Théorie de Ginzburg-Landau d'un supraconducteur dans un champ magnétique

On décrit la phase supraconductrice par un paramètre d'ordre complexe $\phi(\vec{x})$ représentnant la fonction d'onde d'une particule chargée de charge q et de masse m. À l'époque où Ginzburg et Landau ont construit cette théorie de la supraconductivité (1950), le sens physique de ϕ n'était pas clair, ni celui de q et m.

Depuis la théorie BCS (1957), on sait que ϕ est la fonction d'onde dans laquelle toutes les paires de Cooper (paires d'électrons, donc bosoniques, de charge $q=-2e$) ont condensés (aux excitations thermiques près), dans le cadre de la condensation de Bose-Einstein. Mais on va rester ici dans un cadre phénoménologique.

Le but ici n'est pas l'étude de la conductivité (propriétés de transport) mais de l'effet Meissner (explulsion du champ magnétique). Dans l'esprit des théories de Ginzburg-Landau, et puisque l'on est en présence de particules chargées dans un champ magnétique $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$, tout deux variables du problème, on prend en compte la densité d'énergie du champ EM $\frac{B^2}{2\mu_0}$, ainsi que le couplage entre le champ et la densité de charge en imposant d'invariance de jauge EM (symétrie $U(1)$, qui force l'utilisation d'un champ scalaire complexe) :

$$\frac{p^2}{2\,m} = \frac{\hbar^2}{2m}\,|\vec{\nabla}_{\vec{A}}\,\phi|^2 \quad \text{où} \quad \vec{\nabla}_{\vec{A}} = \vec{\nabla} - \tfrac{\mathrm{i}q}{\hbar}\,\vec{A}$$

(c'est le *couplage minimal*). On décrit la transition de phase par une théorie ϕ^4 de paramètres $\tilde{\alpha}=(T-T_c)\,\alpha$ avec $\alpha>0$ et $\beta>0$. La fonctionnelle de Ginzburg-Landau de notre système supraconducteur-champ magnétique s'écrit alors (dimensions : $[\mathcal{F}]=\mathrm{J}$, $[\phi]^2=\mathrm{m}^{-3}$, $[\tilde{\alpha}]=\mathrm{J}$, $[\beta]=\mathrm{J}\cdot\mathrm{m}^3$) :

$$\boxed{\mathcal{F}[\phi,\vec{A}] = \int \mathrm{d}^3\vec{\mathrm{x}}\left(\tfrac{\hbar^2}{2m}\,|\vec{\nabla}_{\vec{A}}\,\phi|^2 + \tilde{\alpha}\,|\phi|^2 + \tfrac{\beta}{2}\,|\phi|^4 + \tfrac{1}{2\mu_0}\,\vec{B}^2\right)} \tag{1}$$

$\mathcal{F}$ est bien invariante sous la transformation de jauge

$$\begin{aligned} \vec{A} &\mapsto \vec{A}'=\vec{A}+\vec{\nabla}\chi \\ \phi &\mapsto \phi'(\vec{x})=\phi(\vec{x})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{q}{\hbar}\chi(\vec{x})} \quad \big(|\phi'|=|\phi|\big) \end{aligned} \tag{2}$$

car $\vec{B}$ l'est ($\vec{B}'=\vec{\nabla}\times(\vec{A}+\vec{\nabla}\chi)=\nabla\times\vec{A}=\vec{B}$ car $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{grad}})=\vec{0}$) et car $\boxed{\big|\vec{\nabla}_{\vec{A}'}\,\phi'\big| = \big|\vec{\nabla}_{\vec{A}}\,\phi\big|}$:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_{\vec{A}'}\,\phi' &= \big(\vec{\nabla} - \tfrac{\mathrm{i}q}{\hbar}\,(\vec{A}+\vec{\nabla}\chi)\big)\phi\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{q}{\hbar}\chi} \\ &= (\vec{\nabla}\phi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{q}{\hbar}\chi} + \phi\,\vec{\nabla}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{q}{\hbar}\chi} - \tfrac{\mathrm{i}q}{\hbar}\,\vec{A}\,\phi\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{q}{\hbar}\chi} - \tfrac{\mathrm{i}q}{\hbar}\,(\vec{\nabla}\chi)\,\phi\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{q}{\hbar}\chi} \\ &= \big(\vec{\nabla}_{\vec{A}}\,\phi\big)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{q}{\hbar}\chi} + \underbrace{\phi\,\mathrm{i}\,\tfrac{q}{\hbar}\,(\vec{\nabla}\chi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{q}{\hbar}\chi} - \tfrac{\mathrm{i}q}{\hbar}\,(\vec{\nabla}\chi)\,\phi\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{q}{\hbar}\chi}}_{=0} = \text{phase}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{A}}\,\phi \end{aligned}$$

On cherche les équations résultantes de la minimisation de $\mathcal{F}[\phi,\vec{A}]$.

1. Équations d'Euler-Lagrange

Plus explicitement, la fonctionnelle s'écrit

$$\mathcal{F}[\phi,\vec{A}] = \int \mathrm{d}\vec{\mathrm{x}}\left(\tfrac{\hbar^2}{2m}\big(\vec{\nabla}_{\vec{A}}\,\phi\big)\cdot\big(\vec{\nabla}^*_{\vec{A}}\,\phi^*\big) + \tilde{\alpha}\,\phi\,\phi^* + \tfrac{\beta}{2}\,(\phi\,\phi^*)^2 + \tfrac{1}{2\mu_0}\,\vec{B}^2\right) \tag{3}$$

Variation de $\mathcal{F}$ en ϕ en oubliant le $\frac{\hbar^2}{2m}$ et en écrivant temporairement ∇ à la place de $\nabla_{\vec{A}}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[\phi+\delta\phi]-\mathcal{F}[\phi] &= \int \mathrm{d}\vec{x}\Big(\vec{\nabla}\phi\cdot\vec{\nabla}^*\phi^* + \vec{\nabla}\phi\cdot\vec{\nabla}^*\delta\phi^* + \vec{\nabla}\delta\phi\cdot\vec{\nabla}^*\phi^* + \tilde{\alpha}\left(\phi\,\phi^* + \phi\,\delta\phi^* + \phi^*\,\delta\phi\right) + \\
&\quad \tfrac{\beta}{2}\left((\phi\,\phi^*)^2 + 2\,(\phi\,\phi^*)(\phi\,\delta\phi^* + \phi^*\,\delta\phi)\right) + \tfrac{1}{2\,\mu_0}\vec{B}^2\Big) - \mathcal{F}[\phi] \\
&= \int \mathrm{d}\vec{x}\left(\vec{\nabla}\phi\cdot\vec{\nabla}^*\delta\phi^* + \tilde{\alpha}\,\phi\,\delta\phi^* + \beta\,|\phi|^2\,\phi\,\delta\phi^*\right) + \text{c.c.}(\delta\phi) \\
\text{[voir (5)]} \quad &= \int \mathrm{d}\vec{x}\left(-\delta\phi^*\,\vec{\nabla}^{*2}\phi + \tilde{\alpha}\,\phi\,\delta\phi^* + \beta\,|\phi|^2\,\phi\,\delta\phi^*\right) + \text{c.c.}(\delta\phi)
\end{aligned}$$

Extrémisation en ϕ :

$$0 = \delta\mathcal{F} = \mathcal{F}[\phi+\delta\phi]-\mathcal{F}[\phi] = \int \mathrm{d}\vec{x}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2_{\vec{A}}\,\phi + \tilde{\alpha}\,\phi + \beta\,|\phi|^2\,\phi\right)\delta\phi^* + \text{c.c.}(\delta\phi) \qquad \forall\delta\phi$$

$$\Longleftrightarrow \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2_{\vec{A}}\,\phi + \tilde{\alpha}\,\phi + \beta\,|\phi|^2\,\phi = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\frac{1}{2m}\left(\mathrm{i}\hbar\,\vec{\nabla} + q\,\vec{A}\right)^2\phi + \tilde{\alpha}\,\phi + \beta\,|\phi|^2\,\phi = 0} \tag{4}$$

car $-\hbar^2\left(\vec{\nabla} - \frac{\mathrm{i}q}{\hbar}\vec{A}\right)^2 = (\mathrm{i}\hbar\,\vec{\nabla} + q\,\vec{A})^2$.

L'équation (4) est une sorte d'équation de Schrödinger. C'est l'équation de Gross-Pitaevskii pour notre gaz de paires de Cooper, dans un champ magnétique, et dans le carde d'une théorie ϕ^4. On peut montrer à la main que (4) est bien invariante de jauge, comme prévu.

Détails de l'IPP :

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}\vec{x}\,\vec{\nabla}_{\vec{A}}\,\phi\cdot\vec{\nabla}^*_{\vec{A}}\,\delta\phi^* &= \int \mathrm{d}\vec{x}\left(\vec{\nabla} - \tfrac{\mathrm{i}q}{\hbar}\vec{A}\right)\phi\cdot\left(\vec{\nabla} + \tfrac{\mathrm{i}q}{\hbar}\vec{A}\right)\delta\phi^* \\
&= \int \mathrm{d}\vec{x}\left(\vec{\nabla}\phi\cdot\vec{\nabla}\delta\phi^* + \tfrac{\mathrm{i}q}{\hbar}\,\delta\phi^*\,\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\phi - \tfrac{\mathrm{i}q}{\hbar}\,\phi\,\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\delta\phi^* + \tfrac{q^2}{\hbar^2}A^2\,\phi\,\delta\phi^*\right) \\
&= \int \mathrm{d}\vec{x}\left(\vec{\nabla}\phi\cdot\vec{\nabla}\delta\phi^* + \tfrac{\mathrm{i}q}{\hbar}\,\delta\phi^*\,\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\phi - \tfrac{\mathrm{i}q}{\hbar}\,\phi\,\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\delta\phi^* + \tfrac{q^2}{\hbar^2}A^2\,\phi\,\delta\phi^*\right) \\
&= \int \mathrm{d}\vec{x}\left(-(\nabla^2\phi)\,\delta\phi^* + \tfrac{\mathrm{i}q}{\hbar}\,\delta\phi^*\,\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\phi + \tfrac{\mathrm{i}q}{\hbar}\,\vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\phi)\,\delta\phi^* + \tfrac{q^2}{\hbar^2}A^2\,\phi\,\delta\phi^*\right) \\
&= -\int \mathrm{d}\vec{x}\left(\nabla^2\phi - \tfrac{2\,\mathrm{i}q}{\hbar}\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\phi - \tfrac{q^2}{\hbar^2}A^2\,\phi\right)\delta\phi^* \\
&= -\int \mathrm{d}\vec{x}\,\delta\phi^*\,(\vec{\nabla} - \tfrac{\mathrm{i}q}{\hbar}\vec{A})^2\phi = -\int \mathrm{d}\vec{x}\,\delta\phi^*\,\vec{\nabla}^2_{\vec{A}}\,\phi
\end{aligned} \tag{5}$$

Alternativement, on peut calculer la dérivée fonctionnelle directement : on a

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta\phi^*(\vec{x})}\int \mathrm{d}\vec{x}'\,|\vec{\nabla}_{\vec{A}}\,\phi|^2(\vec{x}') &\overset{\text{IPP}}{=} \frac{\delta}{\delta\phi^*(\vec{x})}\left(-\int \mathrm{d}\vec{x}'\delta\phi^*(\vec{x}')\,\vec{\nabla}^2_{\vec{A}}\,\phi(\vec{x}')\right) \\
&= -\int \mathrm{d}\vec{x}'\,\frac{\delta\phi^*(\vec{x}')}{\delta\phi^*(\vec{x})}\,\vec{\nabla}^2_{\vec{A}}\,\phi(\vec{x}') \\
&= -\int \mathrm{d}\vec{x}'\,\delta(\vec{x}-\vec{x}')\,\vec{\nabla}^2_{\vec{A}}\,\phi(\vec{x}') \\
&= -\vec{\nabla}^2_{\vec{A}}\,\phi(\vec{x})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta\phi^*(\vec{x})}\int \mathrm{d}\vec{x}'\,\tilde{\alpha}\,\phi(\vec{x}')\,\phi^*(\vec{x}') + \tfrac{\beta}{2}\left(\phi(\vec{x}')\,\phi^*(\vec{x}')\right)^2 &= \tilde{\alpha}\,\phi(\vec{x}) + \tfrac{\beta}{2}\,\phi(\vec{x})^2\,2\,\phi^*(\vec{x}) \\
&= \tilde{\alpha}\,\phi + \beta\,|\phi|^2\,\phi
\end{aligned}$$

donc on a bien ce que l'on avait trouvé (4) :

$$\begin{aligned}
0 = \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\phi^*(\vec{x})} &= \frac{\delta}{\delta\phi^*(\vec{x})}\int \mathrm{d}\vec{x}'\left(\frac{\hbar^2}{2m}(\vec{\nabla}_{\vec{A}}\,\phi)\cdot(\vec{\nabla}^*_{\vec{A}}\,\phi^*) + \tilde{\alpha}\,\phi\,\phi^* + \tfrac{\beta}{2}\,(\phi\,\phi^*)^2 + \tfrac{1}{2\,\mu_0}\vec{B}^2\right) \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2_{\vec{A}}\,\phi(\vec{x}) + \tilde{\alpha}\,\phi + \beta\,|\phi|^2\,\phi
\end{aligned}$$

Variation de $\mathcal{F}$ en A, avec la dérivée fonctionnelle directement : $\forall l$,

$$0 = \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta A_l(\vec{x})} = \frac{\delta}{\delta A_l(\vec{x})}\int \mathrm{d}\vec{x}' \left(\tfrac{\hbar^2}{2m}\,|\vec{\nabla}_{\vec{A}}\,\phi|^2 + \tilde{\alpha}\,|\phi|^2 + \tfrac{\beta}{2}\,|\phi|^4 + \tfrac{1}{2\mu_0}\,\vec{B}^2[\vec{A}] \right)$$

Puisque $B_i = (\vec{\nabla}\times\vec{A})_i = \varepsilon_{ijk}\,\partial_j\,A_k$, on a

$$\begin{aligned}
\vec{B}^2 &= B_i\,B_i \\
&= \varepsilon_{ijk}\,(\partial_j\,A_k)\,\varepsilon_{imn}\,(\partial_m\,A_n) \\
&= (\delta_{jm}\,\delta_{kn} - \delta_{jn}\,\delta_{km})\,(\partial_j\,A_k)\,(\partial_m\,A_n) \\
&= (\partial_j\,A_k)\,(\partial_j\,A_k) - (\partial_j\,A_k)\,(\partial_k\,A_j)
\end{aligned}$$

et alors

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\vec{B}^2}{\delta A_l(\vec{x})} &= \frac{\delta}{\delta A_l(\vec{x})}(\partial_j\,A_k)\,(\partial_j\,A_k) - \frac{\delta}{\delta A_l(\vec{x})}(\partial_j\,A_k)\,(\partial_k\,A_j) \\
&= 2\,(\partial_j\,A_k)\,\frac{\delta\partial_j\,A_k}{\delta A_l(\vec{x})} - (\partial_k\,A_j)\,\frac{\delta\partial_j\,A_k}{\delta A_l(\vec{x})} - (\partial_j\,A_k)\,\frac{\delta\partial_k\,A_j}{\delta A_l(\vec{x})} \\
&= 2\,(\partial_j\,A_k)\,\delta_{kl}\,\partial_j\,\delta_{\vec{x}} - (\partial_k\,A_j)\,\delta_{kl}\,\partial_j\,\delta_{\vec{x}} - (\partial_j\,A_k)\,\delta_{jl}\,\partial_k\,\delta_{\vec{x}} \\
&= 2\,(\partial_j\,A_l)\,\partial_j\,\delta_{\vec{x}} - (\partial_l\,A_j)\,\partial_j\,\delta_{\vec{x}} - (\partial_l\,A_k)\,\partial_k\,\delta_{\vec{x}} \\
&= 2\,\big((\partial_k\,A_l) - (\partial_l\,A_k)\big)\,\partial_k\,\delta_{\vec{x}}
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta A_l(\vec{x})}\int \mathrm{d}\vec{x}'\,\tfrac{1}{2}\,\vec{B}^2(\vec{x}') &= \int \mathrm{d}\vec{x}'\,\tfrac{1}{2}\,\frac{\delta\vec{B}^2}{\delta A_l(\vec{x})}(\vec{x}') \\
&= \sum_k \int \mathrm{d}\vec{x}'\,\big((\partial_k\,A_l) - (\partial_l\,A_k)\big)(\vec{x}')\,\partial_k\,\delta(\vec{x}-\vec{x}') \\
\text{[IPP]} \quad &= \sum_k \left(\overbrace{\big[(\ldots)\,\delta_{\vec{x}}\big]}^{=0} - \int \mathrm{d}\vec{x}'\,\partial_k\,\big((\partial_k\,A_l) - (\partial_l\,A_k)\big)(\vec{x}')\,\delta(\vec{x}-\vec{x}') \right) \\
&= -\sum_k \partial_k\,\big((\partial_k\,A_l) - (\partial_l\,A_k)\big)(\vec{x})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c'est-à-dire} \quad \frac{\delta}{\delta\vec{A}}\int \mathrm{d}\vec{x}'\,\tfrac{1}{2}\,\vec{B}^2 &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \vec{\nabla}^2\vec{A} \quad \text{(grad de div} - \text{laplacien)} \\
\text{[formule classique]} \quad &= \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A} \\
\text{[def]} \quad &= \vec{\nabla}\times\vec{B}
\end{aligned}$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}\vec{x}'\,|\vec{\nabla}_{\vec{A}+\delta\vec{A}}\,\phi|^2 - \int \mathrm{d}\vec{x}'\,|\vec{\nabla}_{\vec{A}}\,\phi|^2 \\
&= \int \mathrm{d}\vec{x}' \left(\vec{\nabla} - \tfrac{\mathrm{i}q}{\hbar}\,\vec{A} - \tfrac{\mathrm{i}q}{\hbar}\,\delta\vec{A}\right)\phi\cdot\left(\vec{\nabla} + \tfrac{\mathrm{i}q}{\hbar}\,\vec{A} + \tfrac{\mathrm{i}q}{\hbar}\,\delta\vec{A}\right)\phi^* - \int \mathrm{d}\vec{x}' \left(\vec{\nabla} - \tfrac{\mathrm{i}q}{\hbar}\,\vec{A}\right)\phi\cdot\left(\vec{\nabla} + \tfrac{\mathrm{i}q}{\hbar}\,\vec{A}\right)\phi^* \\
&= \int \mathrm{d}\vec{x}' \left(\left(\left(\vec{\nabla} - \tfrac{\mathrm{i}q}{\hbar}\,\vec{A}\right)\phi\right)\cdot\left(+\tfrac{\mathrm{i}q}{\hbar}\,\delta\vec{A}\right)\phi^* + \left(\left(\vec{\nabla} + \tfrac{\mathrm{i}q}{\hbar}\,\vec{A}\right)\phi^*\right)\cdot\left(-\tfrac{\mathrm{i}q}{\hbar}\,\delta\vec{A}\right)\phi \right) \\
&= \int \mathrm{d}\vec{x}' \left(\phi^*\left(\vec{\nabla} - \tfrac{\mathrm{i}q}{\hbar}\,\vec{A}\right)\phi - \underbrace{\phi\left(\vec{\nabla} + \tfrac{\mathrm{i}q}{\hbar}\,\vec{A}\right)\phi^*}_{=\,\text{c.c.}} \right)\tfrac{\mathrm{i}q}{\hbar}\,\delta\vec{A} \;=\; \tfrac{\mathrm{i}q}{\hbar}\int \mathrm{d}\vec{x}'\,2\mathrm{i}\,\mathfrak{Im}\big(\phi^*\,\vec{\nabla}_{\vec{A}}\,\phi\big)\,\delta\vec{A}
\end{aligned}$$

donc

$$\frac{\delta}{\delta\vec{A}(\vec{x})}\int \mathrm{d}\vec{x}'\,|\vec{\nabla}_{\vec{A}}\,\phi|^2 = -\tfrac{2q}{\hbar}\,\mathfrak{Im}\big(\phi^*\,\vec{\nabla}_{\vec{A}}\,\phi\big)$$

Finalement,

$$0 = \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \vec{A}(\vec{x})} = \tfrac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \tfrac{\hbar^2}{2m} \tfrac{2q}{\hbar} \mathfrak{Im}\big(\phi^* \vec{\nabla}_{\vec{A}}\, \phi \big) \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} \;=\; \mu_0 \tfrac{\hbar q}{m} \mathfrak{Im}\big(\phi^* \vec{\nabla}_{\vec{A}}\, \phi \big) \;=:\; \mu_0 \vec{J}_{\mathsf{s}}} \tag{6}$$

où $\vec{J}_{\mathsf{s}}$ est le *super-courant*. On peut développer son expression (mais ça ne sert à rien ici) :

$$\begin{aligned}
2\,\mathrm{i}\, \mathfrak{Im}\big(\phi^* \vec{\nabla}_{\vec{A}}\, \phi \big) &= \phi^* \Big(\vec{\nabla} - \tfrac{\mathrm{i}q}{\hbar} \vec{A} \Big) \phi - \phi \Big(\vec{\nabla} + \tfrac{\mathrm{i}q}{\hbar} \vec{A} \Big) \phi^* \\
&= \phi^* \vec{\nabla} \phi - \phi^* \phi \tfrac{\mathrm{i}q}{\hbar} \vec{A} - \phi \vec{\nabla} \phi^* - \phi \phi^* \tfrac{\mathrm{i}q}{\hbar} \vec{A} \\
\text{donc} \quad \vec{J}_{\mathsf{s}} = \tfrac{\hbar q}{m} \mathfrak{Im}\big(\phi^* \vec{\nabla}_{\vec{A}}\, \phi \big) &= \tfrac{\hbar q}{2\mathrm{i}m} \Big(\phi^* \vec{\nabla} \phi - 2\, |\phi|^2 \tfrac{\mathrm{i}q}{\hbar} \vec{A} - \phi \vec{\nabla} \phi^* \Big) \\
&= \tfrac{q^2}{m} |\phi|^2 \vec{A} + \tfrac{\mathrm{i}\,\hbar\, q}{2\,m} \big(\phi \vec{\nabla} \phi^* - \phi^* \vec{\nabla} \phi \big)
\end{aligned}$$

L'équation (6), $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_{\mathsf{s}}$, ressemble à l'équation de Maxwell-Ampère avec le super-courant $\vec{J}_{\mathsf{s}}$, qui n'est rien d'autre que le courant de Schrödinger (chargé ici, pas de probabilité) pour la fonction d'onde ϕ.

Lorsque l'on écrit ϕ sous forme polaire, $\phi(\vec{x}) = \sqrt{\rho(\vec{x})}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\vec{x})}$, le super-courant prend la forme

$$\begin{aligned}
\vec{J}_{\mathsf{s}} = \tfrac{\hbar q}{m} \mathfrak{Im}\big(\phi^* \vec{\nabla}_{\vec{A}}\, \phi \big) &= \tfrac{\hbar q}{m} \mathfrak{Im}\Big(\sqrt{\rho}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \big(\vec{\nabla} - \tfrac{\mathrm{i}q}{\hbar} \vec{A} \big) \sqrt{\rho(\vec{x})}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \Big) \\
&= \tfrac{\hbar q}{m} \mathfrak{Im}\Big(\sqrt{\rho}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \sqrt{\rho}\, \vec{\nabla} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \underbrace{\sqrt{\rho}\, \cancel{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}} \cancel{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\, \vec{\nabla} \sqrt{\rho}}_{\in \mathbb{R} \,\Rightarrow\, \text{disparait}} - \tfrac{\mathrm{i}q}{\hbar} \vec{A} \sqrt{\rho}\, \cancel{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}} \sqrt{\rho}\, \cancel{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \Big) \\
&= \tfrac{\hbar q}{m} \sqrt{\rho}^2\, \mathfrak{Im}\big(\underbrace{\cancel{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}\, \mathrm{i}\, (\vec{\nabla} \theta)\, \cancel{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} - \tfrac{\mathrm{i}q}{\hbar} \vec{A}}_{\in \mathrm{i}\mathbb{R}} \big)
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\vec{J}_{\mathsf{s}} = \tfrac{q}{m} \rho\, (\hbar \vec{\nabla} \theta - q \vec{A})} \tag{7}$$

Vérifions l'invariance de jauge de (6). Sous forme polaire, la transformation de jauge (2) s'écrit

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi\,, \quad \rho' = \rho \quad \text{et} \quad \theta' = \theta + \tfrac{q}{\hbar} \chi(\vec{x})$$

On remarque immédiatement que le super-courant sous la forme (7) est invariant de jauge :

$$\vec{J}_{\mathsf{s}}{}' = \tfrac{q}{m} \rho' \big(\hbar \vec{\nabla} \theta' - q \vec{A}' \big) = \tfrac{q}{m} \rho \big(\hbar \vec{\nabla} \theta + \hbar \tfrac{q}{\hbar} \vec{\nabla} \chi(\vec{x}) - q \vec{A} - q \vec{\nabla} \chi \big) = \tfrac{q}{m} \rho\, (\hbar \vec{\nabla} \theta - q \vec{A}) = \vec{J}_{\mathsf{s}}$$

De plus, $\vec{B}$ étant invariant de jauge, $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_{\mathsf{s}}$ est bien invariante de jauge.
On appelle ρ la *densité superfluide* (que l'on interprète comme la densité des paires de Cooper condensées dans l'état fondamental, « superfluide »).

2. Paramètre d'ordre à champ magnétique nul et transition de phase

Sans champ magnétique $\vec{B}$, on peut prendre $\vec{A} = \vec{0}$, et l'équation (6) pour le courant devient

$$0 = \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \tfrac{q}{m} \rho\, (\hbar \vec{\nabla} \theta - q \vec{A}) = \tfrac{\mu_0\, \hbar\, q}{m} \rho\, \vec{\nabla} \theta \quad \text{donc} \quad \rho \equiv 0 \text{ ou } \vec{\nabla} \theta = 0$$

On n'est pas intéressé par la solution triviale $\rho \equiv 0$, donc $\vec{\nabla} \theta = 0$ donc on θ est une constante, qu'on peut ignorer tant qu'il s'agit d'une phase globale[1]. L'équation (4) devient alors

$$-\tfrac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \phi + \tilde{\alpha}\, \phi + \beta\, |\phi|^2\, \phi = 0 \tag{8}$$

1. Les choses deviennent intéressantes lorsque l'on met deux supraconducteurs en contact : on doit alors prendre en compte les phases relatives. C'est par exemple ce qui se passe pour l'effet Josephson.

Regardons d'abord ce qui se passe pour un système homogène : $\phi \equiv \phi_0$. On a alors

$$\tilde{\alpha}\,\phi_0 + \beta\,|\phi_0|^2\,\phi_0 = 0 \quad \text{donc} \quad \phi_0 = 0 \;\; \text{ou} \;\; (T - T_c)\,\alpha + \beta\,|\phi|^2 = 0$$

Ainsi, comme d'habitude en théorie ϕ^4, on observe une transition de phase à T_c :

- si $T \geqslant T_c$, $\tilde{\alpha} > 0$ donc $\phi_0^* = 0$ (paramètre d'ordre nul), ce que l'on interprète comme représentant la phase **non supraconductice** (pas de paires de Cooper $\to$ conduction métalique normale).
- si $T < T_c$, $\tilde{\alpha} < 0$ donc on peut avoir $|\phi_0^*| = \sqrt{-\tilde{\alpha}/\beta}$, ce qui représente la phase **supraconductrice** (densité de paires de Cooper non nulle).

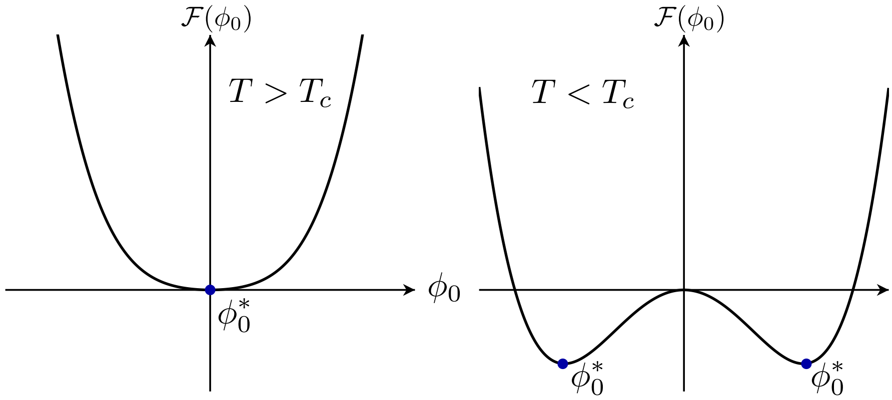
Reste à analyser la stabilité pour conclure. La fonctionnelle d'énergie libre (1) s'écrit

$$\mathcal{F}[\phi = \phi_0, \vec{A} = 0] = \int \mathrm{d}\vec{x} \left(\tilde{\alpha}\,|\phi_0|^2 + \frac{\beta}{2}\,|\phi_0|^4 \right)$$

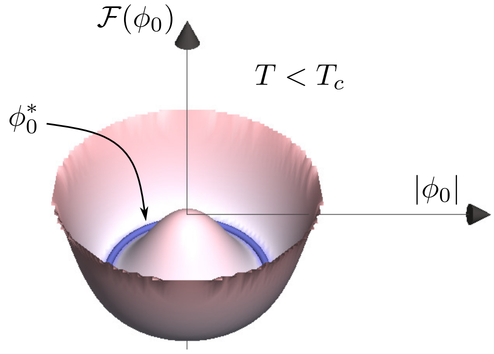
et pour $T < T_c$, elle est concave en $\phi_0 = 0$ et convexe en ϕ_0^* (en supposant $\phi_0 \in \mathbb{R}$ pour simplifier) :

$$\partial_\phi^2\big(\tilde{\alpha}\,\phi^2 + \tfrac{\beta}{2}\,\phi^4\big) = 2\,\partial_\phi(\tilde{\alpha}\,\phi + \beta\,\phi^3) \propto \tilde{\alpha} + 3\beta\,\phi^2 = \begin{cases} \tilde{\alpha} < 0 & \text{pour } \phi = 0 \\ \tilde{\alpha} - 3\,\tilde{\alpha} > 0 & \text{pour } \phi = \phi_0^* \end{cases}$$

donc c'est bien ϕ_0^* la solution.



On s'efforce de garder $\phi_0 \in \mathbb{C}$ (et de ne pas brutalement prendre $\theta = 0$) car ça a son importance. La situation semble ressembler à celle d'un paramètre d'ordre réel, où le système peut être en $\pm\phi_0^*$ pour $T < T_c$. Mais lorsque le paramètre d'ordre est réel, il y a une barrière d'énergie à franchir pour que le système change de minimum entre $+\phi_0^* \longleftrightarrow -\phi_0^*$, et la symétrie brisée serait $\mathbb{Z}^2$ ($\phi \mapsto -\phi$). Mais ici, il n'y a aucune barrière à franchir pour passer d'un minimum à un autre : il suffit de faire varier la phase θ continuement :



La symétrie brisée ici est $\mathrm{U}(1)$, qui est une *symétrie continue*, contrairement $\mathbb{Z}^2$. Ceci a conséquences importantes : la dimension critique inférieure est *plus grande* (comme dans Ising vectoriel), et il existe des modes d'excitations *sans gap* ($\to$ bosons de Goldstone). Dans la suite, on prendra définitivement $\phi \in \mathbb{R}_+$ pour simplifier.

Regardons maintenant ce qui se passe très grossièrement à l'interface vide-supraconducteur à $T < T_c$. On décrète que l'on a un supra pour $x > 0$ et du vide pour $x < 0$, et que $\phi \equiv 0$ dans le vide. On suppose que ϕ est homogène suivant les autres directions. Notons que la condition $\phi(x = 0^-) = 0$ n'est pas réaliste, et que de toute façon on n'a pas inclus les termes de bord dans $\mathcal{F}$. On cherche juste à faire apparaite ξ.

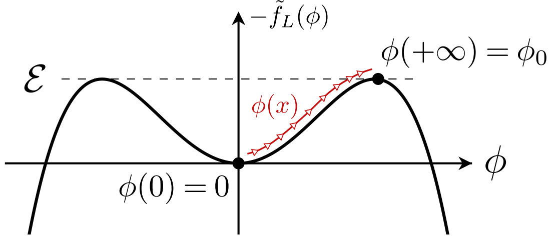
Posons $g:=\frac{\hbar^2}{2m}$. L'équation (8) s'écrit

$$-g\,\partial^2\phi+\frac{\partial\tilde f_L}{\partial\phi}(\phi)=0 \quad\text{avec}\quad \tilde f_L(\phi)=\frac{\tilde\alpha}{2}\,\phi^2+\frac{\beta}{4}\,\phi^4 \quad\text{et}\quad \begin{cases}\phi(0)=0 & \text{(vide)}\\ \phi(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}\phi_0 & \text{(bulk)}\end{cases}$$

et a pour intégrale première[2] :

$$\tfrac{g}{2}\,(\partial\phi)^2-\tilde f_L(\phi)=\mathcal{E}$$

La condition de bulk impose $\mathcal{E}=\frac{g}{2}\big(\underbrace{\partial\phi(+\infty)}_{=0}\big)^2-\tilde f_L\big(\phi(+\infty)\big)=-\tilde f_L(\phi_0)$:



On a alors[3]

$$\tfrac{g}{2}\,(\partial\phi)^2\;=\;\tilde f_L(\phi)-\tilde f_L(\phi_0)\;=\;\tfrac{\beta}{4}\big(\phi^2-\phi_0^2\big)^2 \quad\text{donc}\quad \underbrace{\partial\phi(x)}_{>0}\;=\;\sqrt{\tfrac{\beta}{2\,g}}\,\big(\underbrace{\phi_0^2-\phi^2(x)}_{>0}\big)$$

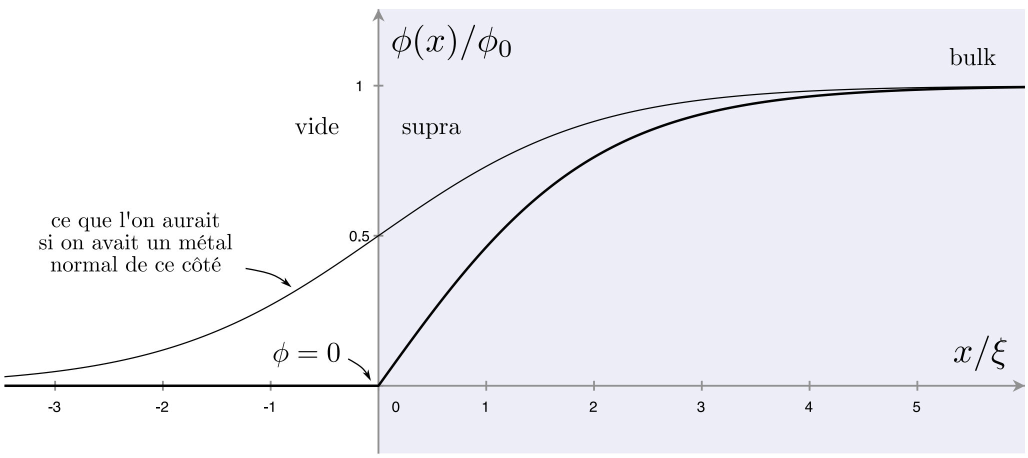
qui s'intègre par séparation de variables[4] :

$$\sqrt{\tfrac{\beta}{2\,g}}\,\mathrm{d}x\;=\;\frac{\mathrm{d}\phi}{\phi_0^2-\phi^2}\quad\Longrightarrow\quad\sqrt{\tfrac{\beta}{2\,g}}\,x\;=\;\frac{1}{\phi_0}\int_0^{\frac{\phi(x)}{\phi_0}}\frac{\mathrm{d}y}{1-y^2}\;=\;\tfrac{1}{\phi_0}\,\mathrm{arctanh}\Big(\tfrac{\phi(x)}{\phi_0}\Big)$$

d'où $\frac{\phi(x)}{\phi_0}=\tanh\Big(\phi_0\sqrt{\tfrac{\beta}{2\,g}}\,x\Big)$. En utilisant $\phi_0=\sqrt{-\tilde a/\beta}$ dans $\frac{1}{2\,\xi}:=\phi_0\sqrt{\frac{\beta}{2\,g}}$, on a alors

$$\boxed{\phi(x)=\sqrt{\rho_0}\,\tanh\big(x/2\xi\big)}\quad\text{avec}\quad\boxed{\xi^2=\frac{g}{-2\,\tilde\alpha}=\frac{\hbar^2}{4ma(T_c-T)}}$$

ξ est la longueur de corrélation, ici appellée *longueur de cohérence*. Elle diverge à $T\to T_c$. Microscopiquement, c'est en gros l'extension spatiale des paires de Cooper. Si l'on avait un métal non supraconducteur en $x<0$, la phase supraconductrice pénètrerait dans le métal sur une longueur ξ (et la condition limite $\phi(0)=0$ n'est certainement plus bonne). C'est l'*effet de proximité*.



2. On vérifie que $0=\partial_x\big({}^g/_2\,(\partial_x\phi)^2-\tilde f_L(\phi)\big)={}^g/_2\,2\,(\partial_x^2\phi)\,(\partial_x\phi)-(\partial_x\phi)\,\partial_\phi\tilde f_L(\phi)=(\partial_x\phi)\,\big(g\,\partial_x^2\phi-\partial_\phi\tilde f_L(\phi)\big)$.

3. Astuce pour trouver $\tilde f_L(\phi)-\tilde f_L(\phi_0)$ rapidement : c'est un polynôme s'annulant en $\pm\phi_0$, et même de dérivée nulle en $\pm\phi_0$; il a donc $\pm\phi_0$ comme racines doubles, et ce sont les seules puisque $\tilde f_L(\phi)$ est un polynôme de degré 4. Finalement, $\tilde f_L(\phi)-\tilde f_L(\phi_0)\propto(\phi-\phi_0)^2\,(\phi+\phi_0)^2=\big(\phi^2-\phi_0^2\big)^2$. Pour avoir le coefficient ${}^d/_4$, il suffit de regarder le terme en ϕ^4 de $\tilde f_L(\phi)$.

4. $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}=\sqrt{\frac{\beta}{4g}}\,(\phi_0^2-\phi^2)\quad\Longrightarrow\quad\sqrt{\frac{\beta}{4g}}\underbrace{\int_{x'=0}^{x}\mathrm{d}x'}_{=x}=\int_{\phi(0)=0}^{\phi(x)}\frac{\mathrm{d}\phi}{\phi_0^2-\phi^2}\underset{\phi=\phi_0 y}{=}\int_0^{\phi(x)/\phi_0}\frac{\mathrm{d}y}{1-y^2}\,\frac{\phi_0}{\phi_0^2}=\frac{1}{\phi_0}\big[\mathrm{arctanh}\big]_0^{\frac{\phi(x)}{\phi_0}}$

3. Effet Meissner

Pour étudier le champ magnétique et le courant, on va supposer que la densité ρ est homogène dans tout le supraconducteur.

Partons de $\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\,\vec{J}_\mathsf{s}$ et prenons le rotationnel, en se souvenant que $\vec{J}_\mathsf{s}=\frac{q\,\rho}{m}\,(\hbar\,\vec{\nabla}\theta-q\,\vec{A})$:

$$\begin{array}{ccc} \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{B} & = & \mu_0\,\vec{\nabla}\times\vec{J}_\mathsf{s} \\ \| & & \| \\ \vec{\nabla}(\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{B}}_{=0})-\nabla^2\vec{B} & & \frac{\mu_0\,q\,\rho}{m}\,(\hbar\,\underbrace{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\times\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\theta}_{=0}-q\,\vec{\nabla}\times\vec{A}) \;=\; -\frac{\mu_0\,q^2\,\rho}{m}\,\vec{B} \end{array}$$

donc

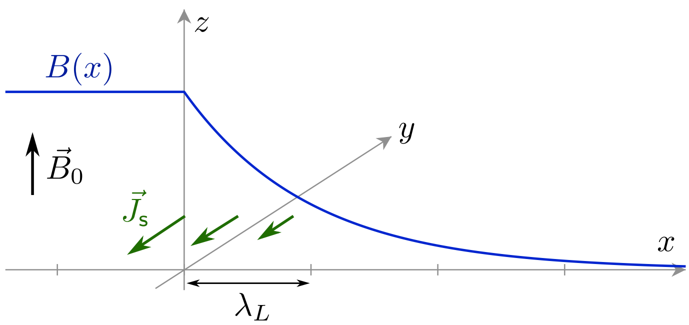
$$\boxed{\left(-\nabla^2+\lambda_L^{-2}\right)\vec{B}=0} \quad \text{avec} \quad \boxed{\lambda_L^2=\frac{m}{\mu_0\,q^2\,\rho}}$$

C'est l'*équation de London*, qui permet de déterminer entièrement le champ magnétique à l'intérieur du supraconducteur. On voit que la phase θ ne rentre pas en compte ici, et le théorie de London (antérieure à la théorie de Ginzburg-Landau) supposait un simple courant $\vec{J}\propto\vec{A}$. La longueur λ_L qui apparait est la *longueur de London*.

Si l'on suppose que $\lambda_L\gg\xi$ (on est dans le cas des supraconducteur de type II), l'hypothèse d'homogénéité de $\rho(\vec{x})$ est raisonnable. Pour $\lambda_L\lesssim\xi$, c'est moins clair.

Si l'on prend un supraconducteur en $x>0$ et un champ magnétique homogène B_0 sur la surface du supraconducteur, on a l'équation 1D

$$\left(-\partial_x^2+\lambda_L^{-2}\right)\vec{B}(x)=0 \quad \text{de solution} \quad \boxed{\vec{B}(x)=\vec{B}_0\,\mathrm{e}^{-x/\lambda_L}}$$



Le courant est alors $\vec{J}_\mathsf{s}=\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{B}=-\frac{\vec{u}_x\times\vec{B}_0}{\mu_0\,\lambda_L}\,\mathrm{e}^{-x/\lambda_L}$. Le supraconducteur réagit au champ magnétique en créant un courant de bord, et donc une aimantation $\vec{M}$, annulant / écrantant exactement le champ magnétique en bulk : le champ magnétique est « expulsé » du supraconducteur, c'est l'*effet Meissner*. Pour cette raison, on appelle aussi λ_L la *longueur de pénétration* magnétique.

La susceptibilité magnétique étant définie par $\vec{H}=\chi_\mathrm{m}\,\vec{M}$ et puisque $\vec{B}=\mu_0\,(\vec{H}+\vec{M})=\vec{0}$, on a

$$\boxed{\chi_\mathrm{m}=-1 \quad\to\quad \text{diamagnétique parfait}}$$

En supposant que $\rho=\rho_0=-\tilde{a}\,/\,\beta$ (densité à champ nul), on a

$$\lambda_L^2=\frac{m\,\beta}{\mu_0\,q^2\,a\,(T_c-T)} \quad \text{donc} \quad \lambda_L\propto(T_c-T)^{-1/2}$$

Comme on a aussi $\xi\propto(T_c-T)^{-1/2}$, le rapport

$$\kappa:=\lambda_L\,/\,\xi=\frac{4\,m^2\,\beta}{\hbar^2\,q^2\,\mu_0} \quad \text{est indépendant de } T$$

C'est un paramètre important, différentiant les supraconducteurs de type I et de type II.

L'approximation $\rho = \rho_0$ semble raisonnable lorsque le champ magnétique est faible ($\xi^2\, q\, B \ll \hbar$)[5]. Avec $\xi = 100\,\mathrm{nm}$ (typiquement supra type `II` borderline type `I`) ça donne $B \ll 0.1\,\mathrm{T}$.

4. Quantification du flux et détermination de q

5. Puisque l'on a utilisé l'équation (4) en champ nul pour déterminer ρ_0, c'est justifiable si le premier terme $\frac{1}{2m}(\mathrm{i}\hbar\vec{\nabla} + q\vec{A})^2\,\phi$ de l'équation (4) est petit devant le reste, en particulier $\tilde{\alpha}\,\phi$:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\,|\nabla^2\phi| \ll \tilde{\alpha}\,|\phi| \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\hbar^2}{2m}\sqrt{\rho}\,\nabla^2\theta \ll \tilde{\alpha}\,\sqrt{\rho} \quad \Longleftrightarrow \quad \xi^2\,\nabla^2\theta \ll 1$$

ce qui est le cas ici si $\xi^2\, q\, B \ll \hbar$ car (en utilisant $\vec{J}_{\mathsf{s}} = q\rho/m\,(\hbar\,\vec{\nabla}\theta - q\,\vec{A})$ et $\vec{J}_{\mathsf{s}}^{\,\mathsf{London}}$)

$$\frac{q\,\hbar\,\rho}{m}\,\nabla^2\theta = \vec{\nabla}\cdot\vec{J}_{\mathsf{s}} \approx \frac{B}{\mu_0\,\lambda_L^2} \quad \Longrightarrow \quad \xi^2\,\nabla^2\theta \approx \frac{B\,m}{\mu_0\,\lambda_L^2\,q\,\hbar\,\rho} = \frac{q\,B}{\hbar}$$

De plus, si l'on définit une taille typique L (qu'il est raisonnable de prendre $> \xi$),

$$\frac{1}{2m}(q\,A)^2 \ll \tilde{\alpha} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\xi^2}{\hbar^2}\,(q\,B\,L)^2 \ll 1 \quad \Longleftrightarrow \quad B \ll \frac{\hbar}{\xi\,q\,L} < \frac{\hbar}{\xi^2\,q}$$