

Compte-rendu du TP Hyperfréquences

Melvin Creff, Félix Faisant (Groupe A05)

28 mai 2018

1 Éléments théoriques

1.1 Détermination des modes de propagation

Étudions les modes TE dans un guide d'onde (formé de conducteurs parfaits) de section rectangulaire $a \times b$ dans le plan (x, y) , définis par

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0(x, y) e^{i(kz - \omega t)} & \text{avec } E_{0,z} = 0 \\ \vec{B} = \vec{B}_0(x, y) e^{i(kz - \omega t)} \end{cases}$$

de longueur d'onde $\lambda_g = 2\pi/k$ et vérifiant les équations de Maxwell (et donc l'équation d'onde $\square \vec{E} = \square \vec{B} = \vec{0}$) et les conditions aux limites imposées par les conducteurs ($E_{0,y} = 0$ en $x = 0, a$, et $E_{0,x} = 0$ en $y = 0, b$). Avec les équations de Maxwell, on montre que

$$B_{0,y} = \frac{ik}{k_{\perp}^2} \frac{\partial B_{0,z}}{\partial y}, \quad B_{0,x} = \frac{ik}{k_{\perp}^2} \frac{\partial B_{0,z}}{\partial x}, \quad E_{0,x} = \frac{\omega}{k} B_{0,y}, \quad E_{0,y} = -\frac{\omega}{k} B_{0,x} \quad (1)$$

avec $k_{\perp}^2 = k_0^2 - k^2$, $k_0 = \omega/c$, et $B_{0,z}$ vérifiant l'équation

$$\nabla_{\perp}^2 B_{0,z} + k_{\perp}^2 B_{0,z} = 0 \quad \text{avec} \quad \nabla_{\perp}^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$$

Par séparation des variables de $B_{0,z}(x, y)$, conditions aux limites et théorème d'unicité, on obtient

$$B_{0,z}(x, y) \propto \cos(k_x x) \cos(k_y y) \quad \text{avec} \quad k_x = \frac{m\pi}{a}, k_y = \frac{n\pi}{b}, \quad (m, n) \in \mathbb{N}_{\neq(0,0)}^2 \quad (2)$$

avec $k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2$ pour avoir la solution sous cette forme, que l'on nomme TE_{mn} , soit finalement

$$k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \quad (3)$$

De même pour les modes TM_{mn} (définis par $B_{0,z} = 0$), les composantes du champ s'expriment à partir de $E_{0,z}$ et suivent (3). On les ignore toutefois ici car le positionnement de la diode Gunn impose des modes TE, ce que confirmera le fil horizontal/vertical en bout de ligne. Les modes TEM ($B_{0,z} = E_{0,z} = 0$) ne peuvent se propager car le guide est simplement connexe.

1.2 Condition de propagation

D'après (3), $k^2 \in \mathbb{R}$ donc k est soit imaginaire pur (onde évanescence) pour $k^2 < 0$, soit réel (onde progressive) pour $k^2 > 0$. Un mode TE_{mn} ou TM_{mn} ne peut donc se propager que si

$$\omega > \omega_{c,mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}c\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}c\right)^2 \quad \text{pulsation de coupure}$$

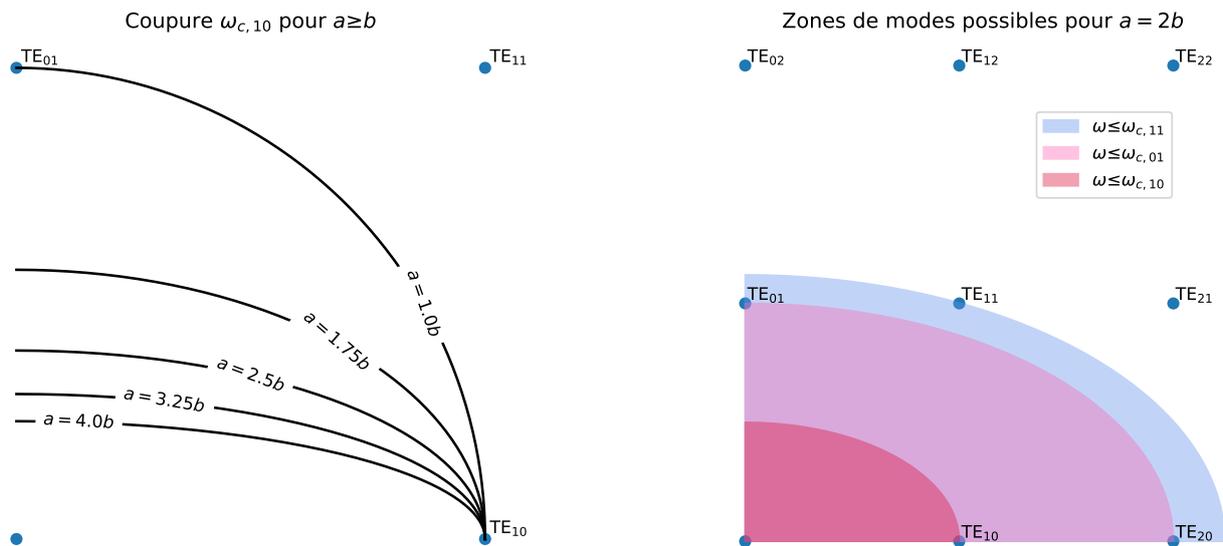


FIGURE 1 – Représentation graphique des modes pouvant se propager dans le guide. À droite, les trois premières zones de propagation pour $a = 2b$: si le point du mode TE_{mn} est dans la zone de fréquence, alors ce mode peut se propager à ces fréquences. À gauche, fréquence de coupure associée au mode TE_{10} pour différentes valeurs de b inférieures à a , ce qui est le cas dans ce TP.

Dans la cas $a = 2b$, la fréquence de coupure est :

$$\nu_{c,mn} = \frac{c}{2a} \sqrt{m^2 + 4n^2}$$

Ainsi la fréquence minimale, obtenue pour TE_{10} , est $\nu_1 = c/2a$. Comme on le voit sur la figure 1.b (ou sur la figure 3.a), aucun mode ne peut se propager à $\nu < \nu_1$. La seconde fréquence de coupure, obtenue pour TE_{01} ou TE_{20} est $\nu_2 = c/a$. Ainsi, seul le mode TE_{10} se propage dans le guide pour $\frac{c}{2a} < \nu < \frac{c}{a}$.

Comme on l'observe sur la figure 1.a, ces deux conclusions restent valides pour un quelconque $a \geq 2b$, ce qui est le cas de ce TP ($a \gtrsim 2b$). Ainsi, seul le mode TE_{10} se propage pour $\frac{c}{2a} < \nu \lesssim \frac{c}{a} \iff 6.6 \text{ GHz} < \nu \lesssim 13.1 \text{ GHz}$ avec $a = 22.86 \text{ mm}$. Puisque les fréquences générées sont dans $[8.5, 9.5] \text{ GHz}$, c'est bien TE_{10} qui est propagé.

1.3 Détermination des puissances

Les amplitudes dans ce TP sont mesurées avec différents capteurs (sonde sur la ligne de mesure, antennes...), pour lesquels on ne connaît pas a priori la relation entre l'amplitude du champ E et la tension de sortie $V(E)$. C'est l'atténuateur calibré, placé sur la ligne de mesure, qui nous permet de remonter à E à partir de V . La puissance en sortie de l'atténuateur est donnée par :

$$\text{dB}_{\text{att}} = 10 \log \left(\frac{P_{\text{gen}}}{P_{\text{att}}} \right), \quad P_{\text{att}} \propto P_{\text{capt}} \propto E^2 \quad (4)$$

On peut alors déterminer une puissance relative P/P_0 reçue par un capteur avec deux méthodes différentes :

- **par niveau constant** : on se place à P_0 minimale sans atténuation, on mesure V_0 , puis pour chaque position, on atténue de dB_{att} le signal jusqu'à ce que $V = V_0$: on a alors avec (4)

$$\frac{P(\text{dB}_{\text{att}})}{P_0} = 10^{\text{dB}_{\text{att}}/10} \quad \text{et} \quad \frac{\Delta P}{P} = \frac{\ln 10}{10} \Delta \text{dB} \quad (5)$$

- **par étalonnage** avec l'atténuateur : on construit d'abord une courbe d'étalonnage $\text{dB}(V)$ pour le capteur, en mesurant (capteur fixé) V pour chaque pas de l'atténuateur (1 dB). La relation est ensuite inversée et les valeurs interpolées grâce au script. Puisque

$$10^{\text{dB}_{\text{att}}/10} = P_{\text{gen}}/P_{\text{att}} \propto P_{\text{capt}}^{-1}$$

si l'on note P_0 la puissance de référence, associée à V_0 , on a

$$\frac{P(V)}{P_0} = 10^{(\text{dB}(V_0) - \text{dB}(V))/10} \quad (6)$$

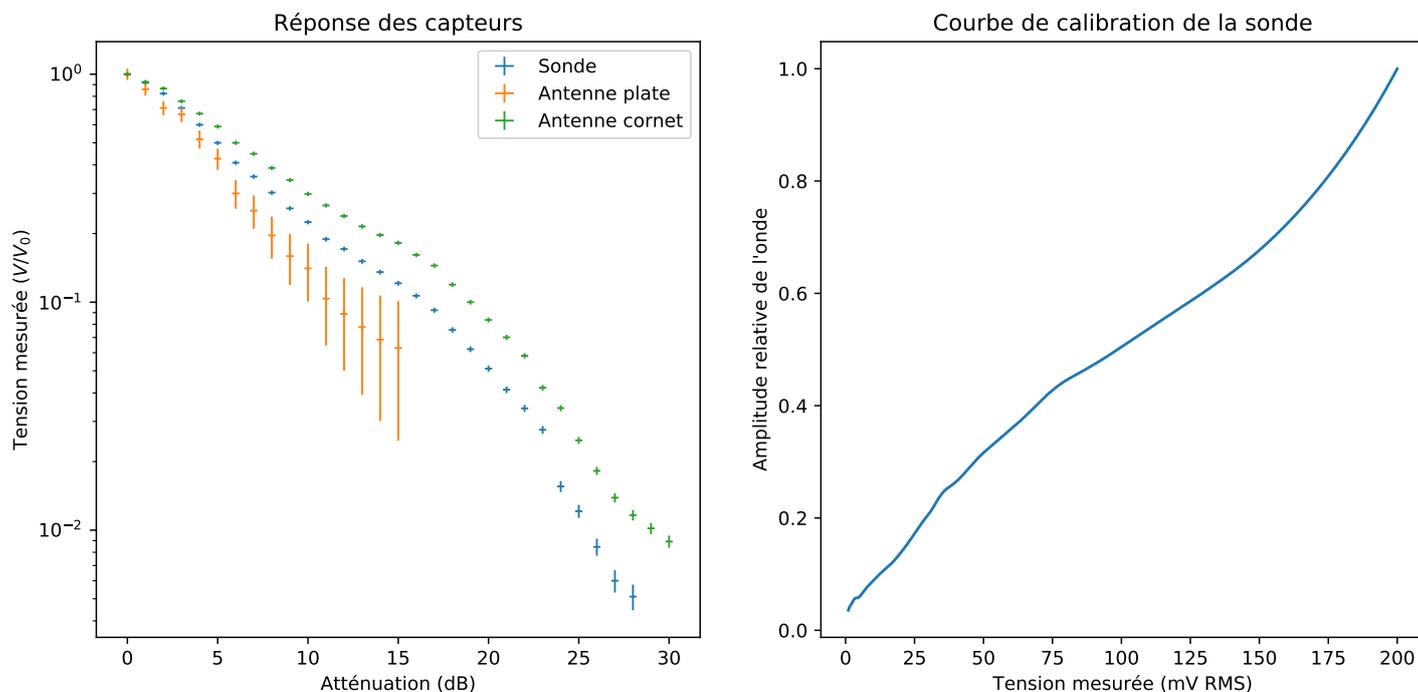


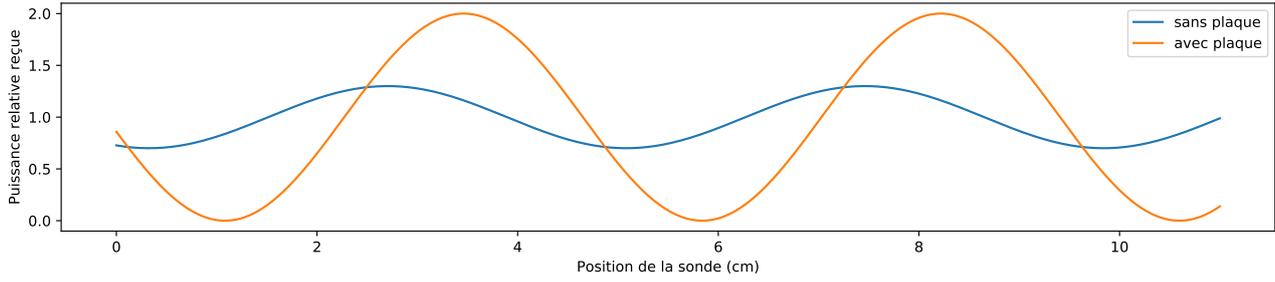
FIGURE 2 – Mesure de la réponse des capteurs utilisés (sonde sur la ligne de mesure, antenne cornet et *microstrip antenna*) à différentes atténuations, à 9.04 GHz. Exemple d'une courbe de calibration (utilisée pour la mesure des coefficients de réflexion) après inversion et interpolation.

La méthode par étalonnage permet d'avoir une plus grande précision. En effet, lors de la mesure par niveau constant, on a une incertitude (± 0.3 dB) sur la lecture de l'atténuateur (gradué par pas de 1 dB) et sur l'atténuation à laquelle $V = V_0$ (± 0.3 dB au mieux), incertitudes se retrouvant en exposant, donnant au moins $\pm 14\%$. Si l'on considère l'atténuateur correctement calibré sur toute la gamme, ces deux incertitudes ne sont pas présentes dans la méthode par étalonnage, car seules les incertitudes de positionnement de l'atténuateur (± 0.2 dB) et de lecture de V_{rms} ($\pm 2\%$ (résolution) ± 0.1 mV (bruit)) sont présentes.

2 Étude du guide d'onde dans le mode TE_{10}

En sortie de la sonde de la ligne de mesure, on observe un signal carré sur l'oscilloscope de l'ordre de 10 kHz, qui correspond à la modulation de l'onde (et qui n'est pas le profil temporel de l'onde). Lorsque change la position de la sonde, le signal varie de manière périodique en amplitude : on parcourt les nœuds et ventres de l'onde. Lorsque une plaque métallique est installée en bout de ligne, les nœuds sont proches de zéro (onde stationnaire, car réflexion presque totale sur la plaque). Lorsque la réflexion n'est pas parfaite, l'onde est partiellement stationnaire, et pour la

puissance mesurée (puissance moyenne reçue par la sonde), les nœuds n’atteignent pas zéro, et les ventres sont plus faibles. Profil (idéalisé) du champ dans le guide :



2.1 Relation de dispersion

La longueur d’onde λ_g dans le guide est obtenue par mesure de la distance entre nœuds de l’onde stationnaire dans le guide via la sonde de ligne de mesure. Les nœuds sont préférables aux ventres car la lecture de leur position est plus précise. Le nombre de nœuds $\#_{\text{nœud}}$ permet de diviser d’autant l’incertitude sur λ_g . On a :

$$\lambda_g = \frac{2 \Delta x_{\text{nœud}}}{\#_{\text{nœud}}}$$

La fréquence ν (en GHz) se mesure grâce à l’ondemètre : on ajuste la taille d (en mm) de la cavité de l’ondemètre pour la faire rentrer en résonance, ce qui provoque une chute d’amplitude mesurée grâce à la sonde. ν est alors donnée par la formule de calibration de l’ondemètre :

$$\nu = -0.0011d^3 + 0.0399d^2 - 0.6677d + 12.521$$

d	x_1	x_2	$\#$	λ_g (cm)	ν (GHz)	v_ϕ (m/s)	$v_\phi \pm$	v_ϕ/c
6.96	4.0	8.4	2	4.40 ± 0.2	9.436 ± 0.008	$4.152 \pm 0.001 \cdot 10^8$	0.29%	1.38
7.69	5.7	10.2	2	4.50 ± 0.2	9.246 ± 0.007	$4.161 \pm 0.001 \cdot 10^8$	0.28%	1.39
8.30	5.3	9.9	2	4.65 ± 0.2	9.099 ± 0.007	$4.231 \pm 0.001 \cdot 10^8$	0.28%	1.41
8.98	4.8	9.6	2	4.80 ± 0.2	8.946 ± 0.006	$4.294 \pm 0.001 \cdot 10^8$	0.27%	1.43
9.61	4.3	9.3	2	5.00 ± 0.2	8.813 ± 0.006	$4.406 \pm 0.001 \cdot 10^8$	0.27%	1.47
10.26	3.8	9.0	2	5.15 ± 0.2	8.683 ± 0.006	$4.472 \pm 0.001 \cdot 10^8$	0.27%	1.49
10.80	6.0	8.6	1	5.30 ± 0.4	8.578 ± 0.006	$4.546 \pm 0.002 \cdot 10^8$	0.47%	1.52
11.42	5.7	8.4	1	5.40 ± 0.4	8.461 ± 0.005	$4.569 \pm 0.002 \cdot 10^8$	0.47%	1.52

TABLE 1 – Relevé de mesures et résultats (d en mm, x en cm). L’incertitude sur d est ± 0.03 mm, celle sur x est ± 0.1 cm, et on en déduit l’incertitude $v_\phi \pm$ sur la vitesse de phase.

On observe que, entre 8.5 GHz et 9.5 GHz, la relation de dispersion n’est pas tout à fait linéaire, et coïncide approximativement avec la relation de dispersion théorique d’un mode TE_{10} d’un guide d’onde parfait (3) pour $a = 22.86$ mm (voir figure 3.a), ce qui confirme le fait que le mode propagé est TE_{10} . La relation de dispersion n’épouse pas tout à fait celle théorique possiblement car le guide n’est pas un conducteur parfait.

De plus, en calculant la vitesse de l’onde dans le guide $v_\phi = \omega/k = \nu\lambda_g$, on remarque que sa vitesse est supérieur à c , de l’ordre de 45% (voir tableau). Comme il s’agit de la vitesse de phase, ce n’est pas un problème. En effet, c’est la vitesse de groupe $v_g = d\omega/dk$ (ici $< c$, la pente $dk/d\omega$ étant plus forte que $1/c$, voir fig.3) qui détermine la vitesse de transport de l’information. On peut faire l’analogie avec la propagation d’une onde dans un plasma pour $\omega > \omega_p$.

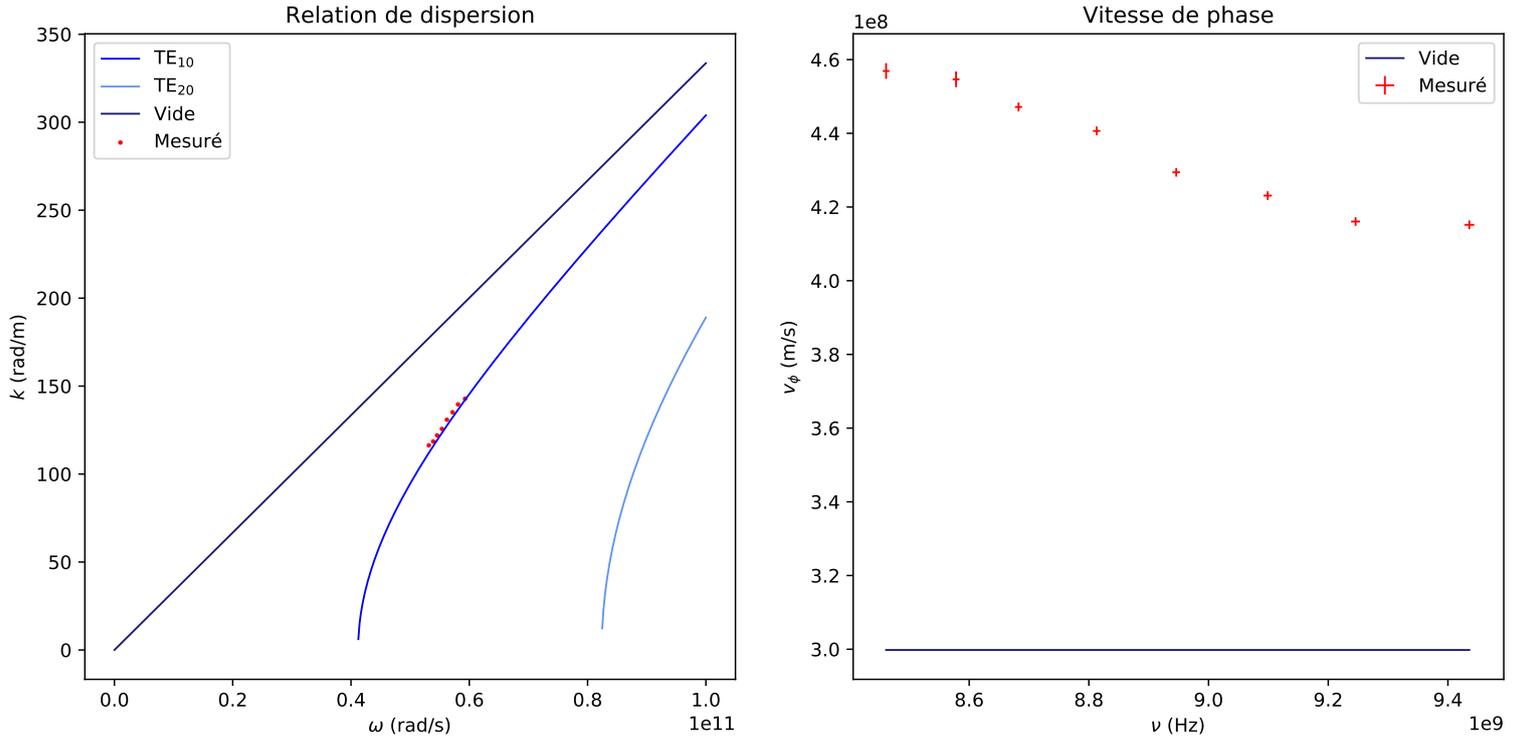


FIGURE 3 – Relation de dispersion $k(\omega)$ dans le vide illimité, pour deux modes, et mesurée; vitesse de phase v_ϕ comparée à c .

2.2 Coefficients de réflexion

Pour la suite de l'étude nous fixons la fréquence à 9.04 GHz. En TE_{10} , le coefficient de réflexion de la charge placée en bout de ligne est

$$|\Gamma| = \frac{\tau - 1}{\tau + 1} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{E_{\max}}{E_{\min}}$$

τ étant le taux d'onde stationnaire et $E_{\max, \min}$ les amplitudes maximales (ventres) et minimales (nœuds) du champ. On détermine τ de deux façons :

- mesure de $V_{\min, \max}$ puis de $E_{\max, \min}$ avec la courbe d'étalonnage (figure 1.b) :

$$\tau = 10^{(\text{dB}(V_{\max}) - \text{dB}(V_{\min})) / 20} \quad \text{d'après (6)}$$

- par niveau constant : on se place sur un nœud, on mesure V_{\min} , puis on se place sur un ventre et on atténue le signal jusqu'à ce que $V = V_{\min}$:

$$\tau = 10^{\text{dB}_{\text{att}} / 20} \quad \text{d'après (5)}$$

Charge	V_{\min}	V_{\max}	τ	$ \Gamma $	dB_{att}	τ	$ \Gamma $
Libre (air)	86 ± 4	172 ± 4	1.71 ± 0.09	0.26 ± 0.02	5.6 ± 0.6	1.9 ± 0.1	0.31 ± 0.03
Plexiglas	45 ± 4	122 ± 4	1.92 ± 0.08	0.31 ± 0.02	5.1 ± 0.6	1.8 ± 0.2	0.29 ± 0.04
Adaptée	97 ± 4	113 ± 4	1.11 ± 0.05	0.05 ± 0.02			
Cornet	115 ± 4	150 ± 4	1.23 ± 0.06	0.11 ± 0.03	2.5 ± 0.6	1.33 ± 0.04	0.14 ± 0.04
Fil horiz.	80 ± 4	163 ± 4	1.66 ± 0.08	0.25 ± 0.03	6 ± 0.6	1.9 ± 0.2	0.33 ± 0.04
Fil vertical	25 ± 2	198 ± 4	5.6 ± 0.3	0.70 ± 0.02	17.4 ± 0.6	7.4 ± 0.6	0.76 ± 0.02

TABLE 2 – Détermination du coefficient de réflexion $|\Gamma|$ par les deux méthodes différentes (par $V_{\min, \max}$ à gauche, par niveau constant à droite), effectuées simultanément. Les tensions sont en mV_{RMS} . Pour la charge adaptée (avec la lame totalement rentrée), la méthode par niveaux constants n'a pas été utilisée.

On remarque une différence du coefficient de réflexion entre les deux méthodes, les intervalles d'incertitude ne se recoupant pas pour le cornet et le fil vertical/horizontal. De plus, la différence est presque toujours dans le même sens : il est probable qu'une erreur systématique est présente. Le manque de précision de l'atténuateur se fait sentir.

2.2.1 Comparaison des différentes charges

La charge adaptée et le cornet ont un coefficient de réflexion faible. La différence est que la charge adaptée absorbe l'onde avec la lame en bakélite ($|\Gamma| \simeq 0.05$, presque nul) alors que le cornet effectue une adaptation d'impédance entre le guide et l'air libre, adaptation qui ne peut être parfaite, causant donc une réflexion non négligeable ($|\Gamma| \simeq 0.11$, plus grand).

Contrairement au cornet, il n'y a pas d'adaptation d'impédance pour l'extrémité libre : le milieu varie brutalement, ce qui cause une plus forte réflexion de l'onde ($|\Gamma_{\text{libre}}| \simeq 0.26 > |\Gamma_{\text{cornet}}|$).

Pour expliquer la différence entre les deux configurations du fil comme charge, donnons la polarisation du champ \vec{E} pour un mode TE_{10} : d'après (2),

$$B_{0,z} \propto \cos(k_x x) \quad \text{donc (1)} \quad E_{0,x} = \frac{\omega}{k} B_{0,y} \propto \frac{\partial B_{0,z}}{\partial y} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{E} \propto \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-i\omega t} \hat{y} \quad (7)$$

Le fil vertical, orienté suivant \hat{y} , et centré en $x = a/2$ (là où l'amplitude champ est maximale), est donc sensible au champ : grâce à la loi d'Ohm $\vec{j} \propto \vec{E}$, un courant parcourt le fil et un champ opposé est donc émis. Le coefficient de réflexion est donc élevé ($|\Gamma_{\text{vert}}| \simeq 0.7$). Au contraire, le fil horizontal est orienté suivant \hat{x} et le courant suivant \hat{y} : très peu de courant circule donc et le champ émis est très faible, la réflexion est donc similaire à celle d'une extrémité libre ($|\Gamma_{\text{horiz}}| \simeq 0.25 \simeq |\Gamma_{\text{libre}}|$).

Enfin, les nœuds dans la ligne de mesure ne sont pas toujours à la même position car ils proviennent de l'interférence entre l'onde incidente et l'onde réfléchie, dont la phase dépend de la charge. On peut exprimer la position des nœuds avec le coefficient de réflexion complexe $\Gamma = |\Gamma|e^{i\theta}$:

$$z \equiv -\frac{\lambda_g}{4} \left(\frac{\theta}{\pi} - 1 \right) \pmod{\frac{\lambda_g}{2}}$$

On pourrait alors mesurer θ en mesurant la distance $d = z - z_0$ entre le nœud avec la charge (z) et le nœud avec la plaque de métal (z_0) : $\theta = \pi - 4\pi d/\lambda_g \pmod{2\pi}$.

En conclusion, le fil vertical (et la plaque métallique) a une forte réflexion ; l'extrémité libre, le fil horizontal et le plexiglas ont un coefficient de réflexion intermédiaire ; et la charge d'impédance adaptée et le cornet ont une faible réflexion. Pour la charge adaptée, $|\Gamma| \neq 0$ car l'on était peut être pas sur la fréquence optimale, et parce que la charge n'est pas parfaite.

3 Rayonnement d'une antenne

Pour pouvoir étudier la propagation de l'onde dans l'air, il faut que la réflexion $|\Gamma|$ à l'interface guide-air soit la plus faible possible pour que la puissance transmise soit grande. Il faut donc effectuer une *adaptation d'impédance* : c'est le rôle du cornet. En effet, on a vu que le coefficient de réflexion du cornet est faible ($\simeq 0.1$) : l'adaptation est donc efficace.

On rappelle les conditions sur la distance R pour être dans la zone de Fraunhofer :

- $R \gg \lambda_0$, ici $R \gtrsim 10\lambda_0 \simeq 33 \text{ cm}$
- $R \gg D$, ici $R \gtrsim 5D \simeq 39 \text{ cm}$ car $D_{\text{cornet}} = 78 \text{ mm}$
- $R \gtrsim R_f = 2D^2/\lambda_0 \simeq 37 \text{ cm}$ dans notre cas

En se plaçant à plus de 40 cm, on est donc largement dans la zone de rayonnement.

La zone de Rayleigh correspond à $R \lesssim R_r = D^2/2\lambda_0 \simeq 1.2$ cm. Enfin, la zone de Fresnel se situe entre 1.2 cm et 37 cm.

3.1 Distance émetteur-récepteur

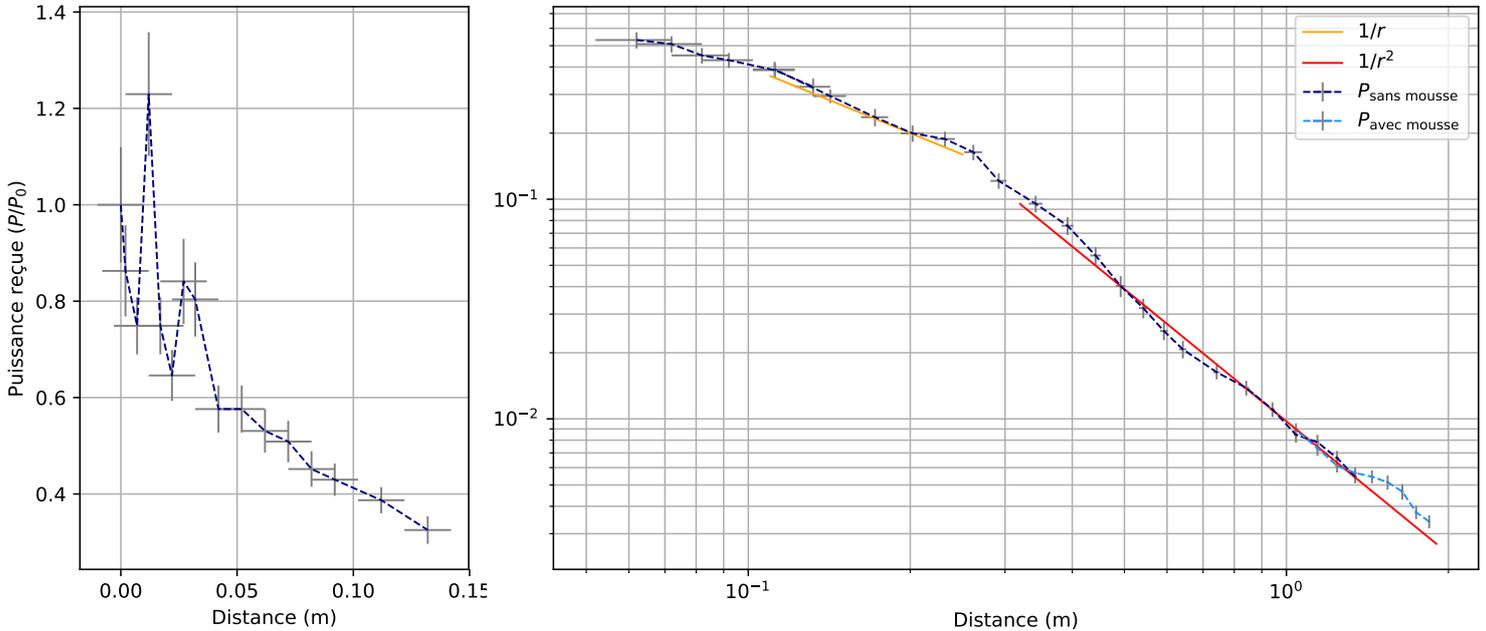


FIGURE 4 – Relation distance-puissance mesurée avec l’antenne cornet et avec la méthode par étalonnage. La distance est celle séparant les extrémités ouvertes des cornets. À droite : proche de la source. À gauche : à partir de 6 cm, en échelle log, avec et sans mousse absorbante vers la fin du banc, pour éliminer l’influence de la réflexion de l’onde sur la table, qui a tendance à réduire la puissance reçue. Relations de type $1/r$ à distance intermédiaire et $1/r^2$ à grande distance (zone de rayonnement).

On observe que la relation distance-puissance suit une loi en $1/r^2$ à partir de ~ 35 cm, c’est à dire la zone de Fraunhofer, où l’onde est sphérique. Plus proche de la source, le comportement n’est plus en $1/r^2$, et on remarque des interférences constructives/destructives à cause de la réflexion dans le cornet récepteur.

3.2 Diagrammes de rayonnement

On rappelle le fait que, pour une antenne donnée, le diagramme de rayonnement est identique au diagramme de réception : c’est pourquoi on laisse fixe la source et on mesure la puissance reçue suivant l’orientation de l’antenne réceptrice. Nous nous plaçons dans la zone de rayonnement, à environ 50 cm pour avoir un signal suffisamment fort. Cela permet de considérer le rayonnement reçu comme une onde localement plane.

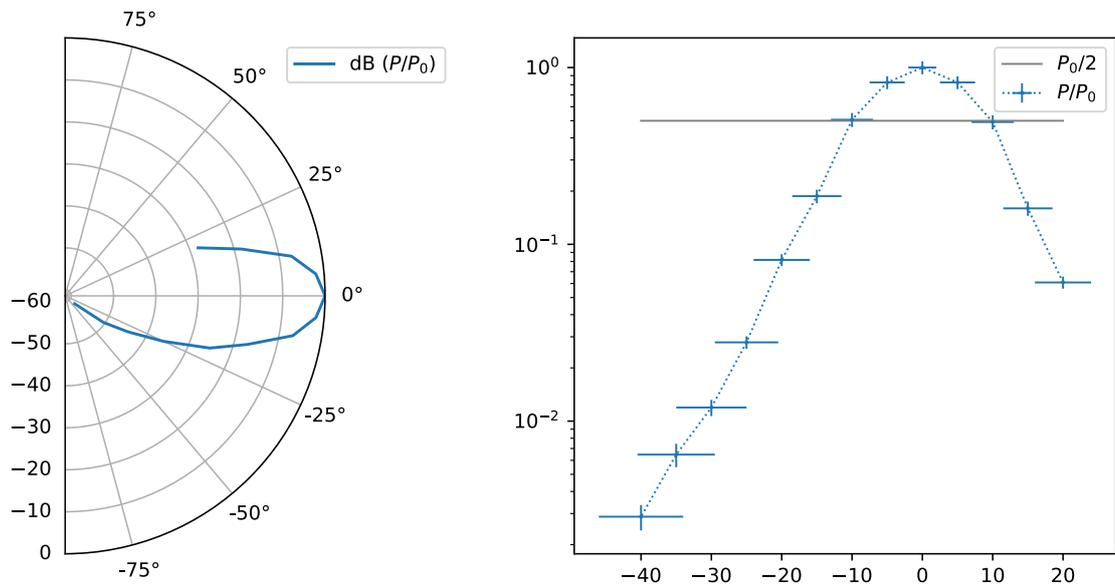


FIGURE 5 – Diagramme de rayonnement de l’antenne cornet. Puisqu’elle est symétrique, on s’est concentré principalement sur un quadrant. Incertitude sur l’angle : $\pm 2^\circ \pm 10\%$

L’antenne cornet possède un unique lobe, de largeur angulaire $19 \pm 5^\circ$. C’est donc une antenne très directive.

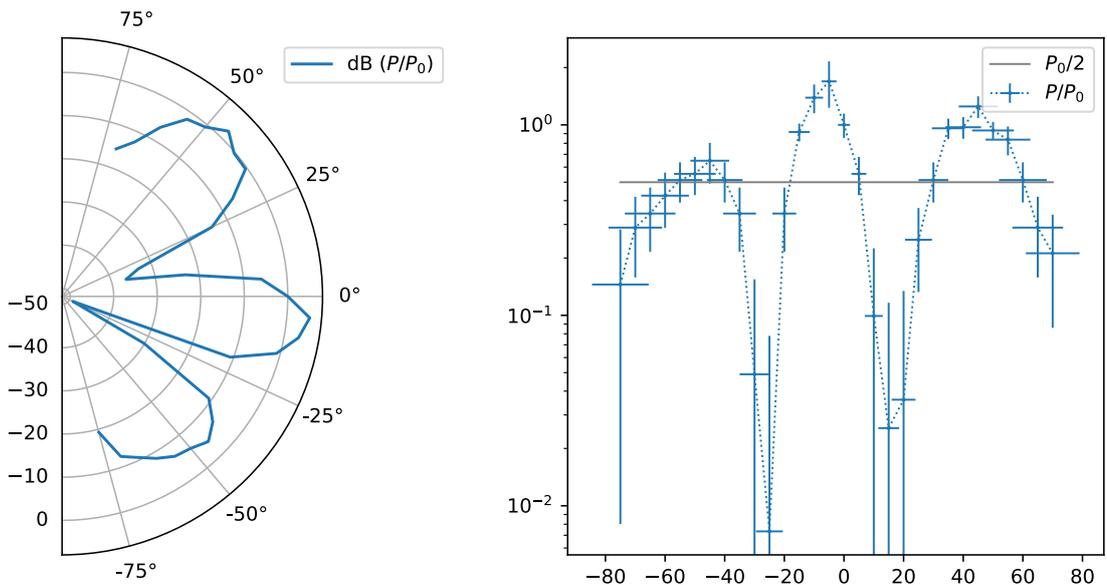


FIGURE 6 – Diagramme de rayonnement de l’antenne plate. Le décalage du lobe central n’est pas dû à un manque de précision ou à une perturbation (mousse absorbante utilisée), et s’observe facilement.

Le diagramme de rayonnement montre que l’antenne plate possède (au moins) 3 lobes. Les lobes secondaires (d’amplitudes inférieures au lobe principal) s’expliquent par le fait que cette antenne est un assemblage régulier de petites antennes, et donc présente une figure d’interférence, comme tout réseau. C’est donc une antenne assez directive (directivité qui augmente avec la taille du réseau) : le lobe principal possède une largeur angulaire de $24 \pm 6^\circ$. Enfin, l’asymétrie du diagramme peut s’expliquer par la construction asymétrique de l’antenne.

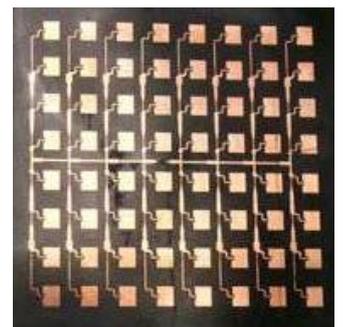


FIGURE 7 – *Microstrip antenna* similaire à celle utilisée en TP.