Quelques théorèmes d'intégration

Théorème de convergence dominée : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{M}(E))^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables. Si

$\to \quad \exists f \in \mathcal{M}(E) \quad : \quad f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu\text{-pp}} f$

$\to \quad \exists g \in \mathscr{L}^1(E,\mathbb{R}_+) \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n| \overset{\mu\text{-pp}}{\leqslant} g$ (domination **uniforme** par une fonction **intégrable**)

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n, f \in \mathscr{L}^1(E)$ et on a

$$\|f_n - f\|_1 = \int |f_n - f| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad \int \lim_{n\to\infty} f_n = \int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n$$

Lemme de Scheffé : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}(E,\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables *positives* convergente vers une fonction *intégrable* : $\exists f \in \mathscr{L}^1(E)$: $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu\text{-pp}} f$. Alors

$$\underbrace{\int f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int f}_{\text{[convergence sans perte de masse]}} \qquad \Longrightarrow \qquad \underbrace{\|f_n - f\|_1 = \int |f_n - f| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}_{\text{[convergence } \mathrm{L}^1 \text{]}}$$

> $\forall n \in \mathbb{N}$, on écrit $f - f_n = (f - f_n)_+ - (f - f_n)_-$ et $|f - f_n| = (f - f_n)_+ + (f - f_n)_-$ parties positives/négatives.
> De plus, par convergence de $(f - f_n)_+ \xrightarrow[n\to\infty]{\mu\text{-pp}} 0$ dominée par $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant (f - f_n)_+ \leqslant f \in \mathscr{L}^1$ (car $f_n \geqslant 0$),
> on a $\int (f - f_n)_+ \xrightarrow[n\to\infty]{} \int 0 = 0$. De plus, on a $\int (f - f_n)_+ - \int (f - f_n)_- = \int f - \int f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{[hyp]}} 0$.
> Donc $\lim_{n\to\infty} \int (f - f_n)_+ = \lim_{n\to\infty} \int (f - f_n)_- = 0$. Donc $\int |f_n - f| = \int (f - f_n)_+ + \int (f - f_n)_- \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Uniforme continuité de l'intégrale : Soit $f \in \mathscr{L}^1$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta_\varepsilon > 0 \ :\ \forall A \in \mathcal{A},\ \left(\mu(A) < \eta_\varepsilon \implies \int_A^{\mu} |f| < \varepsilon \right)$$

> Par convergence de $|f| \cdot \mathbb{1}_{\{|f| \geqslant n\}} \xrightarrow[n\to\infty]{} |f| \cdot \underbrace{\mathbb{1}_{\{|f|=+\infty\}}}_{\mu=0 \text{ car } f \text{ intégrable}} \overset{\mu\text{-pp}}{=} 0$ dominée par $|f|$, on a $\int_{\{|f|\geqslant n\}} |f| \xrightarrow[n\to\infty]{} \int 0 = 0$
> Soit $\varepsilon > 0$. $\exists n \in \mathbb{N}$: $\int_{\{|f|\geqslant n\}} |f| < \frac{\varepsilon}{2}$. Posons $\eta = \frac{\varepsilon}{2n}$. Alors $\forall A \in \mathcal{A}$: $\mu(A) < \eta$,
> $$\int_A |f| = \int_A |f| \cdot \mathbb{1}_{\{|f|<n\}} + \int_A |f| \cdot \mathbb{1}_{\{|f|\geqslant n\}} < n \cdot \mu(A) + \int_{\{|f|\geqslant n\}} |f| < n \cdot \frac{\varepsilon}{2n} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\Longrightarrow$ Dans $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), \mu_L)$ espace de Lebesgue, alors pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}$, on a que

$$F : x \longmapsto \int_0^x f \quad \in \mathcal{CU}^0_{|\cdot|}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \quad \text{uniformément continue}$$

> Soit $\varepsilon > 0$ et le η_ε de l'uniforme continuité de l'intégrale. Alors $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $|x - y| < \eta_\varepsilon$, si on pose $A = [x,y]$,
> $\mu_L(A) = |x - y|$ par car mesure de Lebesgue. Donc $|F(x) - F(y)| = \left|\int_0^x f - \int_0^y f\right| \leqslant \int_{[x,y]} |f| = \int_A |f| < \varepsilon$.

Rappel : **Mesure image de μ par $\phi \in \mathcal{M}\big((E,\mathcal{A}),(F,\mathcal{B})\big)$** mesurable, avec μ mesure sur $(E,\mathcal{A})$:

$$\phi_\star\mu \ :\ B \longmapsto \mu\big(\phi^{\leftarrow}(B)\big) \quad \text{mesure sur } (F,\mathcal{B})$$

[*pushforward measure* of μ by ϕ]. Puisque $\phi^{\leftarrow}(F) = E$, la mesure image $\phi_\star\mu$ et μ ont la même masse totale. Mais la σ-finitude n'est pas nécessairement conservée. Si f injective, $\forall A \in \mathcal{A}$, $(\phi_\star\mu)\big(\phi(A)\big) = \mu(A)$.

Théorème de transfert, ou changement de mesure image :
Soit $(F, \mathcal{B})$ un espace mesurable et $\phi \in \mathcal{M}\big((E, \mathcal{A}), (F, \mathcal{B})\big)$. Soit $\phi_\star\mu$ la mesure-image de μ, alors

$$\forall f \in \mathcal{M}\big((F, \mathcal{B}), \mathbb{R}\big), \qquad \underset{\text{intégrable contre } \phi_\star\mu}{f \in \mathscr{L}^1(F, \phi_\star\mu)} \iff \underset{\text{composée intégrable}}{f \circ \phi \in \mathscr{L}^1(E, \mu)} \quad \text{et alors}$$

(ou si $f \geqslant 0$ positive, dans $\overline{\mathbb{R}_+}$)

$$\int_F f \,\mathrm{d}(\phi_\star\mu) \;=\; \int_E f \circ \phi \,\mathrm{d}\mu$$

Si $f = \mathbb{1}_B$ avec $B \in \mathcal{B}$, on a $f \circ \phi = \mathbb{1}_B \circ \phi = \mathbb{1}_{\phi^{\leftarrow}(B)}$ donc on a bien

$$\int_E f \circ \phi \,\mathrm{d}\mu = \int_E \mathbb{1}_{\phi^{\leftarrow}(B)} \,\mathrm{d}\mu \overset{\text{def.}}{=} \mu\big(\phi^{\leftarrow}(B)\big) \underset{\text{image}}{\overset{\text{mesure}}{=}} \phi_\star\mu(B) \overset{\text{def.}}{=} \int_F \mathbb{1}_B \,\mathrm{d}(\phi_\star\mu) = \int_F f \,\mathrm{d}(\phi_\star\mu)$$

Donc par linéarité de cette formule, le théorème est vrai pour toute fonction étagée positive. Maintenant, soit $f \in \mathcal{M}((F, \mathcal{B}), \overline{\mathbb{R}_+})$ une fonction borélienne positive. Par le théorème d'approximation, soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\text{Étag}_+)^{\mathbb{N}}_{\nearrow}$ suite croissante de fonctions étagées positives telle que $f_n \xrightarrow[n \to \infty]{\nearrow} f$. Alors par convergence monotone $\times 2$,

$$\int_E f \circ \phi \,\mathrm{d}\mu \;\xleftarrow[n \to \infty]{\nearrow}\; \int_E f_n \circ \phi \,\mathrm{d}\mu \underset{\text{Étag}_+}{\overset{\text{vrai pour}}{=}} \int_F f_n \,\mathrm{d}(\phi_\star\mu) \;\xrightarrow[n \to \infty]{\nearrow}\; \int_F f \,\mathrm{d}(\phi_\star\mu)$$

puisque $(f_n \circ \phi)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions boréliennes positives telle que $f_n \circ \phi \xrightarrow[n \to \infty]{\nearrow} f \circ \phi$.
Le théorème est donc démontré pour les fonctions boréliennes positives.
Maintenant, soit $f \in \mathcal{M}((F, \mathcal{B}), \mathbb{R})$ borélienne quelconque. Par le point précédent, on a

$$f \circ \phi \in \mathscr{L}^1(E, \mu) \iff \int_E |f| \circ \phi \,\mathrm{d}\mu = \int_F |f| \,\mathrm{d}(\phi_\star\mu) < +\infty \iff f \in \mathscr{L}^1(F, \phi_\star\mu)$$

et alors en décomposant en partie positive/négative $f = f_+ - f_-$ avec $f_+, f_- \in \mathcal{M}((F, \mathcal{B}), \overline{\mathbb{R}_+})$ positives, on a

$$\int_E f \circ \phi \,\mathrm{d}\mu = \underbrace{\int_E f_+ \circ \phi \,\mathrm{d}\mu}_{<+\infty} - \underbrace{\int_E f_- \circ \phi \,\mathrm{d}\mu}_{<+\infty} \overset{\text{vrai pour}}{\underset{\mathcal{M}_+}{=}} \int_F f_+ \,\mathrm{d}(\phi_\star\mu) - \int_F f_- \,\mathrm{d}(\phi_\star\mu) = \int \underbrace{(f_+ - f_-)}_{=f} \,\mathrm{d}(\phi_\star\mu)$$