

Rapport du TP fluctuations fondamentales

Melvin Creff, Félix Faisant (Groupe A05)

8 juin 2018

1 Introduction

1.1 Bruit et densité spectrale de puissance

Le but de ce projet expérimental est d'étudier les bruits électroniques et de les relier à des grandeurs fondamentales. L'outil principal d'étude des bruits est la *densité spectrale de puissance*, $S(f)$, grandeur spécifiant la puissance du bruit à une fréquence donnée f .

Formellement, la **densité spectrale de puissance** d'un signal stochastique $x(t)$ est définie comme moyenne d'ensemble du carré de la transformée de Fourier du signal :

$$S_{xx}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left\langle \left| \int_0^T x(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2 \right\rangle_{\text{ens}} \quad (1)$$

On utilise une transformée de Fourier tronquée pour pouvoir traiter des signaux qui ne sont pas de carré sommable. Son unité est le $[x]^2/\text{Hz}$.

Toutefois, la moyenne d'ensemble n'est évidemment pas accessible expérimentalement. Pour déterminer S_{xx} expérimentalement, on effectue périodiquement des transformées de Fourier discrètes du signal $x(t)$ sur une durée T , les *périodogrammes*. Puis on effectue une moyenne de périodogrammes :

$$S_{xx}^{(N)}(\omega) = \frac{1}{N} \sum_n^N \text{DSP}[x[t_n : t_{n+1}]] \quad (2)$$

C'est alors l'**hypothèse ergodique**, qui relie moyenne temporelle et moyenne d'ensemble, qui nous permet d'affirmer que $S_{xx}^{(N)}(\omega) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} S_{xx}(\omega)$.

Ici, "DSP" représente la DFT au carré, multipliée d'un facteur 2 prenant en compte le fait que $\omega > 0$, et d'un facteur pour en faire une *densité spectrale*, fonction de T et du nombre de points par DFT.

1.2 Bruits électroniques

Nous étudierons ici trois types de bruits électroniques (c.f. rapport bibliographique pour plus de détails) :

- le **bruit thermique**, ou bruit de Johnson-Nyquist, qui est la fluctuation de la tension V au borne d'une résistance R due à l'agitation thermique des électrons (ou dit autrement, à la fluctuation thermique des facteurs d'occupation du gaz d'électrons) à la température T :

$$S_V(\omega) = 4k_B T R \quad (3)$$

C'est un spectre plat en fréquence (*bruit blanc*) avec une dépendance linéaire en T et en R . On en déduira k_B .

- le **bruit de grenaille**, qui est la fluctuation du courant I passant à travers certains dipôles, due à la nature discrète des porteurs de charge du courant électrique. La formule de Schottky donne :

$$S_I(\omega) = 2e\langle I \rangle \quad (4)$$

C'est un bruit blanc, linéaire en l'intensité I . On en déduira la charge élémentaire e .

- le bruit $1/f$, d'origines diverses, qui viendra polluer $S_I(\omega)$ dans les semi-conducteurs, et de la forme $S_I(f) \propto \langle I \rangle^2 / f^\alpha$ avec, en général, $0.8 < \alpha < 1.3$.

2 Bruit thermique

On va ici étudier le bruit thermique aux bornes de résistances, et sa dépendance en R et T , ainsi que mesurer k_B à partir des spectres obtenus.

2.1 Montage

On mesure la tension V au bornes d'une résistance (dont on mesure la température), à courant nul, grâce à un amplificateur à faible bruit et à une carte d'acquisition numérique (fig. 1).

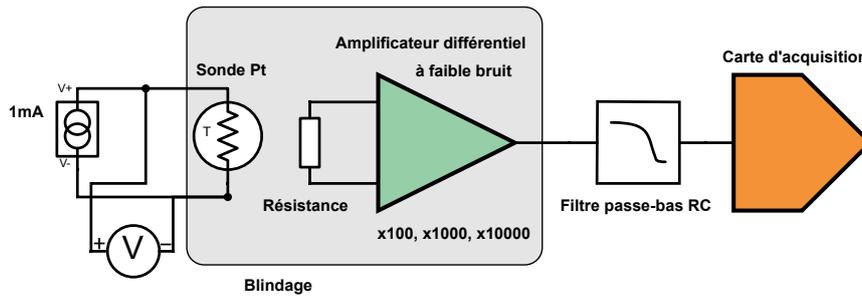


FIGURE 1 – Schéma du système de mesure du bruit thermique. À gauche, résistance, amplificateur pour que le bruit atteigne un niveau suffisant pour la carte d'acquisition, et filtre RC passe-bas pour éliminer les fréquences trop hautes. À droite, une sonde au platine (couplée à la résistance) et sa source de courant pour la mesure de la température.

La fréquence d'échantillonnage maximale de la carte d'acquisition étant de 200kHz, il y a repliement de spectre pour les composantes de fréquences supérieures à 100kHz d'après le critère de Shannon (il faut au moins 2 points par période pour que l'échantillonnage d'un signal périodique reproduise une fréquence correcte). On utilise un filtre RC pour couper suffisamment les fréquences supérieures à 100kHz. C'est un filtre d'ordre 1, on en utilise donc un de fréquence de coupure autour de 50Khz pour ainsi avoir un gain de -6dB à 100kHz.

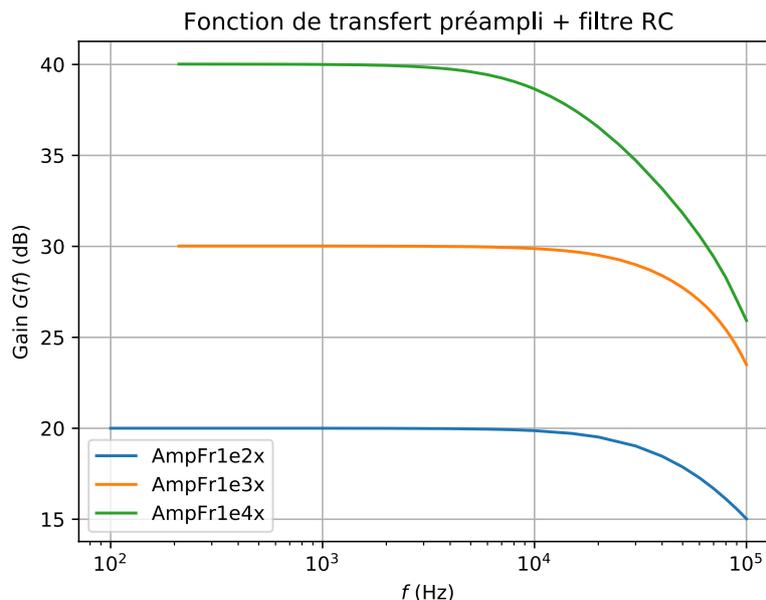


FIGURE 2 – Fonctions de transfert du système ampli. + filtre, obtenues par détection synchrone (*lock-in amplifier*). Le gain correspond bien à une amplification avec filtrage passe bas, de fréquences de coupure de ~ 60 kHz, 60kHz et 18kHz respectivement pour les gains 100x, 1000x et 10000x.

Pour connaître la tension absolue aux bornes de la résistance, il est nécessaire de déterminer la fonction de transfert du système amplificateur + filtre, pour les différents gains de l'amplificateur (fig. 2). Les spectres bruts sont alors corrigés par cette fonction de transfert (fig. 3.a). On remarque toutefois que cette correction ne permet pas d'obtenir un spectre plat jusqu'à 100kHz. Une des raisons est que la résistance et les capacités/inductances parasites des fils et des appareils forment des filtres passe-bas parasites, réduisant ainsi la bande passante, d'autant plus que la résistance est grande (voir fig. 4). C'est pourquoi nous n'exploiterons par les spectres au delà de 10kHz.

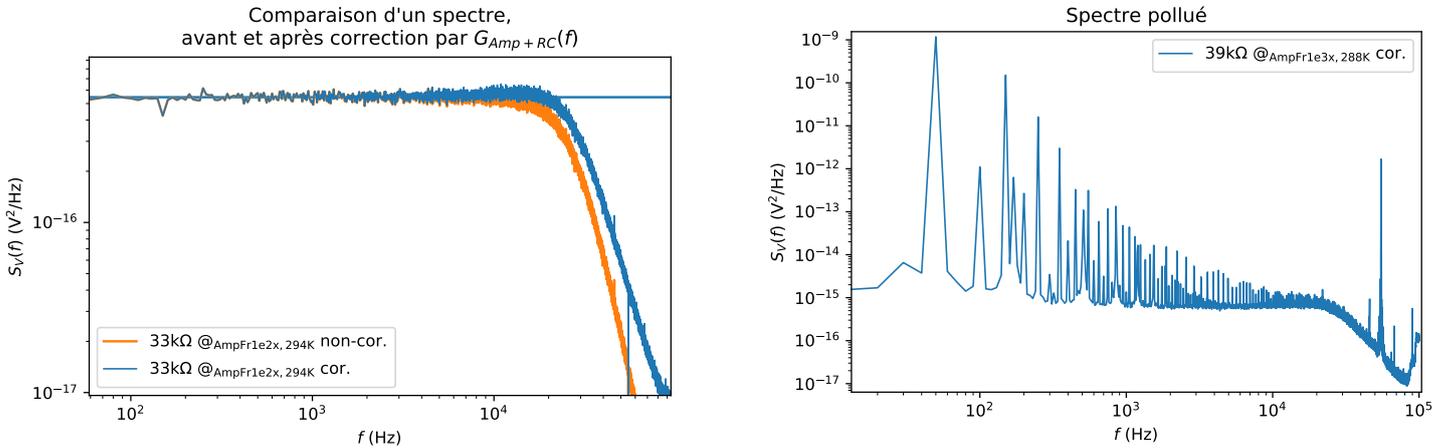


FIGURE 3 – À gauche, comparaison d'un spectre avant et après correction par la fonction de transfert du système. La ligne horizontale est la moyenne de $S_V(f)$ entre 300Hz et 10kHz, là où le spectre est plat. À droite, exemple d'un spectre pollué par le secteur (sinusoïde de 50Hz très écriêtée) et par un pic à 55kHz, à cause de la sonde Pt (très proche de la résistance) non reliée à la masse.

Le second problème lié à l'acquisition est dû à la discrétisation du signal. Il faut faire en sorte que le signal ait la plus grande amplitude possible (on ne peut donc pas utiliser de résistances en dessous de 1 kΩ, et que le plus petit calibre de la carte possible est utilisé, tout en évitant la saturation. La discrétisation temporelle du signal et l'utilisation d'une DFT rend l'acquisition sensible aux effets de bords lorsque peu de points sont utilisés pour chaque TF (fenêtrage). On utilise donc un nombre important de points (20000/TF) pour ne pas avoir à s'en soucier.

Le bruit étant de faible intensité, il peut facilement être pollué par des signaux parasites (typiquement ordinateurs et réseau électrique, fig. 3.b). Ainsi, pour diminuer ces parasites les composants sont blindés et on utilise le plus possible des câbles coaxiaux courts, en évitant les boucles, pour réduire les surfaces faisant office d'antenne. De plus, il faut aussi s'occuper des masses des différents composants, le plus simple restant de toutes les relier à l'amplificateur lorsque cela est possible.

Enfin, pour les grandes résistances (à partir de 100 kΩ), le bruit en courant de l'entrée l'amplificateur est transformé en bruit en tension par la résistance, qui n'est plus négligeable face au bruit thermique.

2.2 Dépendance en R

On acquiert des spectres pour différentes résistances à température ambiante (de 100 Ω à 100 kΩ, voir fig. 4) et on trace la relation $S_V(R)$, qui vaut théoriquement $S_V(R) = 4k_B T R$, soit $k_B = S_V(R)/4TR$. En effectuant une régression linéaire de cette relation, on obtient $k_B = (1.42 \pm 0.08) \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ (fig. 4).

Les incertitudes sur k_B proviennent :

- du caractère bruité de S_V car $T \neq \infty$ ($1\sigma_{\text{stat}}$ à 68%)
- du gain du système ($\pm 1\%$ sur S_V pour les gains 100x et 1000x, et $\pm 3\%$ pour le gain 10000x)
- de la valeur de la résistance ($\pm 5\%$)
- de l'incertitude sur la température de la résistance ($(294 \pm 2) \text{ K} \rightarrow \pm 1\%$ sur k_B)

Densité spectrale de puissance du bruit des résistances,
après correction par $G_{Amp+RC}(f)$

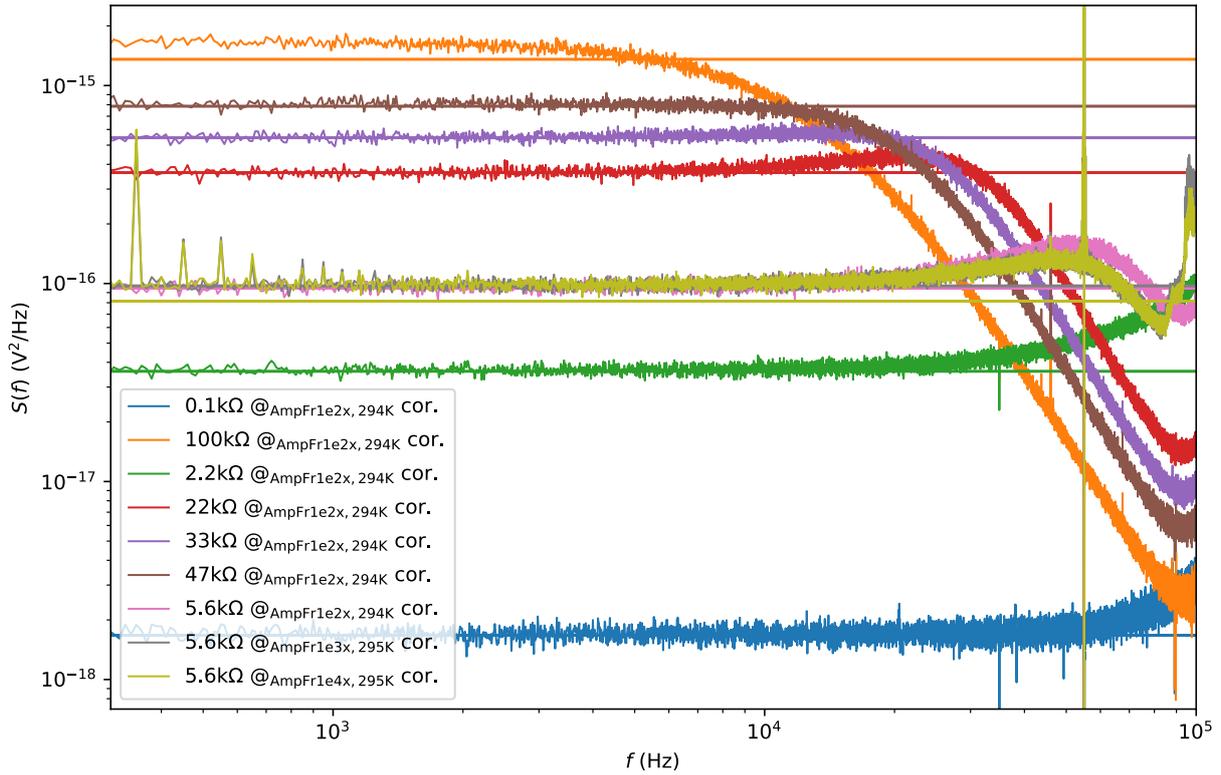


FIGURE 4 – Spectres de différentes résistances à température ambiante. Les lignes horizontales correspondent à la moyenne entre 300Hz et 9kHz, et on calcule l’incertitude sur cette valeur en calculant l’écart-type à la moyenne (1σ). On voit que cette limite de 9kHz n’est pas adaptée pour 100k Ω . On remarque que la mesure est plus sensible aux parasites lorsque le gain de l’amplificateur est 10000x. C’est pour la résistance de 33k Ω que le spectre est le plus satisfaisant, expliquant notre choix pour 39k Ω dans la suite du TP.

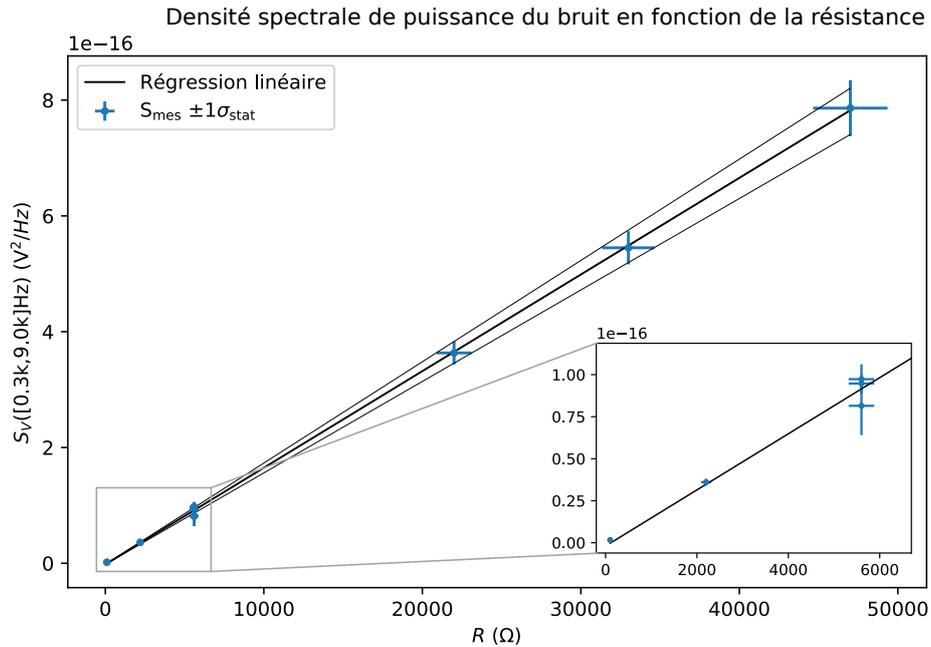


FIGURE 5 – Dépendance linéaire de S_V avec la résistance. On obtient l’incertitude sur la pente en traçant les pentes minimales et maximales. On a alors $S_V(R) = -1.94 \cdot 10^{-18} + (1.67 \pm 0.09) \cdot 10^{-20} \cdot R$ avec les unités de la figure.

2.3 Dépendance en T

Pour la suite on n'utilisera plus qu'une même résistance de $39\text{ k}\Omega$ couplée à une sonde Pt étalonnée pour mesurer la température. On estime l'erreur sur T à $\pm 3\text{ K}$ en comparant l'étalonnage à T_{amb} et à T_{LiqN} . On fait varier la température de deux manières différentes : avec un module Peltier (de -8°C à 130°C) et par immersion dans de l'azote liquide (de 77K à 290K).

Étant donné que S_V dépend de résistance, il faut prendre en compte la variation de résistance avec la température. On effectue donc la mesure de la résistance elle-même en utilisant le même protocole (fig 6). On remarque que celle-ci diminue d'environ $3\text{ k}\Omega$ entre T_{amb} et T_{LiqN} , soit près de 10%.

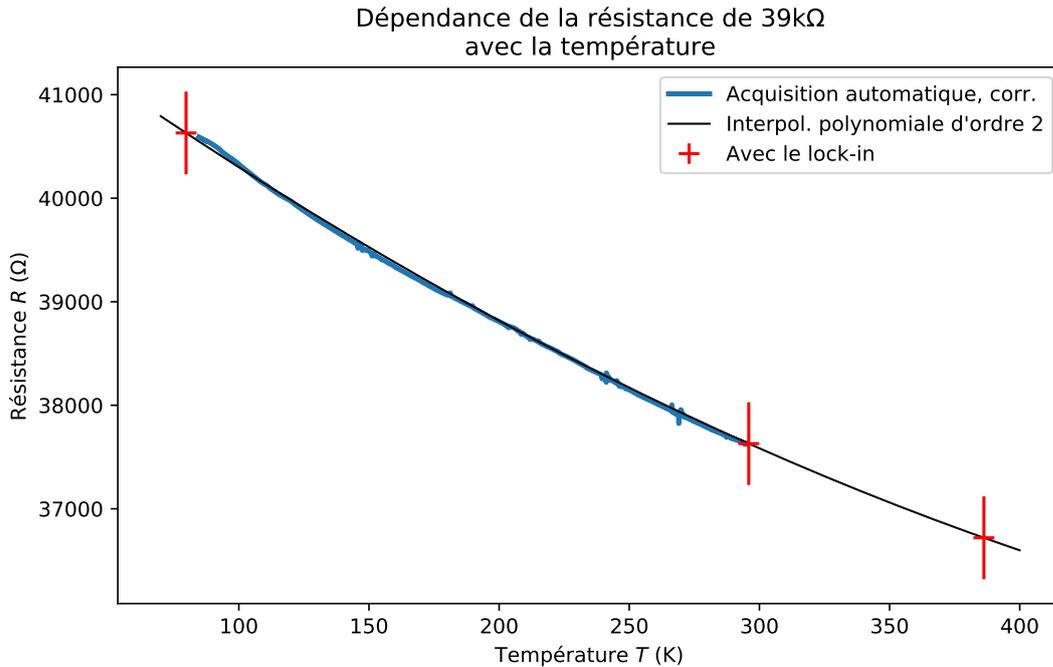


FIGURE 6 – Résistance en fonction de la température. 3 points ont été mesurés avec le lock-in, à T_{LiqN} , T_{amb} , et à 386K . Le lock-in est un appareil précis, mais la résistance de $10\text{ M}\Omega$ utilisée en pont diviseur n'a pas été mesurée, on prend donc sa tolérance de $\pm 1\%$. Les résultats de l'acquisition automatique ont été multipliés d'un facteur pour coïncider avec ceux du lock-in. Régression polynomiale d'ordre 2 sur l'acquisition automatique et le lock-in : $R_{39\text{k}}(T) = 42029 - 18.542 \cdot T + 0.0124 \cdot T^2$

Lors de variations de température, il est nécessaire de vérifier la bonne thermalisation du système, notamment que la température de la sonde Pt et de la résistance coïncident. Ainsi, on a collé la résistance à la sonde avec de la pâte thermique et entouré le tout d'aluminium (ce qui permet aussi d'effectuer un blindage). De plus, pour éviter un réchauffement trop rapide après évaporation de l'azote liquide, la sonde et la résistance sont plongées dans un bac en polystyrène rempli de billes en verre pour augmenter la capacité thermique de l'environnement. Enfin, à ces températures, on peut négliger le temps de thermalisation des électrons et la différence de température entre les électrons et les phonons.

2.3.1 Mesure avec l'azote liquide

Pour la mesure avec l'azote liquide, il a été choisi de faire l'acquisition d'un grand nombre de spectres : environ 1 spectre/s, avec chaque spectre étant une moyenne de 10 TFs, donnant près de 8000 points expérimentaux (fig. 7). En procédant ainsi, on peut appliquer un post-traitement plus fin et réduire l'erreur due à la variation de température pour chaque spectre. En effet, cette variation atteint $0.5\%/s$ au maximum (0.5K/s @ 100K) et $0.02\%/s$ en moyenne (fig. 7.b), ce qui est négligeable.

Données expérimentales brutes

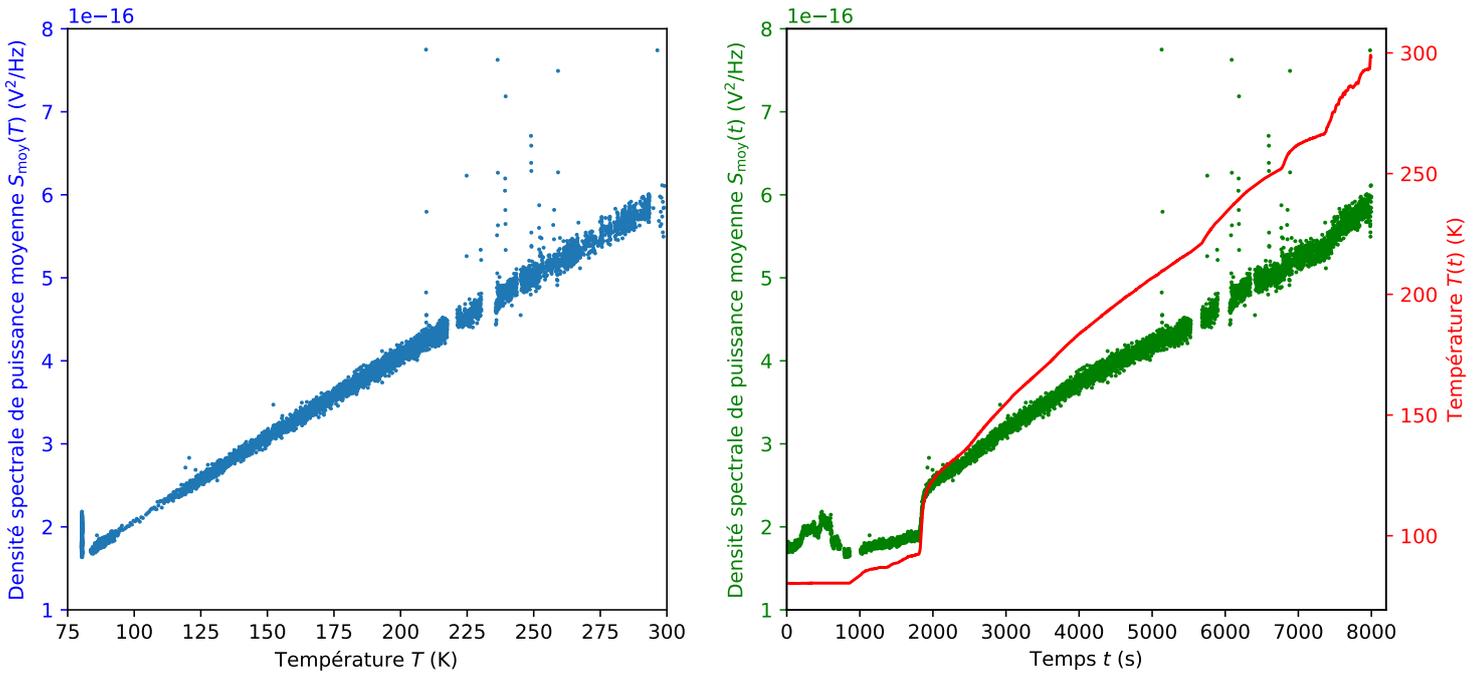


FIGURE 7 – À droite, données brutes de l’acquisition en fonction du temps écoulé. Les 1000 premières secondes sont éliminées, ainsi que plusieurs intervalles où les données sont mauvaises (typiquement problèmes de masse intermittents ou faux contacts). On remarque le palier à la température d’ébullition de l’azote, et le moment (vers 2000s) où l’azote liquide s’est entièrement évaporé. À gauche, S_V en fonction de la température.

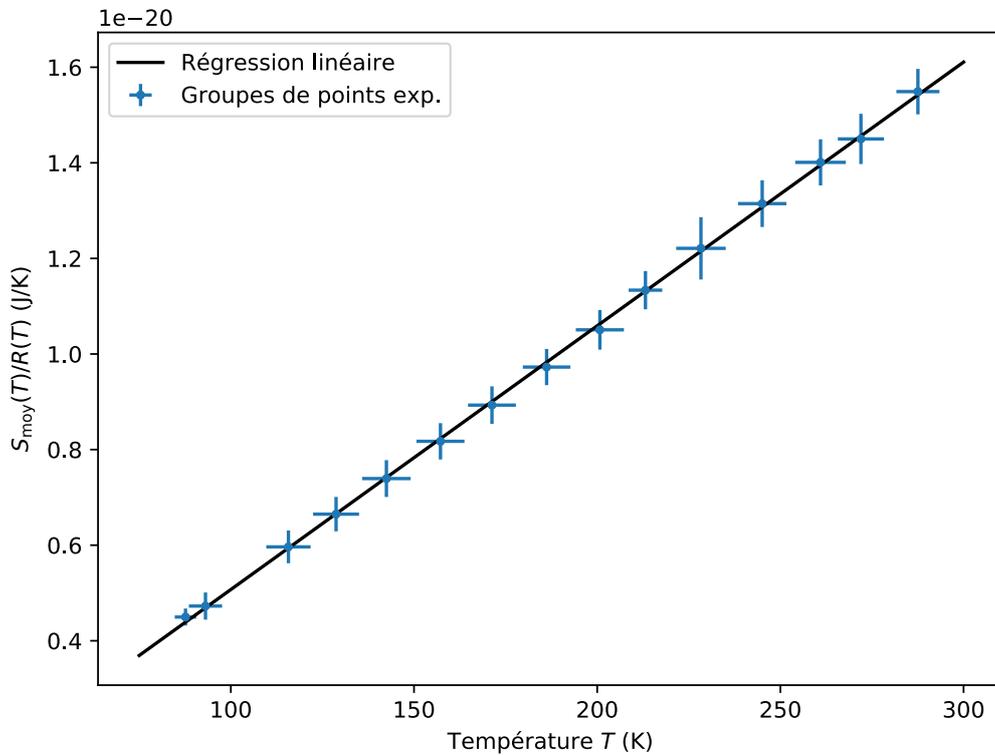


FIGURE 8 – Relation S_V/R en fonction de la température, après regroupement en 15 groupes de température des points bruts (7.a). Les barres d’erreur sur T et S_V/R correspondent aux 5^è et 95^è centile dans chaque groupe. La régression linéaire donne (avec pentes min/max) : $S_V(T)/R(T) = -4.4593 \cdot 10^{-22} + (5.52 \pm 0.06) \cdot 10^{-23} \cdot T$ avec les unités de la figure.

Après division $S_V/R(T)$, on traite les données de deux manières différentes. Pour vérifier le comportement linéaire en T , on effectue un regroupement des points puis une régression linéaire (fig. 8). On obtient alors, après prise en compte de l'incertitude sur R et T , $k_B = (1.38 \pm 0.07) \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ à 95%.

Mais, avec cette méthode, l'incertitude sur S_V/R est dépendante du nombre de TFs par point (ici 10, donc les points sont très bruités), ce qui ne devrait pas être le cas, car c'est plutôt le nombre de TFs total par intervalle de température qui devrait fixer l'incertitude. Pour réduire l'incertitude, on calcule k_B pour chaque fréquence de chaque spectre, et on distribue ces valeurs dans un histogramme (fig. 9), ce qui permet de voir directement la distribution des valeurs, et donc de calculer l'incertitude statistique de S_V/R à 95%, qui se trouve désormais négligeable face aux autres incertitudes (1% sur T en moyenne, 1% sur R). Finalement, $k_B = (1.38 \pm 0.02) \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ à 95%.

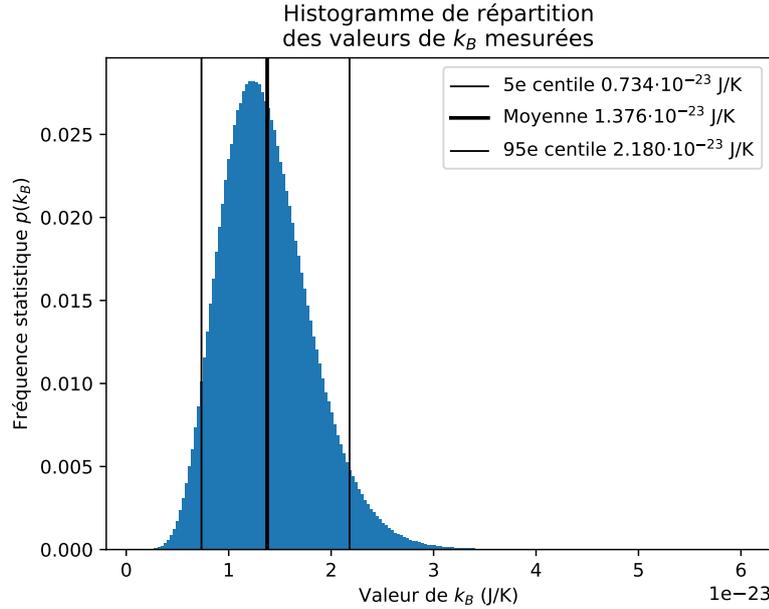


FIGURE 9 – Histogramme de $N = 3419226$ valeurs de k_B brutes distribués. L'incertitude sur la moyenne est celle de 1 point, divisée par \sqrt{N} : $\Delta_{\text{stat}} k_B = \frac{(2.18 - 0.73) \cdot 10^{-23}}{2\sqrt{N}} = 4 \cdot 10^{-27} \text{ J/K}$ à 95%.

2.3.2 Mesure avec le module Peltier

Pour cette mesure, comme la température est contrôlée par le module Peltier, on peut faire l'acquisition d'un seul spectre sur une longue durée (moyenne de 250 TFs). La face chaude du module Peltier est fixée sur un dissipateur muni d'un ventilateur pour maximiser sa performance. Malgré la grande inertie thermique du dissipateur, la thermalisation est bonne et on gardera une incertitude de 3K sur la température. On trace simplement S_V/R en fonction de la température, et on effectue une régression linéaire (fig. 10). On obtient finalement $k_B = (1.38 \pm 0.06) \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$.

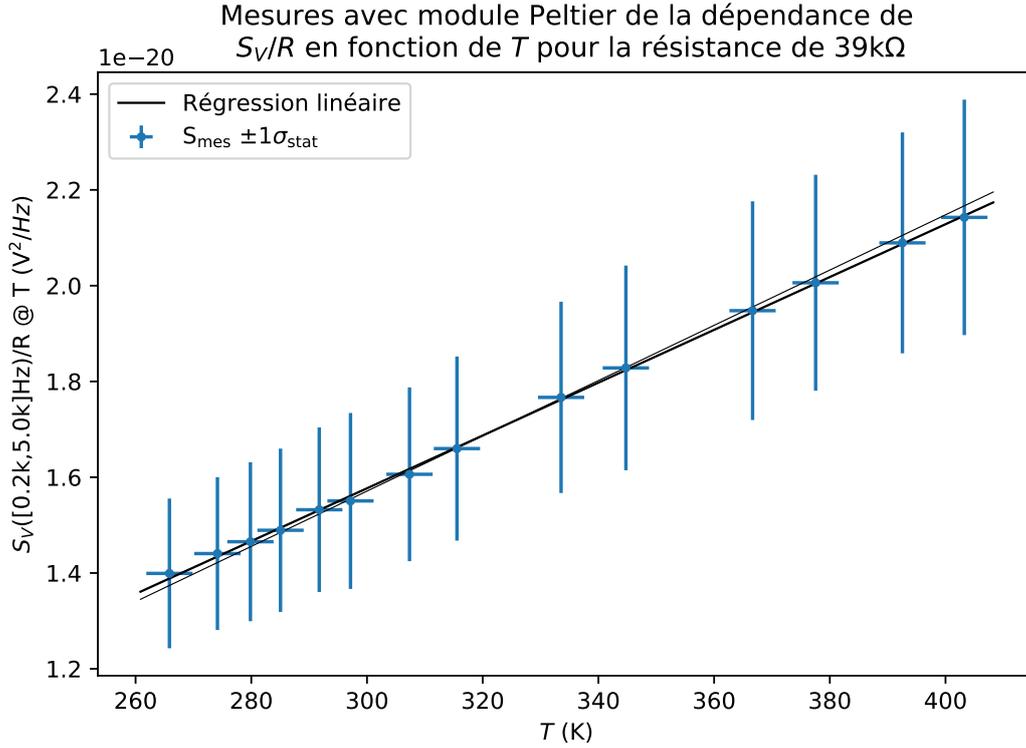


FIGURE 10 – Mesures de S_V/R à différentes températures avec le module Peltier. L'incertitude sur T est de $\pm 3K$. La régression linéaire donne : $S_V(T)/R(T) = -7.74 \cdot 10^{-22} + (5.5 \pm 0.2) \cdot 10^{-23} \cdot T$ avec les unités de la figure.

3 Bruit de grenaille

3.1 Montage

On utilise le circuit (Fig. 11) pour mesurer le bruit de grenaille S_{I_b} dans une jonction PN de semi-conducteur, pour laquelle le bruit thermique est négligeable face au bruit de grenaille.

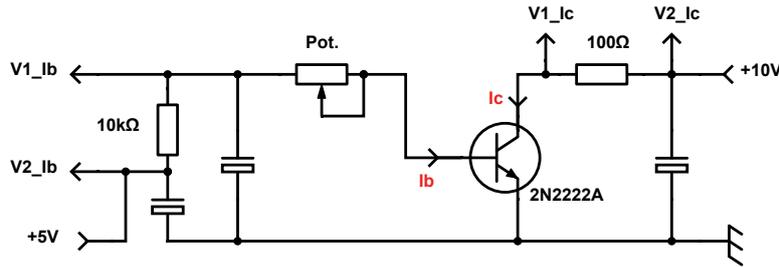


FIGURE 11 – Schéma du montage pour la mesure du shot noise. On impose avec le potentiomètre un courant de base $\langle I_b \rangle$ (grâce à la mesure de la tension aux bornes de la résistance de $10k\Omega$), qui va fluctuer (S_{I_b}) dans la jonction base-émetteur du transistor. On mesure ces fluctuations amplifiées (S_{I_c}) sur le collecteur, grâce à la mesure de la tension aux bornes de la résistance de 100Ω .

Lorsqu'on impose $\langle I_b \rangle$, la formule de Schottky donne $S_{I_b}(\omega) = \langle I_b^2 \rangle = 2e\langle I_b \rangle$. En prenant en compte le gain β du transistor ($I_c = \beta I_b$, et plus généralement $I_c = \alpha + \beta I_b$), on montre avec (1) que :

$$S_{I_c}(\omega) = 2e\beta^2\langle I_b \rangle \quad (5)$$

Avant de s'intéresser au bruit produit par le transistor, il est nécessaire de le caractériser par la relation $I_c(I_b)$, et en particulier de connaître son gain β . Pour cela on fixe et on mesure le courant de base I_b et on à le compare au courant collecteur I_c (voir figure 11). On obtient le gain $\beta = 303 \pm 2$ (fig 12).

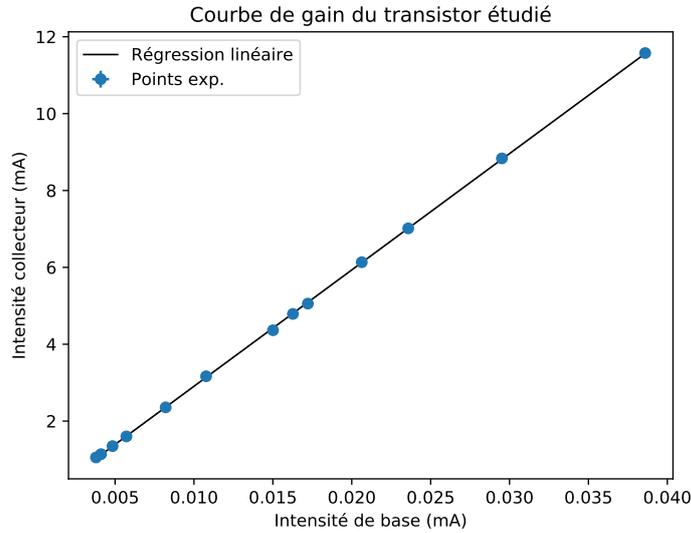


FIGURE 12 – Relation $I_c(I_b)$ du transistor, clairement linéaire. La régression linéaire donne : $I_c = -0.121 + (302.7 \pm_{2\sigma} 1.5) \cdot I_b$. Note : les barres d'erreur (provenant de l'erreur de lecture des tensions, de l'ordre de 0.1% pour I_c et 0.05% pour I_b) ne sont pas visibles. L'erreur dominante est statistique, c'est pourquoi on utilise la déviation à 2σ .

3.2 Dépendance en I

On mesure simultanément S_{I_c} avec le système d'acquisition, et le courant de base imposé $\langle I_b \rangle$ avec un voltmètre. On fait attention à la présence de différentes masses dans le circuit, à ne pas court-circuiter.

Les spectres alors obtenus (fig. 13.a) ont, de 0Hz à 1kHz, une pente typique du bruit $1/f$, suivit d'un plateau, et enfin l'atténuation dû au filtre. Avant de traiter les données plus en détail, on calcule $\frac{S_{I_c}}{2\beta^2 I_b}$, qui devrait correspondre grossièrement à e sur le plateau, ce qui n'est pas du tout le cas. Nous avons donc arrêté l'analyse ici, sans avoir trouvé les causes de ces résultats insatisfaisants. Cependant, on observe bien que le bruit augmente avec le courant.

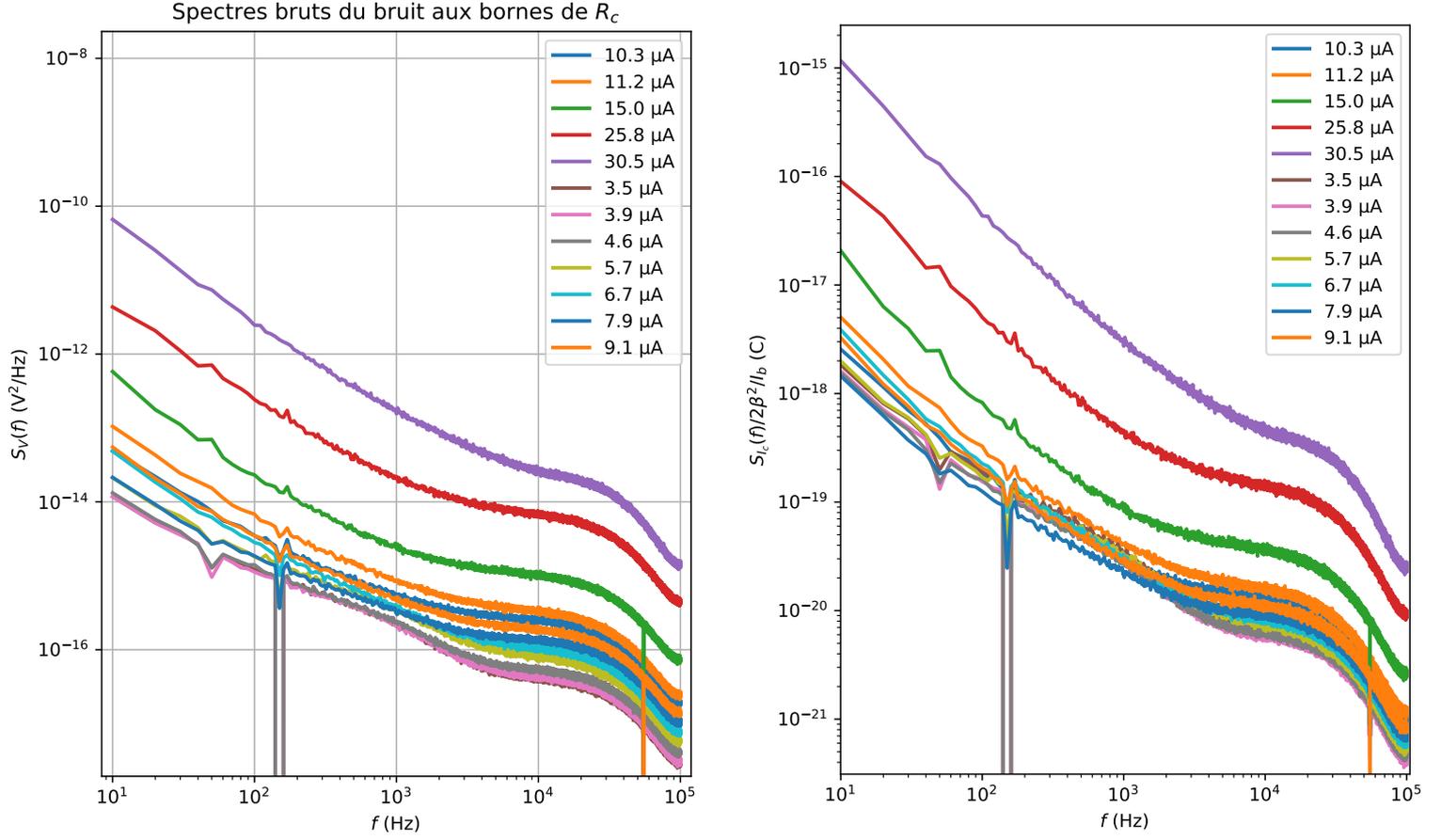


FIGURE 13 – Différents spectres obtenus pour le bruit de grenaille. À droite, S_V aux bornes de la résistance collecteur. À gauche, $\frac{S_{I_c}}{2\beta^2 I_b}$ avec $S_{I_c} = S_V / (100\Omega)^2$. Pente du bruit $1/f$: $\alpha \simeq 1.26$.

4 Conclusion

Finalement, ces expériences auront permis d'étudier deux bruits d'origines fondamentales différentes : le bruit thermique lié à l'agitation thermique et le bruit de grenaille lié à la discrétisation de la charge de l'électron.

Dans le cadre du bruit thermique, les valeurs obtenues pour k_B sont, pour toutes les expériences :

- $k_B = (1.42 \pm 0.08) \cdot 10^{-23}$ J/K pour la dépendance en R
- $k_B = (1.38 \pm 0.06) \cdot 10^{-23}$ J/K pour le module Peltier
- $k_B = (1.38 \pm 0.07) \cdot 10^{-23}$ J/K pour la méthode min/max sur l'azote liquide
- $k_B = (1.38 \pm 0.02) \cdot 10^{-23}$ J/K pour le traitement statistique sur l'azote liquide

Étant donné les incertitudes, elles sont bien toutes cohérentes entre elles et avec la valeur connue de $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K. De plus, les dépendances linéaires en R et T sont bien observées et cohérentes avec la théorie.

Pour pouvoir avoir une valeur plus précise de k_B , de nombreuses pistes pourraient être explorées :

- une mesure plus précise de $R(T)$ et de T
- monter en fréquence d'acquisition avec une carte plus puissante
- utiliser un filtre du 2nd ordre, que l'on a construit mais pas eue le temps d'utiliser, pour pouvoir monter légèrement en fréquence
- diminuer les capacités et inductances parasites dans la chaîne de mesure

Pour ce qui est du bruit de grenaille, il nous aurait fallu plus de temps pour comprendre les phénomènes à l'origine des problèmes rencontrés. On aurait aussi pu étudier le bruit d'une photo-diode (bruit de grenaille photonique), qui possède le même spectre que le bruit de grenaille électronique.