [1-a**k, a**k])
    ax.bar(np.arange(0,10), P[:10], width=0.2, label=r"$p_k={}^k$".format(a))
    ax.legend()
fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(1,2, figsize=(14,4))
do(0.5, ax1); do(0.7, ax2)
```



Ce qui n'est clairement pas une loi binomiale (mais s'en approche lorsque $a \to 1$).

Second cas : $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 = +\infty$. Posons $a_n^2 := \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$. Calculons la fonction caractéristique : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \Phi(\boldsymbol{Z}_n)(u) = \Phi\left(\frac{\boldsymbol{M}_n}{\bar{\sigma}_n}\right)(u) = \Phi\left(\sum_{k=1}^{n} (\boldsymbol{X}_k - \mu_k)\right)\left(\frac{u}{a_n}\right)$$

$$[\text{ indépendance des } \left(\boldsymbol{X}_k - \mathbb{E}(\boldsymbol{X}_k)\right)_{k\in\mathbb{N}^*}] \quad = \prod_{k=1}^{n} \Phi\left(\boldsymbol{X}_k - \mu_k\right)\left(\frac{u}{a_n}\right)$$

$$[\text{ formellement }] \quad = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\Phi\left(\boldsymbol{X}_k - \mu_k\right)\left(\frac{u}{a_n}\right)\right)\right)$$

On calcule et on effectue un développement limité uniforme en k de $\ln\left(\Phi\left(\boldsymbol{X}_k - \mu_k\right)(v)\right)$:

$$\Phi\left(\boldsymbol{X}_k - \mu_k\right)(v) = \mathbb{E}\left(e^{iv(\boldsymbol{X}_k - p_k)}\right)$$

$$[\text{ théorème de transfert }] \quad = e^{iv(0-p_k)}\, \mathbb{p}[\boldsymbol{X}_k = 0] + e^{iv(1-p_k)}\, \mathbb{p}[\boldsymbol{X}_k = 1]$$

$$= e^{-ivp_k}(1-p_k) + e^{iv(1-p_k)}\, p_k \;=:\; g(p_k, v)$$

Posons $f : (p,v) \longmapsto \ln\left(e^{-ivp}(1-p) + e^{iv(1-p)}\, p\right)$, qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1] \times V$, avec V voisinage compact de 0 ($\subset]-\pi, \pi[$ en fait), car $g(p,v)$ n'atteint pas $\mathbb{R}_-$ sur ce voisinage :

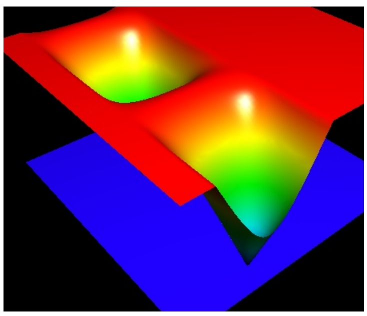
```
Sage] var('v p'); g = maxima(exp(-i*p*v)*(1-p)+exp(i*(1-p)*v)*p); f = log(g)
Sage] g.taylor(v,0,2)
```

$$1 - \frac{p\,(p-1)\,v^2}{2} + \cdots$$

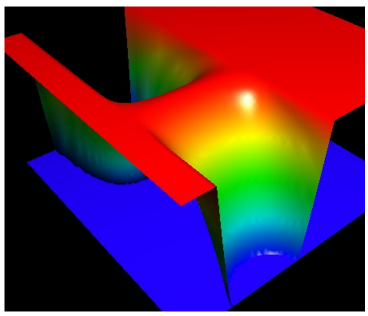
(strictement positif lorsque $v \in V$ voisinage de 0)

```
Sage] f.taylor(v,0,2)
```

$$-\frac{p\,(p-1)\,v^2}{2} + \cdots$$



$|e^{-ivp}(1-p) + e^{iv(1-p)}\,p|$



$1 - \frac{1}{2} v^2\, p(1-p)$

```
Sage] ( f.diff(v,3) /(p*(1-p)) * g^3 ).factor()
```

$$i\,(p\,e^{i\,v} + p - 1)\,e^{i\,v - 3\,i\,p\,v}$$

Donc le développement de Taylor de f en v avec reste intégral est : $\forall p \in [0,1]$, $\forall v \in V$,

$$f(p,v) \;=\; -\tfrac{1}{2}v^2\,p(1-p) \;+\; x^3\int_0^1 \partial_x^3 f(p,t\,v)\,\tfrac{(1-t)^2}{2}\,\mathrm{d}t \;=:\; -\tfrac{1}{2}v^2\,p(1-p) \;+\; r_p(u)$$

De plus, on a

$$\frac{\partial_x^3 f(p,v)}{p\,(1-p)} = \frac{\text{fonction continue}\,(p,v)}{g(p,v)^3} \quad \text{continue (car } g(p,v)\neq 0\text{) sur le compact } [0,1]\times V$$

donc, après avoir sorti le $p\,(1-p)$ (qui servira pour la suite) on peut majorer uniformément en p le reste :

$$|r_p(u)| \leqslant |x|^3\,p\,(1-p)\int_0^1 \left|\frac{\partial_x^3 f(p,t\,v)}{p\,(1-p)}\right| \tfrac{(1-t)^2}{2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{|x|^3}{6}\,p\,(1-p)\,C \quad \text{avec} \quad C = \max_{\substack{p\in[0,1]\\ v\in V}} \left|\frac{\partial_x^3 f(p,v)}{p\,(1-p)}\right|$$

Soit $u \in \mathbb{R}$. De plus, on a $\frac{u}{a_n} = \left(\sum_{k=1}^n \sigma_k^2\right)^{-1/2} u \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ par hypothèse.

Donc $\exists N \in \mathbb{N}^*$: $\forall n \geqslant N$, $\frac{u}{a_n} \in V$ (l'argument des fonctions caractéristiques se retrouve dans V). Ainsi,

$$\begin{aligned}
\forall n \geqslant N,\ \Phi(\boldsymbol{Z}_n)(u) \;&=\; \exp\left(\sum_{k=1}^n f\left(p_k, \frac{u}{a_n}\right)\right)\\
\text{[développement limité]} \quad &=\; \exp\left(\sum_{k=1}^n -\frac{1}{2}\frac{u^2}{a_n^2}\,u^2\,\underbrace{p_k(1-p_k)}_{=\sigma_k^2} + \sum_{k=1}^n r_{p_k}\!\left(\frac{u}{a_n}\right)\right)\\
&=\; \exp\left(-\frac{u^2}{2}\frac{1}{a_n^2}\sum_{k=1}^n \sigma_k^2 + \sum_{k=1}^n r_{p_k}\!\left(\frac{u}{a_n}\right)\right)\\
\text{[définition de } a_n^2 \text{]} \quad &=\; \exp\left(-\frac{u^2}{2} + \sum_{k=1}^n r_{p_k}\!\left(\frac{u}{a_n}\right)\right) = \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{e}^{\text{restes}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Alors} \quad \forall n \geqslant N, \quad \left|\frac{\Phi(\boldsymbol{Z}_n)(u)}{\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}}\right| \;&=\; \left|\exp\left(\sum_{k=1}^n r_{p_k}\!\left(\frac{u}{a_n}\right)\right)\right|\\
[\ |\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\mathfrak{Re}\,z} \leqslant \mathrm{e}^{|z|}\ ] \quad &\leqslant\; \exp\left(\sum_{k=1}^n \left|r_{p_k}\!\left(\frac{u}{a_n}\right)\right|\right)\\
\text{[uniformité du développement limité]} \quad &\leqslant\; \exp\left(\frac{C}{6}\frac{|u|^3}{a_n^3}\sum_{k=1}^n p_k\,(1-p_k)\right)\\
\text{[définition de } a_n^2 \text{]} \quad &=\; \exp\left(\frac{C}{6}\frac{|u|^3}{a_n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \text{car} \quad a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty
\end{aligned}$$

On peut donc affirmer que $\forall u \in \mathbb{R}$,

$$\Phi(\boldsymbol{Z}_n)(u) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} = \Phi(\boldsymbol{N})(u) \qquad \text{avec} \quad \boldsymbol{N} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$$

Donc d'après le théorème de Lévy, on a la convergence en loi :

$$\boldsymbol{Z}_n \;=\; \frac{\sum_{k=1}^n \left(\boldsymbol{X}_k - \mu_k\right)}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \sigma_k^2}} \;\overset{\rightsquigarrow}{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}}\; \mathcal{N}(0,1)$$