# Symétrie Universelle vs. Symétrie Propre en MQ

## À travers l'exemple de la symétrie par translation

## 1. Symétries universelles et propres

On trouve deux types de symétries à ce niveau en mécanique quantique non relativiste :

- Les *symétries universelles* que sont, entre autres, les symétries de l'espace-temps, les symétries de jauge… En non-relativiste, ces symétries galiléennes sont représentées par le groupe de Galilée, agissant sur l'espace des phases classique ou sur l'espace de Hilbert. En particulier, on a les isométries de l'espace euclidien représentées par le groupe d'Euclide $\mathbb{R}^3 \rtimes \mathrm{SO}(3)$, comprenant les translations, les rotations… Elles découlent de l'isotropie et de l'homogénéité de l'espace.

  Physiquement, deux observateurs dans deux référentiels inertiels différents *n'observent pas la même chose* stricto-sensu, mais sont tout de même *d'accord sur les propriétés du système* : la loi de Newton $m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}$ y est également valable, etc…

  On passe d'un référentiel inertiel à un autre par la transformation $\mathrm{Gal}(R, \vec{u}, \vec{a}, \tau)$ suivant des lois universelles, dont (*principe de relativté de Galilée*)

  $$\vec{x}' = R\vec{x} - t\,\vec{u} + \vec{a} \quad ; \quad \vec{v}' = \vec{v} - \vec{u} \quad ; \quad t' = t + \tau$$

  en classique, et leur équivalent (moyennes) en quantique. Ces symétries universelles contraignent fortement la structure algébrique de la mécanique (§2) et permettent de construire de zéro le lagrangien de la théorie.

- Les *invariances*, ou *symétries propres/internes* du système étudié. Lorsque certains éléments du système sont inchangés par l'action d'une certaine opération, il s'agit d'une symétrie propre. « Affirmer que les propriétés ne changent pas, c'est prendre en compte à la fois une symétrie universelle une symétrie interne propre ».

  Par exemple, une *coordonnée cyclique* $q_i$ (coordonnée qui n'apparait pas dans le lagrangien et dans le hamiltonien) définit une *invariance propre* du système de nature géométrique – une invariance par translation pour une coordonnée carthésienne, par rotation pour un angle. Elle définit aussi la conservation du moment $p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$ associé, autant dans le cadre classique :

  $$\dot{p_i} = \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = \{p_i, H\} = 0 \quad \text{ou simplement} \quad \dot{p_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0$$

  que dans le cadre quantique :

  $$\mathrm{i}\hbar \frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{p}_i)_{\mathsf{H}}}{\mathrm{d}t} = [\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{H}]_{\mathsf{H}} = 0$$

  (puisque $q_i$ n'apparait pas dans le hamiltonien et que $[\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{q}_j] = 0$ et $\{p_i, q_j\} = 0$ si $i \neq j$).

  En général, lorsqu'on parle d'invariance propre, on considère aussi l'environnement du système, en particulier les champs imposés, qui peuvent briser une symétrie lorsqu'appliqués (par exemple un terme $-mgz$ dans le hamiltonien, qui rend $z$ non cyclique) et par là même lever une dégénérescence.

## 2. Conséquences des symétries universelles galiléennes

Une translation $\mathcal{T}_{\vec{a}} = \mathrm{Gal}(0, 0, \vec{a}, 0)$ de vecteur $\vec{a}$ agit sur l'espace physique selon

$$\vec{x}' := \mathcal{T}_{\vec{a}}\,\vec{x} = \vec{x} + \vec{a} \tag{1}$$

Comment agit la translation dans l'espace des états quantiques (l'espace de Hilbert) ? Autrement dit, dans le formalisme des kets et du *point de vue actif*, que vaut $|\Psi'\rangle \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{\mathcal{T}}_{\vec{a}}\,|\Psi\rangle$ ? Et du *point de vue passif*, comment changent les observables lorsqu'on effectue une translation ? Comme mentionné, les prédictions – de nature probabiliste – doivent être inchangées.

- En toute généralité, on a doit avoir la conservation des probabilités

$$\boxed{\big|\langle\Psi'|\Phi'\rangle\big| \;=\; \big|\big\langle \boldsymbol{\mathcal{T}}_{\vec{a}}|\Psi\rangle, \boldsymbol{\mathcal{T}}_{\vec{a}}\,|\Phi\rangle\big\rangle\big| \;=\; \big|\langle\Psi|\Phi\rangle\big| \qquad (\forall\Psi,\Phi)}$$

  sans que la conservation des amplitudes de probabilité soit a priori conservées. Un opérateur vérifiant une telle propriété est un opérateur de Wigner. Le *théorème de Wigner*[1] impose à cet opérateur d'être *soit unitaire, soit anti-unitaire*. Par le fait que la translation nulle ($\mathcal{T}_{\vec{0}} = \mathbf{1}$) est un opérateur unitaire, et par la nature connexe du groupe des translations (translations infinitésimales),

$$\boldsymbol{\mathcal{T}}_{\vec{a}} \text{ est unitaire}$$

  De plus, on doit s'attendre à ce que, puisque les translations suivent la loi de composition $\mathcal{T}_{\vec{a}_1}\mathcal{T}_{\vec{a}_2} = \mathcal{T}_{\vec{a}_1+\vec{a}_2} = \mathcal{T}_{\vec{a}_2}\mathcal{T}_{\vec{a}_1}$ (groupe abélien), on doit encore avoir (*conséquence du théorème de Wigner*)

$$\boldsymbol{\mathcal{T}}_{\vec{a}_1}\boldsymbol{\mathcal{T}}_{\vec{a}_2} = \boldsymbol{\mathcal{T}}_{\vec{a}_1+\vec{a}_2} = \boldsymbol{\mathcal{T}}_{\vec{a}_2}\boldsymbol{\mathcal{T}}_{\vec{a}_1} \quad \text{et en particulier} \quad \boldsymbol{\mathcal{T}}_{-\vec{a}} \;=\; \boldsymbol{\mathcal{T}}_{\vec{a}}^{\;-1} = \boldsymbol{\mathcal{T}}_{\vec{a}}^{\;\dagger} \tag{2}$$

  Le seul opérateur anti-unitaire connu est l'opérateur de renversement du temps.

- Formellement, on peut caractériser les opérateurs de translation par leur action sur la base des états formels de position, à partir de (1) :

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{T}}_{\vec{a}}\,|\vec{x}\rangle \;\overset{\text{def}}{=}\; |\mathcal{T}_{\vec{a}}\,\vec{x}\rangle \;\overset{\text{vu}}{=}\; |\vec{x}+\vec{a}\rangle} \tag{3}$$

  On peut alors expliciter l'action sur un état $|\Psi\rangle$ en posant la fonction d'onde $\Psi(\vec{x}) = \langle\vec{x}|\Psi\rangle$ :

$$\langle\vec{x}_0|\Psi'\rangle \;=\; \langle\vec{x}_0|\,\boldsymbol{\mathcal{T}}_{\vec{a}}\,|\Psi\rangle \;=\; \int_{\mathbb{R}^3}\langle\vec{x}_0|\,\boldsymbol{\mathcal{T}}_{\vec{a}}\,|\vec{x}\rangle\langle\vec{x}|\Psi\rangle\,\mathrm{d}\vec{x} \;=\; \int_{\mathbb{R}^3}\langle\vec{x}_0|\vec{x}+\vec{a}\rangle\,\Psi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} \;=\; \Psi(\vec{x}-\vec{a})$$

  par changement de variable (puisque $\mathcal{T}_{\vec{a}}\,\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3$), d'où

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{T}}_{\vec{a}}\,\Psi(\vec{x}) \;=\; \Psi'(\vec{x}) \;=\; \Psi(\vec{x}-\vec{a}) \;=\; \Psi(\mathcal{T}_{\vec{a}}^{-1}\,\vec{x})} \tag{4}$$

  qu'on aurait aussi pu voir directement en remarquant que $\langle\vec{x}|\,\boldsymbol{\mathcal{T}}_{\vec{a}} \;=\; (\boldsymbol{\mathcal{T}}_{-\vec{a}}|\vec{x}\rangle)^{\dagger} \;=\; \langle\vec{x}-\vec{a}|$.

- On peut retrouver ce résultat en travaillant directement avec les fonctions d'ondes. La conservation des probabilités lorsqu'on translate le système

$$|\Psi(\vec{x})|^2 \;=\; |\Psi'(\vec{x}')|^2 \;=\; \big|\Psi'\big(\mathcal{T}_{\vec{a}}\,\vec{x}\big)\big|^2 \quad \text{qui entraîne} \quad \Psi'(\vec{x}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(\vec{x})}\,\Psi\big(\mathcal{T}_{\vec{a}}^{\;-1}\,\vec{x}\big)$$

  On montre alors que l'espérance de l'impulsion sur l'état transformé est $\langle\vec{\boldsymbol{p}}\rangle' = \langle\vec{\boldsymbol{p}}\rangle + \hbar\,\langle\vec{\nabla}\alpha\rangle$ (où $\langle\cdot\rangle' := \langle\cdot\rangle_{\Psi'}$ et $\langle\cdot\rangle := \langle\cdot\rangle_{\Psi}$). Or le principe de relativité de Galilée nous dit aussi que *translater un système ne change pas sa vitesse*. Ainsi, on a nécessairement $\vec{\nabla}\alpha \equiv \vec{0}$, donc $\alpha$ est une constante, que l'on peut simplement éliminer en tant que phase globale. On retrouve donc (4) :

$$\Psi'(\vec{x},t) \;=\; \Psi(\mathcal{T}_{\vec{a}}^{-1}\,\vec{x},t) \;=\; \Psi(\vec{x}-\vec{a},t)$$

---

1. Ébauche d'argument : L'égalité des modules $|\langle\Psi'|\Phi'\rangle| = |\langle\Psi|\Phi\rangle|$ s'écrit encore

$$\langle\Psi'|\Phi'\rangle^*\,\langle\Psi'|\Phi'\rangle \;=\; \langle\Psi|\Phi\rangle^*\,\langle\Psi|\Phi\rangle \qquad (\forall\Psi,\Phi)$$

et Wigner dit que l'on peut alors identifier $\langle\Psi'|\Phi'\rangle$ avec $\langle\Psi|\Phi\rangle$ (et pareil avec les termes conjugués, ce qui donne un opérateur unitaire; ou faire l'identification croisée $\langle\Psi'|\Phi'\rangle^* = \langle\Psi|\Phi\rangle$, ce qui donne un opérateur anti-unitaire) :

$$\forall\Psi,\Phi, \quad \langle\Psi'|\Phi'\rangle = \big\langle\boldsymbol{\mathcal{T}}_{\vec{a}}\,|\Psi\rangle, \boldsymbol{\mathcal{T}}_{\vec{a}}\,|\Phi\rangle\big\rangle = \langle\Psi'|\boldsymbol{\mathcal{T}}_{\vec{a}}^{\;\dagger}\,\boldsymbol{\mathcal{T}}_{\vec{a}}\,|\Phi'\rangle = \langle\Psi|\Phi\rangle \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{\mathcal{T}}_{\vec{a}}^{\;\dagger}\,\boldsymbol{\mathcal{T}}_{\vec{a}} = \hat{\mathbb{1}} \quad \text{(unitarité)}$$

En écrivant le produit scalaire sous forme intégrale, et par changement de variable, on montre que l'opérateur de translation conserve le produit scalaire ($\langle\Psi'|\Phi'\rangle = \langle\Psi|\Phi\rangle$), donc est unitaire.

- Toujours en travaillant avec les fonctions d'onde, on peut expliciter l'opérateur de translations agissant sur les fonctions d'ondes, en effectuant des translations infinitésimales de vecteur $\mathrm{d}\vec{a}$ :

$$\mathcal{T}_{\mathrm{d}\vec{a}}\,\Psi(\vec{x}) \,=\, \Psi(\vec{x}-\mathrm{d}\vec{a}) \,=\, \Psi(\vec{x}) - \vec{\nabla}\Psi(\vec{x})\cdot\mathrm{d}\vec{a} \,=\, \left(\mathbf{1} + \tfrac{1}{\mathrm{i}\hbar}\,\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\mathrm{d}\vec{a}\right)\Psi(\vec{x})$$

et ceci pour toute fonction d'onde. Donc l'opérateur $\vec{\boldsymbol{p}}$ est le *générateur des translations* :

$$\mathcal{T}_{\mathrm{d}\vec{a}} \,=\, \mathbf{1} + \tfrac{1}{\mathrm{i}\hbar}\,\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\mathrm{d}\vec{a} \tag{5}$$

En passant à des translations finies, on montre alors que

$$\boxed{\mathcal{T}_{\vec{a}} \,=\, \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\vec{a}}} \tag{6}$$

En partant de cette formulation, on retrouve (4) ainsi que les les propriétés de groupe (2).

- Toujours avec les fonctions d'onde, on montre facilement à partir de (4) que la position moyenne de l'état translaté est

$$\boxed{\langle\vec{\boldsymbol{x}}\rangle' \,=\, \langle\vec{\boldsymbol{x}}\rangle + \vec{a}} \tag{7}$$

En effet, en effectuant un changement de variable (en utilisant que l'*espace est infini*), on a

$$\langle\vec{\boldsymbol{x}}\rangle' = \int_{\mathbb{R}^3}\Psi'^*(\vec{r})\,\vec{r}\,\Psi'(\vec{r})\,\mathrm{d}^3\vec{r} \overset{(4)}{=} \int_{\mathbb{R}^3}\Psi^*(\vec{r}-\vec{a})\,\vec{r}\,\Psi'(\vec{r}-\vec{a})\,\mathrm{d}^3\vec{r} \;=\int_{\mathbb{R}^3}\Psi^*(\vec{r})\,(\vec{r}+\vec{a})\,\Psi'(\vec{r})\,\mathrm{d}^3\vec{r}$$

- Enfin, toujours du point de vue actif, tout comme le vecteur d'état change lorsqu'on translate le système, hamiltonien $\boldsymbol{H}$ aussi :

$$\mathrm{i}\hbar\,\partial_t|\Psi\rangle = \boldsymbol{H}|\Psi\rangle \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{i}\hbar\,\partial_t\,\mathcal{T}_{\vec{a}}^{\,-1}|\Psi'\rangle = \boldsymbol{H}\,\mathcal{T}_{\vec{a}}^{\,-1}|\Psi'\rangle \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{i}\hbar\,\partial_t|\Psi'\rangle = \mathcal{T}_{\vec{a}}\,\boldsymbol{H}\,\mathcal{T}_{\vec{a}}^{\,-1}|\Psi'\rangle$$

$\forall|\Psi\rangle$, donc le hamiltonien se transforme en

$$\boxed{\boldsymbol{H}^{\backprime} \,=\, \mathcal{T}_{\vec{a}}\,\boldsymbol{H}\,\mathcal{T}_{\vec{a}}^{\,-1} \quad \text{(symétrie euclidienne)}} \tag{8}$$

- Maintenant, si l'on prend un *point de vue passif*, ce n'est plus les observables ($\vec{\boldsymbol{x}}$ en particulier) qui sont fixés, mais le système étudié. C'est alors l'observateur qui se translate. Une observable $\boldsymbol{A}$ se change en $\boxed{\boldsymbol{A}' = \mathcal{T}_{\vec{a}}^{\,-1}\boldsymbol{A}\,\mathcal{T}_{\vec{a}}}$ à cause du principe de relativité qui impose $\langle\boldsymbol{A}'\rangle = \langle\boldsymbol{A}\rangle'$ (voir résumé).

- Si, au contraire, on translate le système et qu'un *second observateur se déplace avec le système*, son observable $A$ se transforme en $\boxed{\boldsymbol{A}^{\backprime} = \mathcal{T}_{\vec{a}}\,\boldsymbol{A}\,\mathcal{T}_{\vec{a}}^{\,-1}}$ (comme le hamiltonien). En effet, l'invariance galiléenne impose la conservation des prédictions : $\forall|\Psi\rangle$,

$$\boxed{\langle\boldsymbol{A}^{\backprime}\rangle' = \langle\boldsymbol{A}\rangle} \quad\Longleftrightarrow\quad \langle\Psi|\boldsymbol{A}|\Psi\rangle \,=\, \langle\Psi'|\boldsymbol{A}^{\backprime}|\Psi'\rangle \,=\, \langle\Psi|\,\mathcal{T}_{\vec{a}}^{\dagger}\,\boldsymbol{A}^{\backprime}\,\mathcal{T}_{\vec{a}}\,|\Psi\rangle \,=\, \langle\Psi|\,\mathcal{T}_{\vec{a}}^{\,-1}\,\boldsymbol{A}^{\backprime}\,\mathcal{T}_{\vec{a}}\,|\Psi\rangle$$

donc $\boldsymbol{A} = \mathcal{T}_{\vec{a}}^{\,-1}\boldsymbol{A}^{\backprime}\,\mathcal{T}_{\vec{a}}$. On peut s'amuser à retrouver la relation initiale pour $\vec{\boldsymbol{x}}$ sur les moyennes avec (6). On a $\vec{\boldsymbol{x}}^{\backprime} \,=\, \mathcal{T}_{\vec{a}}\,\vec{\boldsymbol{x}}\,\mathcal{T}_{\vec{a}}^{\,-1} \,=\, \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\vec{a}}\,\vec{\boldsymbol{x}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\vec{a}} \,=\, \vec{\boldsymbol{x}} + \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\left[\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\vec{a}, \vec{\boldsymbol{x}}\right] + \cdot\!/\!\cdot \,=\, \vec{\boldsymbol{x}} - \vec{a}$, donc

$$\begin{aligned}
\langle\vec{\boldsymbol{x}}^{\backprime}\rangle' \,=\, \langle\Psi'|\,\vec{\boldsymbol{x}}^{\backprime}\,|\Psi'\rangle \;&=\; \langle\Psi'|\,\vec{\boldsymbol{x}}\,|\Psi'\rangle - \langle\Psi'|\Psi'\rangle\,\vec{a} \\
\text{[ avec (7) ]} \;&=\; \langle\vec{\boldsymbol{x}}\rangle' - \vec{a} \;=\; \langle\vec{\boldsymbol{x}}\rangle + \vec{a} - \vec{a} \\
&=\; \langle\vec{\boldsymbol{x}}\rangle
\end{aligned}$$

En résumé, l'observable se transforme en $\boldsymbol{A}$' de façon à *compenser le changement de vecteur d'état* en $|\Psi'\rangle$ lors de la transformation.

# 3. Conséquences d'une symétrie propre au système

Prennons l'exemple d'une particule dans un champ électrique :

$$\boldsymbol{H} = \frac{\vec{\mathbf{p}}^2}{2m} - q\,E\,\boldsymbol{z}$$

Le hamiltonien ne dépend explicitement pas des coordonnées $x$ et $y$, qui sont donc des variables cycliques. Si l'on se place dans le point de vue passif, en général, lors d'une translation, le hamiltonien est modifié en

$$\boldsymbol{H}' = \mathcal{T}_{\vec{a}}^{-1}\boldsymbol{H}\,\mathcal{T}_{\vec{a}}$$

Mais ici, le *système est invariant par translation* $\perp z$, et on s'attend à ce que la dynamique le soit aussi :

$$\forall \vec{a} \perp z, \quad \mathcal{T}_{\vec{a}}^{-1}\boldsymbol{H}\,\mathcal{T}_{\vec{a}} = \boldsymbol{H}$$

En effet, si on utilise la forme (6) pour les translations $\perp z$, c'est à dire $\mathcal{T}_{a_x,a_y} = \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}a_x\boldsymbol{p}_x}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}a_y\boldsymbol{p}_y}$, et puisque $[\vec{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{p}_x] = [\vec{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{p}_y] = 0$ et que $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ ne sont pas présents dans le hamiltonien, on a bien

$$\forall a_x, a_y, \quad [\boldsymbol{H}, \mathcal{T}_{a_x,a_y}] = 0$$

En résumé, le système est invariant par translation $\perp z$ si le hamiltonien commute avec les générateurs de ces translations que sont les moments linéaires selon $x$ et $y$ :

$$\forall \vec{a} \perp z,\ [\boldsymbol{H}, \mathcal{T}_{\vec{a}}] = 0 \iff [\boldsymbol{H}, \boldsymbol{p}_x] = [\boldsymbol{H}, \boldsymbol{p}_y] = 0$$

Ce qui implique que ces moments sont des *constantes du mouvement* d'après l'équation de Heisenberg

$$\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{p}_i)_{\mathsf{H}}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{H}]_{\mathsf{H}} = 0 \qquad (i = x, y)$$

On peut aussi le voir sur les moyennes avec le théorème d'Ehrenfest, si $\boldsymbol{H}$ est indépendant du temps :

$$\frac{\mathrm{d}\langle\boldsymbol{p}_i\rangle}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\big\langle[\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{H}]\big\rangle = 0 \qquad (i = x, y)$$

# 4. Résumé

Soit une symétrie $\mathcal{S}$, qu'elle soit universelle ou propre. On peut effectuer la transformation associée $T_{\mathcal{S}}$ sur le système $|\Psi\rangle$ et l'observable $\boldsymbol{A}$ de deux manières strictement équivalentes :

- Du **point de vue actif**, la transformation agit sur le vecteur d'état :

$$\boxed{|\Psi'\rangle = \boldsymbol{T}_{\mathcal{S}}|\Psi\rangle \quad \text{et} \quad \boldsymbol{A} \text{ inchangé}} \tag{9}$$

  tel que les probabilités soient inchangées :

$$\boxed{\big|\langle\Psi'|\Phi'\rangle\big| = \big|\langle\Psi|\Phi\rangle\big| \qquad (\forall\Psi,\Phi)} \tag{10}$$

  ce qui impose l'*unitarité* ou l'*anti-unitarité* de $\boldsymbol{T}_{\mathcal{S}}$ par le théorème de Wigner. On construit souvent $\boldsymbol{T}_{\mathcal{S}}$ à partir de relations entre $\langle\boldsymbol{A}\rangle' \stackrel{\text{def}}{=} \langle\Psi'|\boldsymbol{A}|\Psi'\rangle$ et $\langle\boldsymbol{A}\rangle = \langle\Psi|\boldsymbol{A}|\Psi\rangle$.

- Du **point de vue passif**, la transformation agit sur les observables :

$$\boxed{|\Psi\rangle \text{ inchangé} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{T}_{\mathcal{S}}^{-1}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{T}_{\mathcal{S}}} \tag{11}$$

Pour une transformation unitaire, on peut démontrer[2] ce résulat en toute généralité si on impose l'équivalence entre les deux points de vue : $\forall|\Psi\rangle$,

$$\boxed{\langle \boldsymbol{A}'\rangle = \langle \boldsymbol{A}\rangle'} \quad \Longleftrightarrow \quad \langle\Psi'|\boldsymbol{A}|\Psi'\rangle = \langle\Psi|\boldsymbol{A}'|\Psi\rangle$$

$$\text{[ unitarité ]} \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{\langle\Psi|\boldsymbol{T}_{\mathcal{S}}^{\dagger}}_{\text{actif}}\boldsymbol{A}\underbrace{\boldsymbol{T}_{\mathcal{S}}|\Psi\rangle}_{\text{actif}} = \langle\Psi|\underbrace{\boldsymbol{T}_{\mathcal{S}}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_{\mathcal{S}}}_{\text{passif}}|\Psi\rangle = \langle\Psi|\boldsymbol{A}'|\Psi\rangle$$

- On ne peut s'empêcher d'établir un lien entre les points de vue de transformation et les points de vue de Schrödinger et Heisenberg en dynamique. Le lien paraît plus évident si l'on considère que l'hamiltonien est le générateur des *translations dans le temps*. Le point de vue de Heisenberg est l'équivalent du point de vue passif pour ces transformations temporelles.

- Une **symétrie propre** est une symétrie $\mathcal{S}$, se reposant sur une symétrie universelle, telle que

$$\boxed{\boldsymbol{H}' = \boldsymbol{T}_{\mathcal{S}}^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{T}_{\mathcal{S}} = \boldsymbol{H} \quad \Longleftrightarrow \quad \big[\boldsymbol{H}, \boldsymbol{T}_{\mathcal{S}}\big] = 0 \quad \text{(symétrie propre)}}$$

et ce éventuellement pour toute valeurs du paramètre caractérisant la transformation $\boldsymbol{T}_{\mathcal{S}}$. Résumé :

*Le hamiltonien commute avec les opérateurs de symétrie propre.*

→ Il est équivalent de transformer l'état évolué, ou d'évoluer la fonction d'onde transformée.

Pour une transformation unitaire, on a alors l'équation de conservation $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \boldsymbol{T}_{\mathcal{S}}\rangle = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\langle[\boldsymbol{H}, \boldsymbol{T}_{\mathcal{S}}]\rangle = 0$, et la même chose avec le générateur de la transformation, lorsqu'il existe[3]. Résumé :

*À chaque groupe de transformations laissant le hamiltonien invariant, il* ***peut***[4] *correspondre une loi de conservation.*

2. Rappel : poser $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}'$, puis $\forall|\Psi\rangle$, $\langle\Psi|\boldsymbol{B}|\Psi\rangle = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$ lorsque $\boldsymbol{B}$ est hermitien, car on peut le *diagonaliser* :

$$\boldsymbol{B} = \sum_b |b\rangle\underbrace{\langle b|\boldsymbol{B}|b\rangle}_{=0}\langle b| = \boldsymbol{0} \quad \text{où } \{|b\rangle\}_b \text{ est une base d'états propres}$$

3. Par exemple, l'opération de parité $\boldsymbol{\Pi}$ n'a pas de générateur, mais dans un système à symétrie de partité, on a conservation de la parité : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\boldsymbol{\Pi}\rangle = 0$. Un état initialement pair restera pair.

4. Ce n'est pas le cas du renversement du temps.