

# Décollement d'une ventouse

Disque de rayon  $R$ , parallèle et à une hauteur  $h$  d'une surface plane, plongé dans un fluide de viscosité  $\eta$ . Comment varie  $h(t)$  lorsque l'on applique une force verticale  $F(t)$  sur le disque ?

[descr]

Champ de vitesse sous le disque supposé radial et vertical, et symétrique par rotation :

$$\vec{u} = u_r(r, z, t) \vec{e}_r + u_z(r, z, t) \vec{e}_z \quad (1)$$

En réalité, c'est faux, surtout à grande vitesse : il se forme des doigts de fluide, qui peuvent se mettre de plus à tourner [photo].

## 1. Modèle de lubrification

Puisque l'écoulement est géométriquement contraint dans la direction verticale (tout du moins dans la phase initiale de décollement), c'est-à-dire  $h \ll R$ , on peut se placer dans le cadre du modèle de lubrification. Grandeurs caractéristiques :  $U_r$  et  $U_z$  la vitesse radiale/verticale,  $P$  la pression, et  $T$  le temps d'évolution. L'incompressibilité

$$\frac{\frac{1}{r} \partial_r (r u_r)}{U_r/R} + \frac{\partial_z u_z}{U_z/h} = 0 \quad (2)$$

impose un ordering des vitesses en ordre de grandeur :  $U_z = \frac{h}{R} U_r \ll U_r$ . Les équations de Navier-Stokes en cylindrique pour (1) s'écrivent, avec  $\nu = \eta / \rho$ ,

$$\frac{\partial_t u_r}{U_r/T} + \frac{u_r \partial_r u_r}{U_r^2/R} + \frac{u_z \partial_z u_r}{U_z U_r/h} = \frac{-\frac{1}{\rho} \partial_r p}{P/\rho R} + \nu \left( \frac{\frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r u_r)}{\nu U_r/R^2} - \frac{\frac{1}{r^2} u_r}{\nu U_r/r^2} + \frac{\partial_z^2 u_r}{\nu U_r/h^2} \right)$$

$$\frac{\partial_t u_z}{U_z/T} + \frac{u_r \partial_r u_z}{U_z U_r/R} + \frac{u_z \partial_z u_z}{U_z^2/h} = \frac{-\frac{1}{\rho} \partial_z p}{P/\rho h} + \nu \left( \frac{\frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r u_z)}{\nu U_z/R^2} + \frac{\partial_z^2 u_z}{\nu U_z/h^2} \right)$$

accel negl + simplifications par ordering  $\implies$

$$\frac{u_r \partial_r u_r}{U_r^2/R} + \frac{u_z \partial_z u_r}{U_r^2/R} = \frac{-\frac{1}{\rho} \partial_r p}{P/\rho R} + \frac{\nu \partial_z^2 u_r}{\nu U_r/h^2}$$

$$\frac{u_r \partial_r u_z}{U_z^2/h} + \frac{u_z \partial_z u_z}{U_z^2/h} = \frac{-\frac{1}{\rho} \partial_z p}{P/\rho h} + \frac{\nu \partial_z^2 u_z}{\nu U_z/h^2}$$

On peut éliminer les termes non-linéaires restant en se plaçant dans un régime de faible Reynolds : si

$$\frac{U_r^2}{R} \ll \frac{\nu U_r}{h^2} \quad \text{et} \quad \frac{U_z^2}{h} \ll \frac{\nu U_z}{h^2} \quad \iff \quad \boxed{\text{Re}_z = \frac{U_z h}{\nu} \ll 1} \quad (\text{viscosité domine inertie})$$

alors

$$\frac{1}{\rho} \partial_r p \simeq \nu \partial_z^2 u_r \quad \text{et} \quad \frac{1}{\rho} \partial_z p \simeq \nu \partial_z^2 u_z$$

On remarque que la pression est de l'ordre de  $\frac{P}{\rho R} = \frac{\nu U_r}{h^2}$  donc  $\frac{P}{\rho h} = \frac{\nu U_r}{h^2} \frac{R}{h} = \frac{\nu U_z}{h^2} \left(\frac{R}{h}\right)^2 \gg \frac{\nu U_z}{h^2}$  donc notre modèle de lubrification s'écrit finalement

$$\boxed{\partial_r p \simeq \eta \partial_z^2 u_r \quad \text{et} \quad \partial_z p \simeq 0} \quad (3)$$

(de type Stokes en  $r$ , hydrostatique en  $z$ )

À vérifier a posteriori : termes d'accel négligeables, terme  $\frac{1}{r^2} u_r$  négligeable presque partout

## 2. Détermination du champ de pression

Conditions aux limites :

- $p(r=R, t) \simeq p_0$ , où  $p_0$  est la pression du reste du fluide, en particulier au dessus du disque
- continuité en 0 :  $u_r(r=0) = 0$
- imperméabilité et non-glissement au fond :  $u_z(z=0) = u_r(z=0) = 0$
- imperméabilité sous le disque :  $u_z(z=h(t)) = \partial_t h(t) \equiv \dot{h}$ , et non-glissement :  $u_r(z=h(t)) = 0$

Avec (3.2), on a déjà que

$$p = p(r, t) \quad (4)$$

donc on peut simplement intégrer (3.1) en  $z$  :

$$u_r(r, z, t) = \frac{\partial_r p}{2\eta} z^2 + Az + B$$

En imposant les conditions de non-glissement,  $B=0$  et  $0 = u_r(r, z=h, t) = \frac{\partial_r p}{2\eta} h^2 + Ah$  donc

$$u_r(r, z, t) = \frac{\partial_r p(r, t)}{2\eta} z(z-h(t)) \quad (5)$$

L'écoulement radial est un écoulement de Poiseuille généré par le gradient de pression.

Pour déterminer  $u_z$ , on utilise l'équation d'incompressibilité (2) :

$$\partial_z u_z = -\frac{1}{r} \partial_r (r u_r) = -\frac{1}{2\eta} z(z-h) \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r p)$$

donc après intégration en  $z$ ,

$$u_z = -\frac{1}{2\eta} \left( \frac{1}{3} z^3 - h \frac{1}{2} z^2 \right) \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r p) + \overbrace{u_z(z=0)}^{=0} \quad (6)$$

Il reste à obtenir le gradient de pression (qui ne dépend pas de  $z$  !) à partir de  $h(t)$ , ce que l'on peut faire en utilisant la conditions d'imperméabilité en  $z=h$  :

$$\dot{h} = u_z(z=h) = -\frac{1}{2\eta} h^3 \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r p) = \frac{h^3}{12\eta} \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r p) \quad (7)$$

donc

$$r \frac{12\eta}{h^3} \dot{h} = \partial_r (r \partial_r p) \implies r \partial_r p = \frac{r^2}{2} \frac{12\eta}{h^3} \dot{h} + \text{cste} \implies \partial_r p = r \frac{6\eta}{h^3} \dot{h} + \frac{\text{cste}}{r} \quad (8)$$

Pour ne pas avoir de singularité en  $r=0$ , on doit prendre  $\text{cste}=0$ . Une dernière intégration en  $r$  donne :

$$p(r) = \frac{r^2}{2} \frac{6\eta}{h^3} \dot{h} + \text{cste} \quad ; \quad \text{or } p_0 = p(R) = R^2 \frac{3\eta}{h^3} \dot{h} + \text{cste}$$

donc finalement

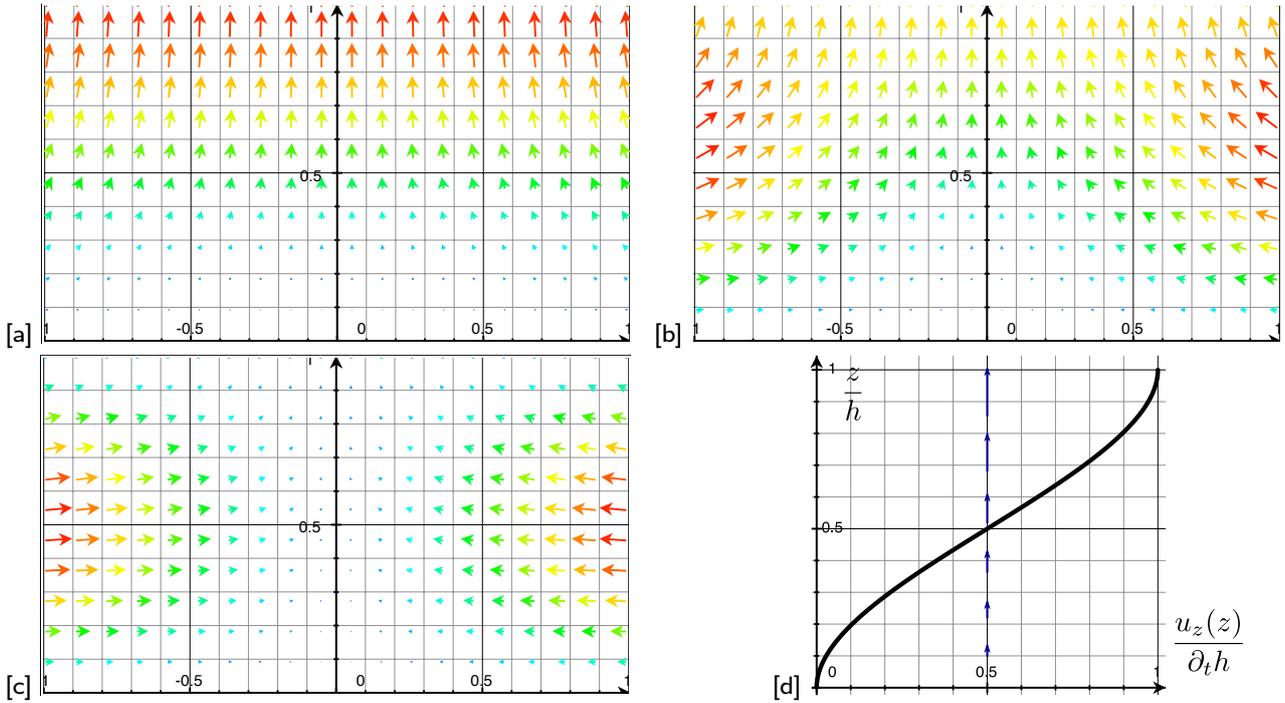
$$\boxed{p(r, t) = p_0 - (R^2 - r^2) \frac{3\eta}{h(t)^3} \partial_t h(t)} \quad (9)$$

On remarque que  $R^2 - r^2 > 0$  : si on tire suffisamment fort ( $\frac{3\eta R^2 \dot{h}}{h^3} > p_0$ ), la pression au centre peut devenir "négative". En réalité, lorsque  $p$  devient inférieure à  $p_{\text{vapeur}}$ , des bulles se forment.

## 3. Profil de vitesse

$$(5),(8) \implies u_r = \frac{r \frac{6\eta}{h^3} \partial_t h}{2\eta} z(z-h(t)) \implies \boxed{u_r(r, z) = 3r \frac{z}{h} \left( \frac{z}{h} - 1 \right) \frac{\partial_t h}{h}} \quad (10)$$

$$(6),(7) \implies u_z = -\frac{1}{2\eta} \left( \frac{1}{3} z^3 - h \frac{1}{2} z^2 \right) \frac{12\eta}{h^3} \partial_t h \implies \boxed{u_z(r, z) = \left( \frac{z}{h} \right)^2 \left( 3 - 2 \frac{z}{h} \right) \partial_t h} \quad (11)$$



**Figure 1.** Coupe verticale du champ de vitesse (axe horizontal :  $x/R$ , axe vertical :  $z/h$ , magnitude arbitraire) pour  $h/R \ll 1$  ([a], ventouse éloignée), pour  $h/R = 1.5$  (milieu) et pour  $h/R \gg 1$  (droite, ventouse presque collée). Profil de vitesse verticale [d].

#### 4. Force d'adhérence

Connaissant le champ de pression, on peut calculer la force exercée sur le disque :

$$\begin{aligned}
 \vec{F} &= \iint_{\text{disque}} p \, d^2\vec{S}_{\text{fluide} \rightarrow \text{disque}} = \underbrace{-\pi R^2 p_0 \vec{e}_z}_{\text{fluide au dessus}} + \int_0^R dr \int_0^{2\pi} r \, d\theta \left( p_0 - (R^2 - r^2) \frac{3\eta \dot{h}}{h^3} \right) \vec{e}_z \\
 &= -\pi R^2 p_0 \vec{e}_z + \pi R^2 p_0 \vec{e}_z - 2\pi \frac{3\eta \dot{h}}{h^3} \left( R^2 \int_0^R dr r - \int_0^R dr r^3 \right) \vec{e}_z \\
 &= -2\pi \frac{3\eta \dot{h}}{h^3} \left( R^2 \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4} \right) \vec{e}_z
 \end{aligned}$$

donc le disque adhère avec une force

$$\boxed{\frac{\vec{F}_{\text{adh}}}{\pi R^2} = -\frac{3}{2} \eta \left( \frac{R}{h} \right)^2 \frac{\partial_t h}{h} \vec{e}_z}$$

On vérifie que cette force est bien nulle si  $\partial_t h = 0$  ou si  $R = 0$ , et  $\infty$  si  $h = 0$  (ventouse collée).

#### 5. Comportement lorsque l'on tire la ventouse : décollement

On applique une force constante  $\vec{F}_0 = F_0 \vec{e}_z$  dans la direction verticale. La seconde loi de Newton sur le disque de masse  $m$ , de vitesse  $\dot{h}$ , donne alors (suivant  $\vec{e}_z$ )

$$m \ddot{h} = F_0 + F_{\text{adh}}(h, \dot{h})$$

Dans le régime où l'inertie du disque est négligeable (ce qui est souvent le cas au début du décollement),

$$F_0 = -F_{\text{adh}}(h, \dot{h}) = \frac{3\pi}{2} \eta R^4 \frac{\dot{h}}{h^3} \iff \frac{\dot{h}}{h^3} = \frac{2F_0}{3\pi \eta R^4}$$

C'est une équation différentielle séparable, que l'on intègre à partir d'une hauteur de ventouse  $h_0 \neq 0$  :

$$\frac{dh}{h^3} = \frac{2F_0}{3\pi \eta R^4} dt \quad \text{donc} \quad \int_{h_0}^{h(t)} h^{-3} dh = \left[ -\frac{1}{2} h^{-2} \right]_{h_0} = \frac{2F_0}{3\pi \eta R^4} t \quad \text{donc} \quad \frac{1}{h^2} = \frac{1}{h_0^2} - \frac{4F_0}{3\pi \eta R^4} t$$

donc

$$\frac{h_0}{h} = \sqrt{1 - \frac{4 F_0 h_0^2}{3 \pi \eta R^4} t} \quad \text{donc} \quad \boxed{h(t) = h_0 \sqrt{\frac{1}{1 - t/\tau}} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{3 \pi \eta R^4}{4 F_0 h_0^2}}$$

La hauteur de la ventouse diverge à  $t = \tau$  : c'est le temps que met la ventouse initialement à une hauteur  $h_0$  pour se décoller.

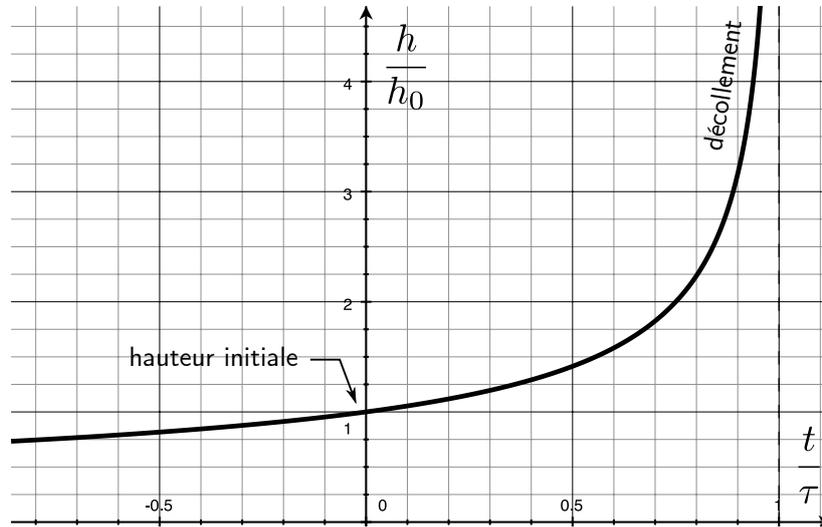


Figure 2. Dynamique de la ventouse à force constante en régime amorti.

En réalité, le modèle n'est plus valable lorsque  $t$  approche  $\tau$  :

- 
-