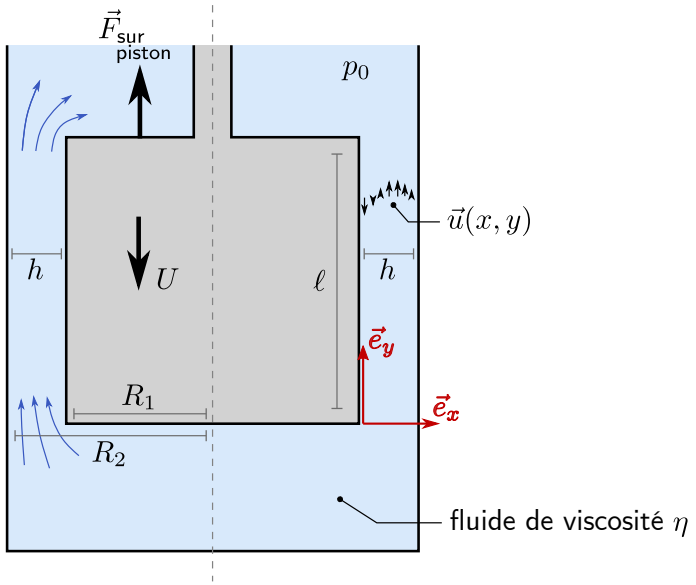
Amortisseur hydraulique à effet visqueux

En régime laminaire, à petit rapport d'aspect

Un amortisseur hydraulique est un piston cylindrique de rayon R_1, déplaçant un fluide incompressible de viscosité dynamique η dans un conteneur cylindrique de rayon R_2.



Le but est de calculer la force exercée sur le piston $\vec{F}_{\text{sur piston}}$, en régime stationnaire, que l'on s'attend à être suivant la verticale $\vec{e_y}$. Rappel : en fluide parfait, cette force serait nulle. On ne regarde pas l'effet de la pesanteur : $\vec{f}_{\text{ext}} = \vec{0}$.

On suppose que l'entrefer $h = R_2 - R_1$ est petit devant le rayon de courbure du piston, c'est-à-dire $h \ll R_1$, afin que l'écoulement du fluide visqueux puisse être approximé comme un écoulement localement plan.

On se place donc dans un plan $\{x, y\}$ orthogonal au piston, dans lequel l'écoulement, supposé laminaire, s'écrit sous la forme

$$\vec{u} = u(x,y)\,\vec{e_y} \tag{1}$$

Incompressibilité :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \partial_x \cancel{u_x} + \partial_y u_y = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{u} = u(x)\,\vec{e_y}} \tag{2}$$

Équation de Navier-Stokes suivant $\vec{e_x}$:

$$\rho\frac{\partial \cancel{u_x}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\,\cancel{u_x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta\,\nabla^2 \cancel{u_x} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{p = p(y)}$$

Équation de Navier-Stokes suivant $\vec{e_y}$:

$$\rho\frac{\partial \cancel{u_y}}{\partial t} + \underbrace{(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})}_{=u\partial_y} u_y = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta\,\nabla^2 u_y \quad \Longrightarrow \quad \partial_y p = -u\,\partial_{\cancel{y}} u + \eta\,\partial_x^2 u + \eta\,\partial^2_{\cancel{y}} u \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\partial_y p = \eta\,\partial_x^2 u}$$

qui s'intègre en

$$u(x) = \frac{\partial_y p}{2\,\eta}\,x^2 + A\,x + B$$

Conditions aux limites :

- Non-glissement sur le piston en mouvement : $\vec{u}(x=0) = -U\,\vec{e_y} \quad \Rightarrow \quad B = -U$
- Non-glissement sur le conteneur : $\vec{u}(x=h) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{U}{h} - \frac{\partial_y p}{2\,\eta}\,h$

On obtient alors une superposition[1] de deux types d'écoulement bien connus :

$$\boxed{u(x) = \underbrace{x\,(x-h)\,\frac{\partial_y p}{2\,\eta}}_{\text{écoulement de Poiseuille}} + \underbrace{U\left(\frac{x}{h}-1\right)}_{\text{écoulement de Couette}}} \tag{3}$$

écoulement de Poiseuille : généré par le gradient de pression en y

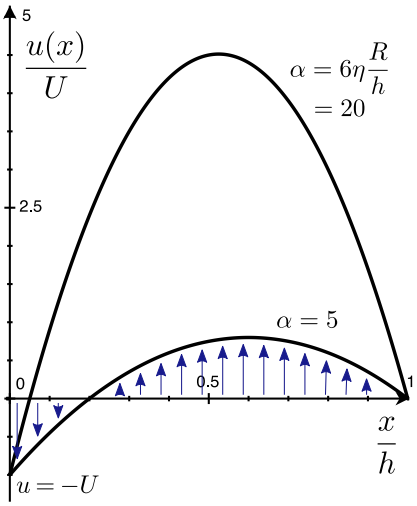
écoulement de Couette : cisaillement dû au mouvement relatif des deux surfaces

On cherche à déterminer le gradient de pression à partir des données du problème. Le cylindre déplace le fluide en bougeant, à un débit volumique

$$Q_{\text{déplacé}} = U \cdot S_{\text{face piston}} = U\,\pi\,R_1^2 \tag{4}$$

Or le débit sur une tranche horizontale vaut, dans l'approximation de courbure négligeable devant l'entrefer,

$$\begin{aligned} Q_{\text{tranche}} &= \iint_{\text{tranche}} \vec{u}\cdot \mathrm{d}^2\mathcal{S} \simeq 2\pi\,R_1 \int_0^h \mathrm{d}x\,u(x) \\ &= 2\pi\,R_1 \int_0^h \mathrm{d}x \left(\frac{\partial_y p}{2\,\eta}\,x^2 + \left(\frac{U}{h} - \frac{\partial_y p}{2\,\eta}\,h\right)x - U\right) \\ &= 2\pi\,R_1 \left(\frac{\partial_y p}{2\,\eta}\,\frac{h^3}{3} + \left(\frac{U}{h} - \frac{\partial_y p}{2\,\eta}\,h\right)\frac{h^2}{2} - U\,h\right) \\ &= 2\pi\,R_1 \left(\frac{\partial_y p}{2\,\eta}\,\frac{h^3}{6} - \frac{U\,h}{2}\right) \end{aligned}$$



Profil de vitesse avec (5) :

$$\frac{u(x=h\,\xi)}{U} = \alpha\,\xi\,(1-\xi) + \xi - 1$$

Par conservation du débit (fluide incompressible), on doit avoir

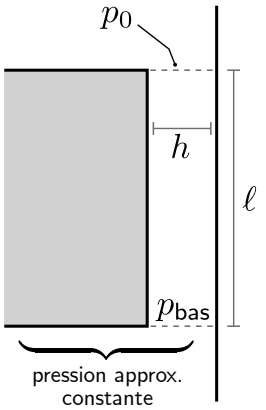
$$Q_{\text{déplacé}} = -Q_{\text{tranche}} \iff U\,R_1 = -\frac{\partial_y p}{2\,\eta}\,\frac{h^3}{3} + U\,h \iff \partial_y p = -6\,\eta\,U\,\frac{R_1 - h}{h^3}$$

et dans l'approximation $h \ll R_1$,

$$\boxed{\partial_y p = -6\,\eta\,U\,\frac{R_1}{h^3}} \tag{5}$$

La force exercée par le fluide sur le piston s'écrit

$$\vec{F}_{\text{sur piston}} = \iint_{\text{piston}} -\vec{\bar{\sigma}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}^2\mathcal{S}} = \iint_{\text{piston}} \overrightarrow{\mathrm{d}^2\mathcal{S}}\cdot\left(p - 2\,\eta\,\vec{\bar{\varepsilon}}\right) = \vec{F}_p + \vec{F}_{\text{v}} \tag{6}$$

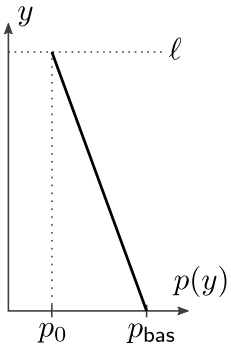


Calculons dans un premier temps la force de pression, qui est dominante ici. Il nous faut pour cela déterminer la pression. On note p_0 la pression en haut du cylindre, et on suppose que $p(y=\ell) \simeq p_0$. On a alors

$$p(y) = p_0 + (y-\ell)\,\partial_y p$$

et en particulier en $y = 0$,

$$\boxed{p_{\text{bas}} = p_0 + 6\,\eta\,U\,\frac{R_1}{h^3}\,\ell} \tag{7}$$



1. Le problème étant ici linéaire.

Alors

$$\vec{F}_p = \iint_{\text{haut}} \overrightarrow{\mathrm{d}^2\mathcal{S}} \cdot p + \iint_{\text{bas}} \overrightarrow{\mathrm{d}^2\mathcal{S}} \cdot p + \underbrace{\iint_{\text{côtés}} \overrightarrow{\mathrm{d}^2\mathcal{S}} \cdot p}_{=0 \text{ par symétrie cylindrique}} \simeq S_{\text{face piston}} \cdot \underbrace{(-\vec{e_y} p_0 + \vec{e_y} p_{\text{bas}})}_{\text{⚠ } \mathcal{S}=\mathcal{S}_{\text{fluide}\to\text{piston}}} = \pi R_1^2 \cdot 6\,\eta U \frac{R_1}{h^3} \ell\, \vec{e_y}$$

donc

$$\boxed{\vec{F}_p = 6\,\pi\,\eta U \ell \left(\frac{R_1}{h}\right)^3 \vec{e_y}} \tag{8}$$

où $h/R_1 \simeq h/R_2$ est le *rapport d'aspect* du piston. On a une force de friction linéaire en la vitesse, qui est valable tant que la vitesse n'est pas trop élevée, c'est-à-dire tant que la vitesse reste sous une forme simple (1) d'un écoulement laminaire. Au delà d'une certaine vitesse, l'écoulement peut devenir instationnaire et les termes non-linéaires peuvent devenir non nuls.

Pour compléter, calculons la force visqueuse sur le piston. Si on suppose que la vitesse du fluide est négligeable sur les faces du piston, on a dans une base cylindrique $\{\vec{e_r} = \vec{e_x}, \vec{e_\theta}, \vec{e_y}\}$

$$\vec{F}_{\text{v}} \simeq -\eta \iint_{\text{côtés}} \overrightarrow{\mathrm{d}^2\mathcal{S}} \cdot 2\,\vec{\vec{\varepsilon}} = -\eta \iint_{\text{côtés}} \mathrm{d}y\, R_1\, \mathrm{d}\theta \underbrace{(-\vec{e_r})}_{\text{⚠ } \mathcal{S}=\mathcal{S}_{\text{fluide}\to\text{piston}}} \cdot 2\,\vec{\vec{\varepsilon}}(R_1, y) \quad \text{avec} \quad 2\,\vec{\vec{\varepsilon}} = \overrightarrow{\overrightarrow{\nabla} u} + \overrightarrow{\overrightarrow{\nabla} u}^{\top}$$

Puisque $\varepsilon_{r\theta} = 0$ car $u_\theta = 0$ et $\partial_\theta \vec{u} = 0$, et que $\varepsilon_{rr} = 0$ car $u_r = u_x = 0$, on a[2]

$$\vec{F}_{\text{v}} = \eta \iint_{\text{côtés}} \mathrm{d}y\, R_1\, \mathrm{d}\theta\, 2\,\varepsilon_{ry}(R_1, y)\, \vec{e_y} = \eta \cdot \underbrace{2\pi R_1}_{\text{circonf. latérale}} \cdot \int_0^\ell \mathrm{d}y\, 2\,\varepsilon_{ry}(R_1, y)\, \vec{e_y}$$

par θ-invariance de ε_{ry}. Dans l'approximation de courbure négligeable devant l'entrefer (c'est-à-dire qu'on se place dans le repère local carthésien $\{\vec{e_x}, \vec{e_y}\}$ pour le calcul de la contrainte visqueuse), on a

$$\varepsilon_{ry}(R_1, y) \simeq \varepsilon_{xy}(x = 0, y)$$

Or

$$2\,\varepsilon_{xy}(x=0,y) = \partial_x u_y + \partial_y \cancel{u_x} = \frac{\partial_y p}{\eta} x + A\Big|_{x=0} = A = \frac{U}{h} - \frac{\partial_y p}{2\,\eta} h \overset{(5)}{=} \frac{U}{h} + \frac{3\,U R_1}{h^2}$$

donc

$$\vec{F}_{\text{v}} = \eta \cdot 2\pi R_1 \ell \cdot \frac{U}{h} \left(1 + \frac{3R_1}{h}\right) \vec{e_y}$$

Au final,

$$\boxed{\vec{F}_{\text{sur piston}} = 6\,\pi\,\eta U \ell \left(\left(\frac{R_1}{h}\right)^3 + \left(\frac{R_1}{h}\right)^2 + \frac{R_1}{3\,h}\right) \vec{e_y}}$$

On voit que les deux derniers termes, qui correspondent à la contrainte visqueuse (qui sont aussi dans le sens attendu $+\vec{e_y}$) dépendent du rapport d'aspect à la puissance 1 et 2. Comme annoncé, ils sont négligeables dans le cas d'un entrefer petit. La résistance est ainsi dûe principalement au *différentiel de pression* induit par l'écoulement visqueux dans l'entrefer, et augmente lorsque l'entrefer diminue.

Dans le cas où le rapport d'aspect n'est plus petit ($h \not\ll R_1$), les deux contribution sont du même ordre de grandeur, comme le montre l'analyse de l'écoulement visqeux autour d'une sphère ($^1/_3$ pression, $^2/_3$ contrainte visqueuse), car le petit entrefer ne joue plus le rôle de goulot d'étranglement.

2. Pour se convaincre de ces manipulations, on a dans le repère carthésien local $\{\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_\theta}\}$

$$2\,\vec{\vec{\varepsilon}} \overset{\text{mat}}{=} \begin{bmatrix} 2\,\partial_x \cancel{u_x} & \partial_x u_y + \partial_y \cancel{u_x} & \partial_x \cancel{u_\theta} + \partial_\theta \cancel{u_x} \\ \dots & 2\,\partial_y u_y & \partial_y \cancel{u_\theta} + \partial_\theta u_y \\ \dots & \dots & 2\,\partial_\theta \cancel{u_\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \partial_x u_y & 0 \\ \partial_x u_y & 2\,\partial_y \cancel{u_y} & \partial_\theta \cancel{u_y} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \partial_x u_y & 0 \\ \partial_x u_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$