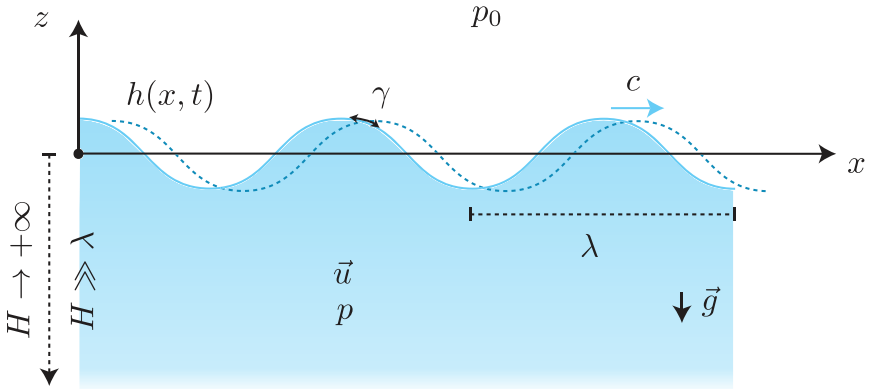
Ondes de surface

Ondes linéaires gravito-capillaires en fluide parfait profond

Ondes à la surface d'un fluide de viscosité négligeable (on utilise le modèle de **fluide parfait**) et de profondeur bien plus grande que la longueur d'onde ($H \gg \lambda$, qui n'interviendra pas), en contact avec un fluide (« l'air ») de densité et de viscosité négligeables ($\sim$ vide) de pression p_0.

L'onde est supposée y-invariante, et $\{z=0\}$ est la surface au repos. On note $h(x,t)$ la hauteur de la surface libre, qu'on suppose petite : $h \ll \lambda$. On pourra alors se placer en **régime linéaire**.



On s'intéresse aux modes d'ondes progressives, de vecteur d'onde $k = {}^{2\pi}/_{\lambda}$ et de pulsation ω, se déplaçant vers les $x > 0$. On cherche donc une solution ayant une surface libre de hauteur

$$h(x,t) = h_0 \cos(k\,x - \omega\,t) \tag{1}$$

1. Équations linéarisées et solution ondulatoire

Équation d'Euler pour le champ des vitesses $\vec{u}(x,z,t)$:

$$\rho\left(\partial_t \vec{u} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{u}\right) = -\vec{\nabla}p + \rho\,\vec{g}$$

État de base hydrostatique ($\vec{g} = -g\,\vec{e_z}$) :

$$h = 0, \quad \vec{u}_{\mathsf{b}} = \vec{0}, \quad p_{\mathsf{b}} = p_0 - \rho\,g\,z$$

Linéarisation autour d'une petite perturbation $\vec{u} = \vec{u}_{\mathsf{b}} + \delta\vec{u} = \delta\vec{u},\ p = p_{\mathsf{b}} + \delta p$:

$$\rho\left(\partial_t\,\delta\vec{u} + \underbrace{(\delta\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\,\delta\vec{u}}_{\text{ordre 2}}\right) = \underbrace{-\vec{\nabla}p_{\mathsf{b}} + \rho\,\vec{g}}_{=0} - \vec{\nabla}\delta p \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\rho\,\partial_t\,\delta\vec{u} \simeq -\vec{\nabla}\delta p} \tag{2}$$

On suppose l'écoulement irrotationnel (on vérifie qu'il le reste bien si il l'est initialement : $\rho\,\partial_t\,(\vec{\nabla}\times\vec{u}) = \vec{\nabla}\times\rho\,\partial_t\,\vec{u} = -\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\delta p = \vec{0}$ donc $\vec{\nabla}\times\vec{u} = \mathrm{cste}_{/t} = \vec{0}$). On peut donc définir son potentiel

$$\vec{u} = \vec{\nabla}\Phi \quad \text{vérifiant} \quad \boxed{\nabla^2\,\Phi = 0} \tag{3}$$

par incompressibilité.

1.1. Condition limite cinématique à la surface

La surface libre est l'iso-surface $S_{\text{libre}} = \{f = 0\}$ du champ

$$f(x,z,t) = -z + h(x,t)$$

La condition cinématique, $0 = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \partial_t f + \vec{u}|_{S_{\text{libre}}} \cdot \vec{\nabla} f$ (qui exprime que S_{libre} est une surface matérielle), s'écrit ici

$$\partial_t h + u_x \cdot \partial_x h = u_z \quad \text{en } z = h(x,t) \quad \forall x, t$$

Cette équation est non linéaire. Mais $u_x = \delta u_x$ et $\partial_x h = -k\, h_0 \sin(\ldots)$ sont tous deux de l'ordre de la petite amplitude h_0 (on le vérifiera a posteriori pour u_x (11), mais on s'en doute déjà), donc le terme $u_x \cdot \partial_x h$ est en $\mathcal{O}(h_0^2)$, donc négligeable face aux termes $\partial_t h = \omega\, h_0 \sin(\ldots)$ et u_z, qui sont en $\mathcal{O}(h_0)$. La condition cinématique linéarisée est donc

$$\boxed{\partial_t h \,=\, u_z|_{z=h}} \tag{4}$$

En terme de potentiel, on a donc la condition de Neumann

$$\boxed{\partial_z \Phi(x, z = h(x,t), t) \,=\, \partial_t h \,=\, \omega\, h_0 \sin(k\, x - \omega\, t) \quad \forall x, t} \tag{5}$$

En "intégrant selon z", cela nous indique au passage (mais ce n'est pas une preuve) que l'on peut chercher un potentiel de la forme

$$\Phi(x, z, t) = \phi(z) \sin(k\, x - \omega\, t) \tag{6}$$

1.2. Intégration du problème de Laplace

On a alors

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; \nabla^2 \Phi \,=\, \partial^2_{xx} \Phi + \partial^2_{zz} \Phi \\ &=\; \phi(z)\,(-k^2) \sin(k\, x - \omega\, t) + (\partial^2 \phi(z)) \sin(k\, x - \omega\, t) \\ &=\; (-k^2\, \phi + \partial^2 \phi) \sin(k\, x - \omega\, t) \quad \forall t \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{(-k^2 + \partial^2)\, \phi \,=\, 0}$$

qui a pour solutions

$$\phi(z) = A\, \mathrm{e}^{+kz} + B\, \mathrm{e}^{-kz} \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Puisque $\vec{\nabla}\Phi = \vec{u} \xrightarrow[z \to -\infty]{} \vec{0}$, le potentiel Φ tend vers une constante quand $z \to -\infty$, et donc $B = 0$. Ainsi,

$$\boxed{\Phi(x, z, t) = A\, \mathrm{e}^{kz} \sin(k\, x - \omega\, t)} \tag{7}$$

La condition de Neumann (5) associée à la condition de Dirichlet $\Phi(z = -\infty) = 0$ nous assure en fait que (7) est l'*unique solution* au problème de Laplace. Cette forme « oscillant dans une direction x, évanescant dans l'autre z » est une propriété générale des problèmes de Laplace à condition limite oscillante. Bref, l'ansatz (6) était judicieux, et on aurait pu s'en passer.

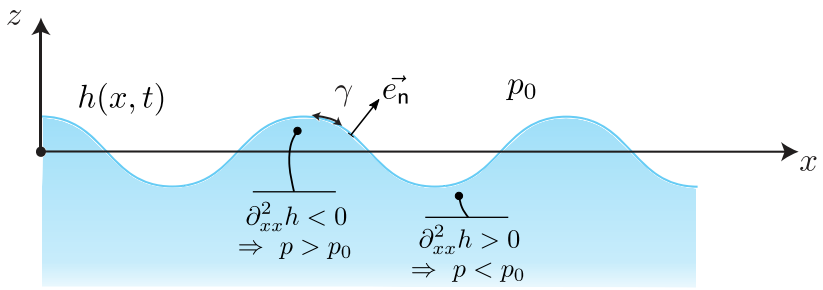
Reste à déterminer A, et c'est la physique qui va nous le dire.

1.3. Condition limite dynamique à la surface

On prend en compte la tension de surface γ de la surface libre. On verra qu'elle n'a un effet qu'aux petites longueur d'ondes. La condition limite dynamique, $\vec{\vec{\sigma}} \cdot \vec{e_{\mathsf{n}}}|_{S_{\text{libre}}} = -\big(p_0 + \gamma \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{e_{\mathsf{n}}})}_{\text{courbure}}\big)\, \vec{e_{\mathsf{n}}}$, est ici (projection sur $\vec{e_{\mathsf{n}}}$, fluide parfait $\vec{\vec{\sigma}} = -p\, \vec{\vec{1}}$) la loi de Young-Laplace :

$$p|_{S_{\text{libre}}} \,=\, p_0 - \gamma\, \vec{\nabla} \cdot \vec{e_{\mathsf{n}}}$$

La normale est $\vec{e_{\mathsf{n}}} = \pm \frac{\vec{\nabla} f}{\|\vec{\nabla} f\|} = \pm \frac{-\vec{e_z} + \vec{e_x}\, \partial_x h}{\sqrt{1 + (\partial_x h)^2}}$.



On choisit alors le signe $-$ pour avoir une normale vers l'extérieur du fluide. La courbure est alors

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{e_{\mathsf{n}}} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{-\partial_x h}{\sqrt{1+(\partial_x h)^2}} = \frac{-\partial_{xx}^2 h}{(1+(\partial_x h)^2)^{3/2}} \simeq -\partial_{xx}^2 h$$

L'approximation linéaire est justifiée car $\partial_x h$ est de l'ordre de $\frac{h_0}{\text{long. caract.}} = \frac{h_0}{\lambda} \ll 1$. Finalement, notre condition limite dynamique est

$$p|_{z=h} = p_0 - \gamma\,\partial_{xx}^2 h$$

On vérifiera que la pression est bien $< p_0$ là où la surface est convexe et $> p_0$ là où la surface est concave. Pour notre onde, on a

$$\boxed{p|_{z=h} = p_0 + \gamma\, h_0\, k^2 \cos(k\,x - \omega\,t) \quad \forall x,t} \tag{8}$$

1.4. Équation d'Euler et obtention de la relation de dispersion

Pour utiliser la condition précédente sur la pression à la surface, il nous faut faire le lien entre le champ de vitesse et le champ de pression. Pour cela, on utilise la relation de Bernouilli pour un écoulement potentiel :

$$\rho\,\partial_t\,\Phi + \tfrac{1}{2}\,\rho\,\|\vec{\nabla}\Phi\|^2 + p + \rho\,g\,z = C(t) \quad \forall x,z$$

Le terme cinétique $\|\vec{\nabla}\Phi\|^2 = \|\vec{u}\|^2$ est en $\mathcal{O}(h_0^2)$ (en surface, et reste petit ailleurs car $\vec{u} \longrightarrow \vec{0}$ en $z \to -\infty$), donc négligeable face aux termes qui sont en $\mathcal{O}(h_0)$. On a donc une relation de Bernouilli linéarisée :

$$\boxed{\rho\,\partial_t\,\Phi + p + \rho\,g\,z = C(t) \quad \forall x,z}$$

où C est une constante globale au fluide que l'on déterminera (on peut voir que, puisque l'on a affaire à des perturbations à la solution de base, la seule chose qui tient la route, c'est de prendre $C(t) = p_0$).

La façon propre d'obtenir cette relation est de la redémontrer à partir de (2) directement :

$$\begin{aligned}
&\rho\,\partial_t\,\vec{u} = -\vec{\nabla}\delta p = -\vec{\nabla}(p - p_{\mathsf{b}}) = -\vec{\nabla}(p - p_0 + \rho\,g\,z)\\
\iff\ &\rho\,\partial_t\,\vec{\nabla}\Phi = -\vec{\nabla}(p + \rho\,g\,z)\\
\iff\ &\vec{\nabla}(\partial_t\Phi + p + \rho\,g\,z) = 0\\
\iff\ &\partial_t\Phi + p + \rho\,g\,z = C(t) \quad \forall x,z
\end{aligned}$$

Maintenant, si l'on injecte la solution (7) $\partial_t\,\Phi = -A\,\omega\,\mathrm{e}^{kz}\cos(k\,x - \omega\,t)$ et la condition dynamique (8) dans la loi de Bernouilli en $z = h = h_0\cos(k\,x - \omega\,t)$,

$$-\rho\,\omega\,A\,\mathrm{e}^{kh(x,t)}\cos(k\,x - \omega\,t) + \big(p_0 + \gamma\,h_0\,k^2\cos(k\,x - \omega\,t)\big) + \rho\,g\,h_0\cos(k\,x - \omega\,t) = C(t) \qquad \forall x,t$$

qui a pour solution (identification termes constants et oscillants (que des $\cos$ identiques !) si l'on veut)

$$C(t) = p_0 \quad \text{et} \quad -\rho\,\omega\,A\,\mathrm{e}^{kh(x,t)} + \gamma\,h_0\,k^2 + \rho\,g\,h_0 = 0 \tag{9}$$

Le e^{kh} peut faire peur, mais il disparaitra tout seul. [On a $\mathrm{e}^{kh(x,t)} = \mathrm{e}^{kh_0\cos(kx-\omega t)} = 1 + \mathcal{O}(k\,h_0)$, et comme $h_0 \ll \lambda$, on peut linéariser en $\rho\,\omega\,A = \gamma\,h_0\,k^2 + \rho\,g\,h_0$. Mais ce n'est pas strictement nécessaire, car on se retrouve encore avec un $A\,\mathrm{e}^{kh}$ à l'étape d'après.]

Étant donné h_0 et ω, il reste encore une inconnue. Pour l'éliminer, on ré-utilise la condition cinématique (4) faisant le lien entre h et Φ à la surface :

$$\partial_z\,\Phi(z=h) \;=\; \partial_t\,h \quad\Longleftrightarrow\quad A\,k\,\mathrm{e}^{kh(x,t)}\sin(k\,x-\omega\,t) \;=\; \omega\,h_0\sin(k\,x-\omega\,t) \quad \forall x,t$$

donc (cette fois, élimination des $\sin$ identiques, avec grande satisfaction)

$$k\,A\,\mathrm{e}^{kh(x,t)} = \omega\,h_0 \tag{10}$$

En combinant (9) et (10) et en éliminant –presque avec jouissance– le e^{kh}, on obtient

$$-\rho\,\omega\,\frac{\omega\,h_0}{k} + \gamma\,h_0\,k^2 + \rho\,g\,h_0 = 0$$

Le h_0 se simplifie à son tour (et c'est normal, notre système est linéaire, *les amplitudes doivent rester arbitraires* tant qu'elles restent petites !), et on en déduit la **relation de dispersion**

$$-\rho\,\omega^2 + \gamma\,k^3 + \rho\,g\,k = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \boxed{\omega^2 = g\,k + \frac{\gamma}{\rho}\,k^3}$$

À noter que si l'on avait pas pris en compte la tension de surface γ, le terme correspondant $\gamma\,k^3$ ne serait simplement plus là, et on aurait la relation de dispersion des ondes gravitaires, $\omega^2 = g\,k$.

2. Champ de vitesse

À partir du potentiel (7) $\Phi(x,z,t) = A\,\mathrm{e}^{kz}\sin(k\,x-\omega\,t)$, on peut déterminer le champ de vitesse $\vec{u} = \vec{\nabla}\Phi$. Mais il faut déterminer la constante A. Cette fois-ci, on a pas le choix, il faut linéariser (10) :

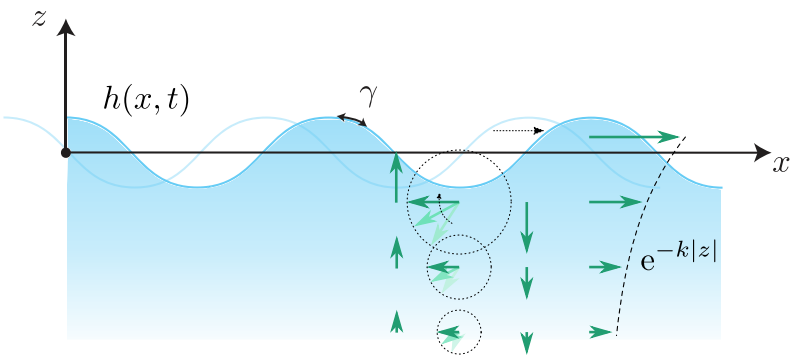
$$A \;=\; \tfrac{\omega\,h_0}{k} + \mathcal{O}(h_0^2)$$

On obtient alors

$$\boxed{\vec{u}(x,z,t) = \omega\,h_0\,\mathrm{e}^{kz}\left[\begin{array}{c}\cos(k\,x-\omega\,t)\\ \sin(k\,x-\omega\,t)\end{array}\right]_{\vec{e}_x,\vec{e}_z} + \mathcal{O}(h_0^2)} \tag{11}$$

On voit que la vitesse horizontale $u_x \propto \cos(k\,x-\omega\,t)$ est *en phase* avec la hauteur $h(x,t)$ de la surface, alors que la vitesse verticale u_z est en *quadrature de phase*.

En un point donné, la vitesse du fluide décrit, sur une période $2\pi/\omega$, un cercle de rayon $R(z) = \omega\,h_0\,\mathrm{e}^{kz}$ dans le sens horaire[1], décroissant exponentiellement avec la profondeur. On a bien $\vec{u} \longrightarrow \vec{0}$ quand $z \to -\infty$.



1. Dans le plan complexe $(\vec{e_x},\vec{e_z}) \to (1,\mathrm{i})$, le vecteur vitesse en un point fixe s'écrit $\cos(-\omega\,t) + \mathrm{i}\sin(-\omega\,t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ à une phase près, et tourne donc dans le sens anti-trigonométrique.

3. Analyse de la relation de dispersion

$$\omega(k) = \sqrt{g\,k + \frac{\gamma}{\rho}k^3}$$

Vitesse de phase (vitesse d'une crête d'un mode) :

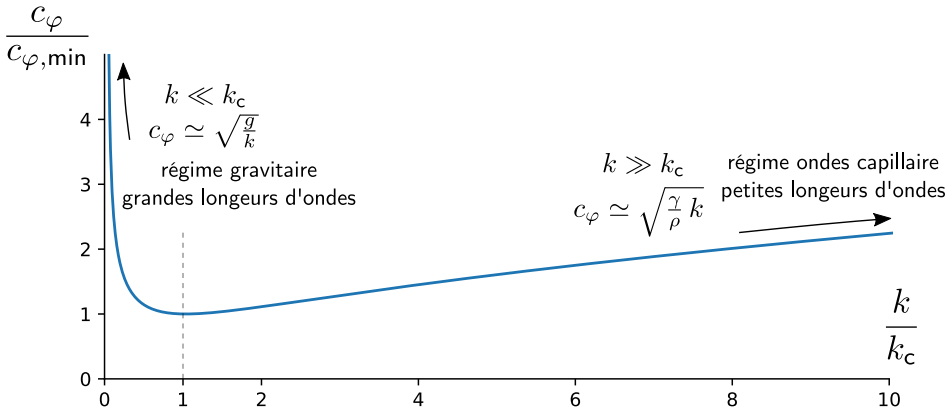
$$\boxed{c_\varphi = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{\gamma}{\rho}k}}$$

Minimum de la vitesse de phase : $0 = \frac{\mathrm{d}c_\varphi}{\mathrm{d}k} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\sqrt{\frac{g}{k} + \frac{\gamma}{\rho}k} \;\Leftrightarrow\; 0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left(\frac{g}{k} + \frac{\gamma}{\rho}k\right) = -\frac{g}{k^2} + \frac{\gamma}{\rho}$ donc[2]

$$c_\varphi \text{ minimale en } k_\mathsf{c} = \sqrt{\frac{\rho\,g}{\gamma}} \text{ et vaut } c_{\varphi,\mathsf{min}} = c_\varphi(k_\mathsf{c}) = \left(\frac{4\,g\,\gamma}{\rho}\right)^{1/4}$$

On remarque que $k_\mathsf{c}^{-1} = \ell_\mathsf{c}$, la longueur capillaire. La vitesse de phase se ré-écrit sous une forme permettant de différentier les régimes $k \ll k_\mathsf{c}$ (gravitaire) et $k \gg k_\mathsf{c}$ (capillaire) :

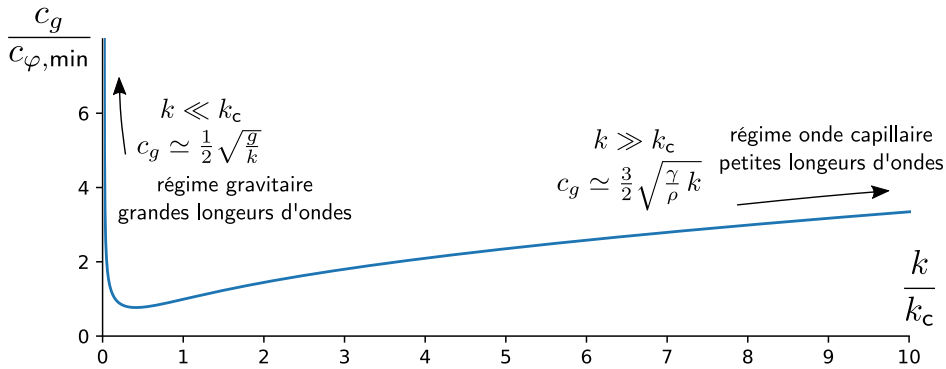
$$c_\varphi = \frac{c_{\varphi,\mathsf{min}}}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{k_\mathsf{c}}{k} + \frac{k}{k_\mathsf{c}}}$$



Pour l'eau, k_c correspond à $\lambda_\mathsf{c} = 2\,\mathrm{cm}$, pour laquelle la vitesse de phase est $c_{\varphi,\mathsf{min}} = 0.2\,\mathrm{m/s}$.

Vitesse de groupe (vitesse de propagation d'un paquet d'onde, de propagation d'information/d'énergie) :

$$c_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\sqrt{g\,k + \frac{\gamma}{\rho}k^3} = \frac{g + 3\frac{\gamma}{\rho}k^2}{2\sqrt{g\,k + \frac{\gamma}{\rho}k^3}} = \frac{1}{2}\frac{\frac{g}{k} + 3\frac{\gamma}{\rho}k}{\sqrt{\frac{g}{k} + \frac{\gamma}{\rho}k}} = \frac{c_{\varphi,\mathsf{min}}}{2\sqrt{2}}\frac{\frac{k_\mathsf{c}}{k} + 3\frac{k}{k_\mathsf{c}}}{\sqrt{\frac{k_\mathsf{c}}{k} + \frac{k}{k_\mathsf{c}}}}$$



2. $[k_\mathsf{c}] = \sqrt{\frac{[\rho][g]}{[\gamma]}} = \sqrt{\frac{\mathrm{kg\cdot m^{-3}\cdot m\cdot s^{-2}}}{\mathrm{J/m^2}}} = \sqrt{\frac{\mathrm{kg\cdot s^{-2}}}{\mathrm{kg\cdot m^2\cdot s^{-2}}}} = \mathrm{m^{-1}}$, $[c_{\varphi,\mathsf{min}}] = \left(\frac{[g]\,[\gamma]}{[\rho]}\right)^{1/4} = \left(\frac{\mathrm{m\cdot s^{-2}\cdot J/m^2}}{\mathrm{kg\cdot m^{-3}}}\right)^{1/4} = \mathrm{m/s}$.

En régime gravitaire, $c_g = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2}c_\varphi$. La vitesse de groupe diffère de la vitesse de phase ($\Leftrightarrow$ c_φ dépend de k) donc la propagation est **dispersive**. *Les grandes longueur d'onde se propagent plus vite*. Cela explique la **houle**, vagues de grande longeur d'onde qui atteignent les côtes avant la tempête.

En régime capillaire, $c_g = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{\gamma}{\rho}k} = \frac{3}{2}c_\varphi$, la progagation est donc aussi dispersive, et *les petites longueur d'onde se propagent plus vite* (sans formation de front).

Simulation de paquet d'onde : https://users.physics.ox.ac.uk/~palmerc/Wavesfiles/dispersive_wavepacket.htm

En régime intermédiaire, pour k_c, on a $c_g(k_\mathsf{c}) = c_{\varphi,\mathsf{min}} = c_\varphi(k_\mathsf{c})$. La gravité et la tension de surface sont également importantes, et un paquet d'onde spectralement étroit autour de k_c ne se déforme pas beaucoup.

Figure. Excitations spectralement larges d'une surface d'eau. Sur les photos 1 et 3, on observe clairement les ondes capillaires (sub-centimétriques) se propageant plus vite aux petites longueurs d'ondes, devançant les autres. Sur la photo 2 (et la photo 3 un peu aussi), on voit les que les ondes gravitaires (supra-centimétriques) de grande longueur d'onde se propagent plus vite. Il est difficile d'observer les deux à la fois car les ondes capillaires s'atténuent vite. Sur la vidéo *Water ripples on Longlake Alberta*, on voit que les composantes de longueur d'onde intermédiaire $\sim\lambda_\mathsf{c} = 2\,\mathrm{cm}$ sont celles qui restent à la fin, donc les plus lentes.

La divergence (non physique) de la vitesse de groupe en $k \to 0$ est la conséquence de l'hypothèse que le fluide est *profond* ($H \gg \lambda \Leftrightarrow H\,k \gg 1$), qui n'est plus valide aux grandes longueur d'ondes. En réalité, lorsqu'on prend en compte la profondeur, la relation de dispersion des ondes gravitaires ($k \ll k_\mathsf{c}$) est

$$\omega(k) = \sqrt{g\,k\tanh(k\,H)}$$

se réduisant à $\omega(k) = \sqrt{g\,k}$ pour $H\,k \gg 1$ (*deep water limit*), et à $\omega(k) = k\,\sqrt{g\,H}$ pour $H\,k \ll 1$ (limite de fluide peu profond, *shallow water limit*). Dans la limite de fluide peu profond, la vitesse de phase et la vitesse de groupe tendent toutes deux vers $c_g = c_\varphi = \sqrt{g\,H}$ (fini), et la propagation n'est alors *plus dispersive*.

4. Trajectoires de particules