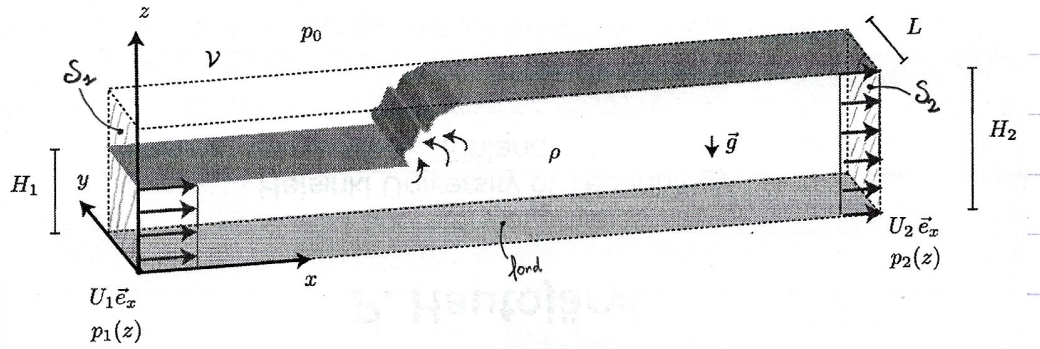
Ressaut hydraulique

en fluide parfait incompressible

→ capturer la complexité du ressaut (processus turbulent dissipatif) dans un simple bilan.



ici, volume de contrôle $\mathcal{V}$ fixe, mais on pourrait aussi bien prendre un volume matériel.

rappel : $d\vec{S}$ vers l'ext.

⚠ Ressaut stationnaire (= mascaret dans son référentiel !)

Il y a un changement de hauteur de l'écoulement
→ il faut prendre en compte la pesanteur $\vec{f} = -\rho g \vec{e}_z = -\vec{\nabla}(\rho g z)$ conservatif !
→ la pression hydrostatique joue

Pression en amont et en aval :

Équation d'Euler en S_1 et S_2 : $\rho\left(\cancel{\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}} + \underbrace{(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}}_{=0 \text{ car écoulement spatialement constant loin du ressaut}}\right) = -\vec{\nabla}p + \rho\vec{g} = -\vec{\nabla}(p+\rho g z)$

$\Rightarrow \vec{\nabla}(p+\rho g z) = \vec{0}$

Surface libre : $p(z=\text{surface}) = p_0 \Rightarrow p(x=x_{1,2}, z) \overset{\text{def}}{=} \boxed{P_{1,2}(z) = p_0 + \rho g (H_{1,2} - z)}$ (1)

Bilan de masse sur $\mathcal{V}$

$$0 \overset{\text{stat.}}{=} \frac{dM}{dt} = \oiint_{\partial\mathcal{V}} \rho\,(\vec{v}_z - \vec{u})\cdot d\vec{S} = -\rho\left(\iint_{S_1} + \iint_{S_2} + \underbrace{\iint_{\text{côtés}} + \iint_{\text{fond}} + \iint_{\text{haut}}}_{=0 \ (0,0',0'')}\right)(\vec{u}\cdot d\vec{S})$$

$$= -\rho L \cdot \left(\int_0^{H_1} U_1 \vec{e}_x\cdot(-\vec{e}_x) + \int_0^{H_2} U_2 \vec{e}_x\cdot\vec{e}_x\right)$$

$$= +\rho L (H_1 U_1 - H_2 U_2)$$

$$\Rightarrow \boxed{H_1 U_1 = H_2 U_2} \quad (2)$$

qui n'est rien d'autre que la conservation du débit.

fond : imperméabilité du fond :
$\vec{u}\cdot d\vec{S} = -\vec{u}\cdot\vec{e}_z = 0$ (0)

haut : surface libre en pas de fluide :
$\vec{u}\cdot d\vec{S} = \vec{u}\cdot\vec{e}_z = 0$ (0')

côtés : pas de flux global suivant y :
$\vec{u}\cdot d\vec{S} = \pm u\cdot\vec{e}_y = 0$ (0'')
(du moins en moyenne)

pas calculable suivant $\vec{e_z}$

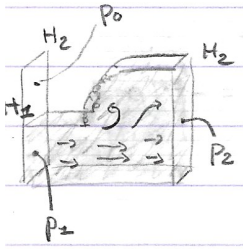
Bilan de quantité de mouvement sur $\mathcal{V}$ suivant $\vec{e_x}$:

$$\underset{\text{station.}}{\vec{0}} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \oiint_{\partial\mathcal{V}} \rho\vec{u}\,(\underset{\mathcal{V}\text{ fixe}}{(\cancel{\vec{v}_{\mathcal{V}}}-\vec{u})}\cdot d^2\vec{S}) + \underbrace{\iiint_{\mathcal{V}} \vec{f}\, d^3\mathcal{V}}_{\text{suivant } \vec{e_z}} + \oiint \underbrace{\vec{\vec{\sigma}}\cdot d^2\vec{S}}_{=-p\,d^2S \text{ fluide eulérien}}$$

$$\Rightarrow 0 = \vec{e_x}\cdot\frac{d\vec{P}}{dt} = -\rho\cdot\Big(\underbrace{\iint_{S_1}}_{=\iint_{S_1} U_1 \mathbb{1}_{z\le H_1} U_1\vec{e_x}\cdot(-\vec{e_x}) = -U_1^2 H_1\cdot L} + \underbrace{\iint_{S_2}}_{=+U_2^2 H_2\cdot L} + \overbrace{\iint_{\substack{\text{côtés}\\ \text{fond}\\ \text{haut}}}}^{=0\ (0,0',0'')}\Big)(u_x\vec{u}\cdot d^2\vec{S}) + 0 - \Big(\underbrace{\iint_{S_1}}_{-} + \underbrace{\iint_{S_2}}_{+} + \underbrace{\iint_{\text{côtés}}}_{=0 \text{ car } \propto \vec{e_y}} + \underbrace{\iint_{\substack{\text{haut}\\ \text{fond}}}}_{=0 \text{ car } \propto \vec{e_z}}\Big)(p\,d^2\vec{S}\cdot\vec{e_x})$$

pas calculable

(et $\propto(\vec{e_y}-\vec{e_y})=0$ de toute façon par invar. par trsl y)



$$\Rightarrow 0 = \rho\cdot(U_1^2H_1 - U_2^2H_2) + \underbrace{\int_0^{H_2} dz\, p_1(z)}_{} - \underbrace{\int_0^{H_2} dz\, p_2(z)}_{= H_2 p_0 + \rho g \frac{H_2^2}{2} \text{ avec } (1)}$$

$$= \int_0^{H_1} dz\, p_1(z) + \int_{H_1}^{H_2} dz\, \overset{\text{air}}{p_0} \underset{(1)}{=} H_2 p_0 + \underbrace{\int_0^{H_1} dz\, \rho g (H_1 - z)}_{=\rho g \frac{H_1^2}{2}}$$

heureusement, la pression atmosphérique ne joue pas

$$\Rightarrow 0 = \rho(U_1^2H_1 - U_2^2H_2) + \cancel{H_2 p_0} + \rho g\frac{H_1^2}{2} - \cancel{H_2 p_0} - \rho g \frac{H_2^2}{2}$$

conservation de la qté de mouvement

$$\Rightarrow \boxed{g\frac{H_1^2}{2} + H_1U_1^2 = g\frac{H_2^2}{2} + H_2U_2^2} \quad (3)$$

équation du ressaut/ relation de saut

solution triviale :

$U_1 = U_2 \Leftrightarrow H_1 = H_2$ pas de ressaut

4 inconnues et 2 équations
↓
2 variables indep, H_1 et H_2 ici

expression de U_2 en fonction de H_1 et H_2 :

en utilisant (2), on a $H_1U_1 = H_1\cdot\left(U_2\frac{H_2}{H_1}\right)^2 = \frac{H_2^2}{H_1}U_2^2$

donc $\underset{H_1\neq H_2}{(3)} \Leftrightarrow \frac{g}{2}(H_1^2 - H_2^2) = \left(H_2 - \frac{H_2^2}{H_1}\right)U_2^2$

$$\Leftrightarrow U_2^2 = \frac{g}{2}\frac{H_1^2 - H_2^2}{H_2(1 - H_2/H_1)} = \frac{g}{2}\frac{1}{H_2}\frac{(H_1+H_2)\overbrace{(H_1-H_2)}^{H_1\cdot(1-H_2/H_1)}}{1 - H_2/H_1} = \frac{g}{2}\frac{H_1}{H_2}(H_1+H_2)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{U_2 = \sqrt{\frac{g}{2}\frac{H_1}{H_2}(H_1+H_2)}} \quad (4) \qquad \Leftrightarrow U_1 = U_2\frac{H_2}{H_1} = \frac{H_2}{H_1}\sqrt{\frac{H_1}{H_2}\frac{g}{2}(H_1+H_2)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{U_1 = \sqrt{\frac{g}{2}\frac{H_2}{H_1}(H_1+H_2)}} \quad (4')$$

symétrie $1 \leftrightarrow 2$ comme il se doit

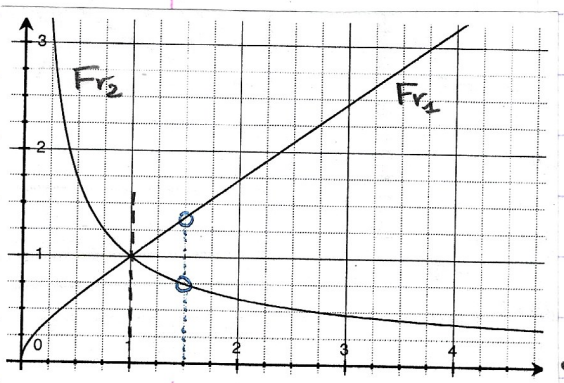
↑ si $H_1 \neq H_2$!
(ressaut)

(avec $H_1 = H_2$, on aurait $U = \sqrt{gH}$ fixé, ce qui est évidement absurde : on peut avoir un écoulement à une vitesse quelconque)

Si on introduit le nombre de Froude $Fr = \frac{U}{\sqrt{gH}}$ (vitesse écoulement / vitesse d'onde de gravité) et le rapport d'aspect $\alpha = \frac{H_2}{H_1}$, on a

$$Fr_1 = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{H_2}{H_1}\left(1+\frac{H_2}{H_1}\right)} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} Fr_1 &= \sqrt{\tfrac{1}{2}\alpha(\alpha+1)} \\ Fr_2 &= \sqrt{\tfrac{1}{2}\alpha^{-1}(\alpha^{-1}+1)} \end{aligned}} \quad (5)$$

relation de saut adimentionnée, si $\alpha \neq 1$

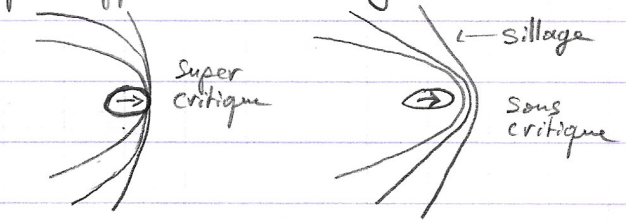


$H_2 > H_1$ ⇒ ressaut dans le même sens que la figure

$\alpha = 1$ autres solutions possibles que $U = \sqrt{gH}$ de c

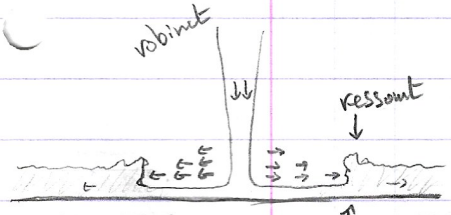
Interprétation : $\sqrt{gH}$ est la vitesse des ondes gravitaires, donc le nombre de Froude indique si l'écoulement est super-critique ou sous-critique par rapport aux ondes gravitaires

(Fr > 1) (Fr < 1)



- avant le ressaut, H_1 petit et U_1 grand ⇒ $Fr_1 > 1$, l'écoulement est torrentiel, les ondes sont entraînées
- après le ressaut, H_2 grand et U_2 plus petit ⇒ $Fr_2 < 1$, l'écoulement est fluvial, les ondes peuvent remonter

↳ le ressaut est une onde de choc pour les ondes gravitaires



diminution géométrique de la vitesse radiale

position du ressaut = là où la vitesse passe en fluvial : $u(r) = \sqrt{gH}$

Dissipation d'énergie dans le choc :

il y a un saut d'énergie interne (conversion énergie cinétique → énergie potentielle + thermique) qu'on calcule avec un bilan d'énergie :

$$0 \overset{\text{stat}}{=} \frac{dE_{tot}}{dt} = \oiint_{\partial\mathcal{V}} \rho\left(\frac{u^2}{2}+e\right)(\vec{v_p}-\vec{u})\cdot d^2\vec{S} + \iiint_{\mathcal{V}} (\rho\vec{g}\cdot\vec{u})\, d^3\mathcal{V} + \oiint_{\partial\mathcal{V}} \underbrace{(\vec{\sigma}\cdot\vec{u})}_{-p\vec{u}}\cdot d^2\vec{S}$$

comment calculer ça ???

incompressibilité $\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0$

↳ astuce : $\rho\vec{g}$ est conservative : $\rho\vec{g}\cdot\vec{u} = \vec{u}\cdot\vec{\nabla}(-\rho g z) = -\rho g\,\vec{\nabla}\cdot(z\vec{u})$

$$\Rightarrow \iiint_{\mathcal{V}} \rho\vec{g}\cdot\vec{u}\, d^3\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} \vec{\nabla}\cdot(-\rho g z\vec{u})\, d^3\mathcal{V} = -\rho g \oiint_{\partial\mathcal{V}} z\vec{u}\cdot d^2\vec{S}$$

par Green-Ostrogradski

Suivant $\vec{e_x}$ ou nul sur $\partial\mathcal{V}$ — $\propto \vec{e_x}$ sur S_1 et S_2 seulement

$$\Rightarrow \quad 0 = \oiint_{\partial\mathcal{V}} \left(-\rho\frac{u^2}{2} - \rho e - \rho g z - p\right) \vec{u}\cdot d^2\vec{S}$$

$\vec{u}\cdot(-\vec{e_x}) = -u$ ⟶

$$= + \iint_{S_1} \left(\rho\left(\frac{u^2}{2}+e+gz\right)+p\right) u\, d^2S - \iint_{S_2} \left(\rho\left(\frac{u^2}{2}+e+gz\right)+p\right) u\, d^2S$$

$= \mathbb{1}_{z\le H_1} U_1 \left(\rho\left(\frac{U_1^2}{2}+e+gz\right)+p_0 + \rho g(H_1 - z)\right)$; $\quad = U_2\left(\rho\left(\frac{U_2^2}{2}+e+gz\right)+p_0 + \rho g(H_2 - z)\right)$

On suppose que les densités massiques à l'entrée/sortie sont uniformes $\equiv e_1, e_2$ ⟶

$$= + L H_1 \cdot U_1 \left(\rho\left(\frac{U_1^2}{2} + e_1 + g H_1\right) + p_0\right) - L \underbrace{H_2 \cdot U_2}_{= H_1 U_1 \text{ conservation du débit}} \left(\rho\left(\frac{U_2^2}{2} + e_2 + g H_2\right) + p_0\right)$$

$$= L H_1 U_1 \cdot \left(\rho\left(\frac{U_1^2}{2} - \frac{U_2^2}{2} + e_1 - e_2 + g H_1 - g H_2\right) + p_0 - p_0\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{e_2 - e_1 = \frac{1}{2}(U_1^2 - U_2^2) + g(H_1 - H_2)} \quad (6)$$

Δe_{int} ; $-\Delta e_{cin,écoul}$; $-\Delta e_{pot}$

$\Delta(e_{int} + e_{cin} + e_{pot}) = 0$ ← conservat° de l'énergie totale massique

Maintenant, en utilisant la relation de saut pour éliminer les vitesses,

$$e_2 - e_1 \underset{(4),(4')}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{g}{2}\frac{H_2}{H_1}(H_1+H_2) - \frac{g}{2}\frac{H_1}{H_2}(H_1+H_2)\right) + g(H_1 - H_2)$$

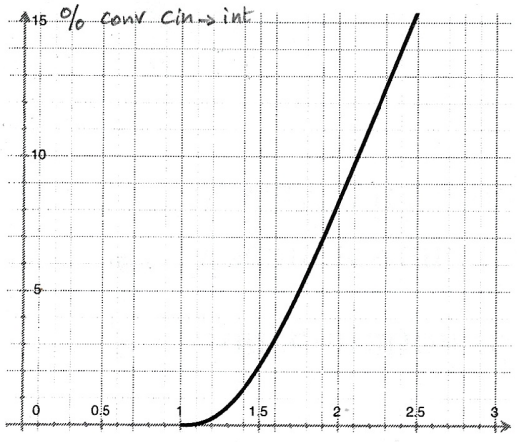
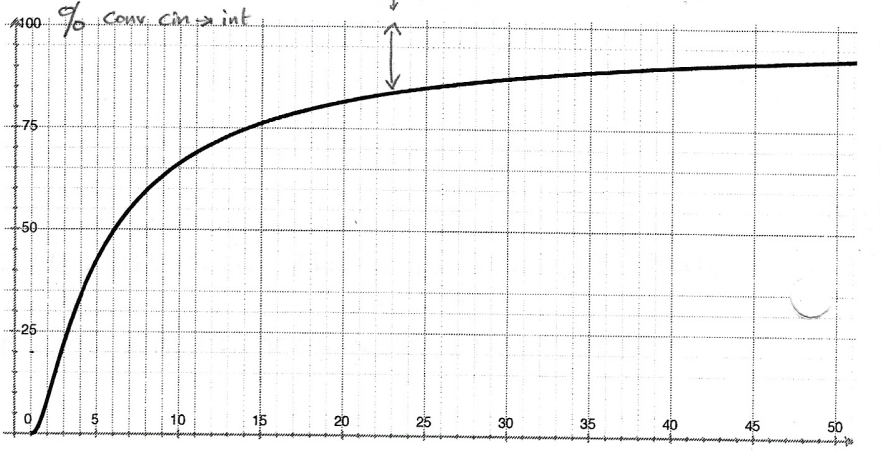
$$= \frac{g}{4}\left((H_1+H_2)\left(\frac{H_2}{H_1} - \frac{H_1}{H_2}\right) + 4(H_1 - H_2)\right) = \frac{g(H_2-H_1)}{4H_1H_2}\left((H_1+H_2)^2 - 4H_1H_2\right)$$

$\frac{H_2}{H_1} - \frac{H_1}{H_2} = \frac{H_2^2 - H_1^2}{H_1H_2} = \frac{(H_2-H_1)(H_2+H_1)}{H_1H_2}$; $(H_1+H_2)^2 - 4H_1H_2 = H_1^2 - 2H_1H_2 + H_2^2 = (H_1-H_2)^2$

$$\boxed{e_2 - e_1 = g\frac{(H_2-H_1)^3}{4H_1H_2}} > 0 \text{ pour } H_2 > H_1 \Rightarrow \text{il y a conversion d'énergie cinétique d'écoulement en énergie interne}$$

$$= g\frac{(H_2/H_1 - 1)^3 H_1^3}{4H_1^2 H_2/H_1} = g\frac{(\alpha-1)^3}{4\alpha}H_1$$

Taux de conversion de l'énergie cinétique de l'écoulement en entrée :

$\frac{1}{2}U_1^2$ ⟶ $\frac{\Delta e_{int}}{e_{cin}^{(1)}} = g\frac{(\alpha-1)^3}{4\alpha}H_1 \frac{2}{g}\frac{1}{H_2}\frac{1}{H_1+H_2} = \frac{(\alpha-1)^3}{\alpha}\frac{1}{2}\frac{1}{1+\alpha} \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta e_{int}}{e_{cin}^{(1)}} = \frac{(\alpha-1)^3}{(\alpha+1)\alpha^2}}$

le reste est gardée en énergie cin. de sortie et en énergie potentielle