Formalisme d'action en relativité

Conventions : signature $-+++$; indices grecs $\in\{0,1,2,3\}$; indices latins $\in\{1,2,3\}$; coordonnées carthésiennes : X^μ; coordonnées générales : x^μ; quadri-vecteurs invariants : $\tilde{x}$. Partout ici, l'impulsion est notée $\tilde{p}=m\,\tilde{u}$, tandis que le moment conjugué est noté $\tilde{\pi}$.

1. Lignes d'univers. Cinématique du point.

Lien vers une fiche dédiée, avec une autre présentation (fiches du Deruelle).

2. Rappel des postulats de la mécanique relativiste.

En relativité restreinte :

1. L'espace temps physique est identifié à l'espace-temps de Minkowski $\mathbb{M}^4$, qui est plat, et muni sa 4-distance $\Delta s^2=\eta_{\mu\nu}\,\Delta X^\mu\,\Delta X^\nu$, etc…

2. Principe d'inertie : les référentiels (dits *inertiels*) dans lesquels les particules libres suivent des mouvements rectilignes uniformes (MRU, $\Delta X^i=v^i\,\Delta t$) sont les repères isolés de $\mathbb{M}^4$.

   → Les transformations qui envoient un réf. inertiel sur un réf. inertiel sont les isométries de $\mathbb{M}^4$, qui sont les 10 transformations de Lorentz-Poincaré, groupe $\mathrm{ISO}(3,1)$.

   → Tout le monde est d'accord sur Δs^2 : la 4-distance est *invariante*.

3. Les lois de la physique sont invariantes sous les transformations de Lorentz-Poincaré.

3. Action d'une particule libre de masse m.

Par le 3ème postulat, l'action doit être fortement invariante (sous les transformations de Lorentz-Poincaré en RR, et sous tout changement de coordonnées général si on la veut covariante généralisée) : ça doit être un **scalaire**. Le **seul invariant** à notre disposition est alors la 4-distance invariante $\mathrm{d}s^2$. Enfin, l'équation du mouvement doit être[1] d'ordre 2. L'action est donc nécessairement de la forme

$$\boxed{S_{\text{libre}}[\text{ligne d'univers}]\;=\;\kappa\int_{P_1}^{P_2}\mathrm{d}s} \tag{1}$$

où κ est une constante (de dimension $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$) à déterminer en identifiant la limite non-relativiste. Alors c'est bien joli mais pour en faire quelque chose, il faut paramétrer la ligne d'univers. Soit $\lambda\mapsto\tilde{x}(\lambda)$ un paramétrage régulier (mais arbitraire) par $\lambda\in[\lambda_0,\lambda_1]$ d'une ligne d'univers $P_1\to P_2$. On a alors

$$\mathrm{d}s^2\;=\;g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu\;=\;g_{\mu\nu}\,\frac{x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\,\frac{x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}\,\mathrm{d}\lambda^2\quad\text{d'où}\quad\mathrm{d}s(\lambda)=\sqrt{-g_{\mu\nu}(x^\alpha(\lambda))\,\dot{x}^\mu(\lambda)\,\dot{x}^\nu(\lambda)}\,\mathrm{d}\lambda$$

car $\mathrm{d}s^2<0$: on se limite évidemment à des lignes de *genre temps* (et c'est indépendamment du paramétrage); d'ailleurs, si l'on voulait être rigoureux, il faudrait écrire $\sqrt{-\mathrm{d}s^2}$ partout. La notation $\dot{x}^\mu$ dénote la dérivée par rapport au paramètre en vigueur[2]. L'action (fonctionnelle de $\lambda\mapsto\tilde{x}(\lambda)$) se ré-écrit alors

$$S_{\text{libre}}[\tilde{x}(\lambda)]\;=\;\kappa\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\sqrt{-g_{\mu\nu}\,\dot{x}^\mu\,\dot{x}^\nu}\,\mathrm{d}\lambda$$

1. Réversibilité (invariance $t\mapsto -t$) ⇒ pas de termes d'ordre impair. Stabilité ⇒ pas d'ordre $\geqslant 4$.

Dans $\mathbb{M}^4$ en coordonnées carthésiennes, en prenant le temps comme paramètre ($\lambda = t = X^0/c$) et en notant $v^2 = \delta_{ij}\,\dot{X}^i\,\dot{X}^j$ la vitesse newtonienne, $-\eta_{\mu\nu}\,\dot{X}^\mu\,\dot{X}^\nu = (\dot{X}^0)^2 - \delta_{ij}\,\dot{X}^i\,\dot{X}^j = \big(c\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}\big)^2 - v^2$ donc dans la limite non-relativiste $v^2 \ll c^2$,

$$\sqrt{c^2 - v^2} = c - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c} + \mathcal{O}\big(\tfrac{v^2}{c^2}\big) \quad \text{d'où} \quad S = \kappa\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{c^2-v^2}\,\mathrm{d}t \underset{v\ll c}{\simeq} \kappa\,c\,\Delta t + \int_{t_0}^{t_1}\frac{-\kappa}{2\,c}\,v^2\,\mathrm{d}t + \underbrace{\mathcal{O}\big(\tfrac{v^2}{c^2}\big)}_{\substack{\text{correction}\\ \text{relativiste}}}$$

Or l'action (définie à une constante près) de la mécanique newtonienne est

$$S^{\text{MN}}_{\text{libre}} = \int_{t_0}^{t_1}\frac{1}{2}\,m\,v^2\,\mathrm{d}t \quad \text{donc} \quad \frac{-\kappa}{2\,c} = \frac{m}{2} \quad \text{donc} \quad \kappa = -m\,c$$

Finalement,

$$\boxed{S_{\text{libre}}[\tilde{x}(\lambda)] \;=\; -mc\int_{\tilde{x}([\lambda_0,\lambda_1])}\mathrm{d}s \;\;= -mc\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\mathcal{L}\big(\tilde{x},\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\tilde{x}\big)\,\mathrm{d}\lambda \quad \text{avec} \quad \mathcal{L}(\tilde{x},\dot{\tilde{x}}) = \sqrt{-g_{\mu\nu}(x^\alpha)\,\dot{x}^\mu\,\dot{x}^\nu}} \tag{2}$$

qui est à extrémiser sur l'ensemble des lignes d'univers $\lambda \mapsto \tilde{x}(\lambda)$ de P_0 à P_1. Cette action et ce lagrangien sont *invariants par reparamétrisation* $\lambda \mapsto \lambda'(\lambda)$. En RR et dans un *référentiel inertiel*, il est suffisant de se limiter aux coordonnées carthésiennes sur $\mathbb{M}^4$, comme dans le § suivant.

4. Équations du mouvement d'une particule libre dans $\mathbb{M}^4$. Équations des couches de masse. Paramétrisation affine.

Avec $\mathcal{L} = -mc\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\dot{X}^\mu\dot{X}^\nu}$, l'extrémisation de S_{libre} donne l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{X}^\mu}\right) = \dot{\pi}_\mu = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta X^\mu} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\tilde{p} = \text{cste}} \quad \text{conservation du 4-moment} \tag{3}$$

où

$$\pi_\mu \overset{\text{def}}{=} \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{X}^\mu} = mc\,\frac{2\,\eta_{\mu\nu}\dot{X}^\nu}{2\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\dot{X}^\mu\dot{X}^\nu}} = -m^2c^2\,\frac{\eta_{\mu\nu}\dot{X}^\nu}{\mathcal{L}(\dot{X}^\alpha)} \tag{4}$$

Calculons la norme du 4-moment :

$$\tilde{\pi}^2_{\text{libre}} = \eta^{\mu\nu}\pi_\mu\pi_\nu = m^4c^4\,\frac{\eta^{\mu\nu}\eta_{\mu\alpha}\dot{X}^\alpha\eta_{\nu\alpha}\dot{X}^\beta}{\big(\mathcal{L}(\dot{X}^\alpha)\big)^2} = m^2c^2\,\frac{\eta_{\alpha\beta}\dot{X}^\alpha\dot{X}^\beta}{-\eta_{\mu\nu}\dot{X}^\mu\dot{X}^\nu} = -m^2c^2$$

Pour tout mouvement, on obtient alors l'**équation des couches de masse**

$$\boxed{\eta^{\mu\nu}\pi_\mu\pi_\nu + m^2c^2 = 0 \quad \text{où} \quad \tilde{\pi} = \tilde{\pi}_{\text{libre}}} \tag{5}$$

C'est une relation algébrique entre les 4 coordonnées → le mouvement dans l'espace-temps, à 4 degrés de liberté apparents, est contraint : il n'y a que *3 degrés de liberté* indépendants, comme en mécanique newtonienne. En quelque sort, le mouvement dans l'espace se fait au dépends du mouvement dans le temps, et réciproquement.

On peut exploiter l'arbitraire du paramètre λ pour se débarasser du $\mathcal{L}(\dot{X}^\alpha)$ dans (4). Sous un changement de paramètre $\lambda \mapsto \lambda'(\lambda)$ différentiable, la *valeur* du lagrangien se transforme comme

$$\mathcal{L}\big(\tfrac{\mathrm{d}X^\alpha}{\mathrm{d}\lambda}\big) \;\longrightarrow\; \mathcal{L}\big(\tfrac{\mathrm{d}X^\alpha}{\mathrm{d}\lambda'}\big) = -mc\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\tfrac{X^\mu}{\mathrm{d}\lambda'}\tfrac{X^\nu}{\mathrm{d}\lambda'}} = -mc\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\big(\tfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\lambda'}\big)^2\tfrac{X^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\tfrac{X^\nu}{\mathrm{d}\lambda}} = \mathcal{L}\big(\tfrac{\mathrm{d}X^\alpha}{\mathrm{d}\lambda}\big)\cdot\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\lambda'}$$

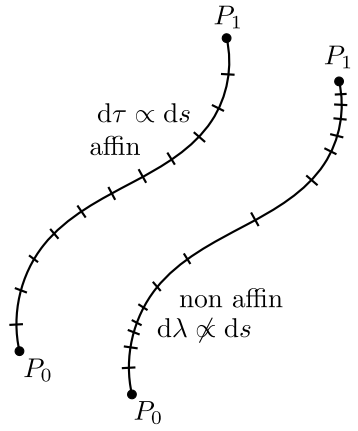
2. Dénote aussi la seconde variable du lagrangien $\mathcal{L}(\tilde{x},\dot{\tilde{x}})$.

Si on choisit $\lambda' =: \tau$ tel que $\mathcal{L}\big(\frac{\mathrm{d}X^\alpha}{\mathrm{d}\lambda'}\big) \equiv -m\,c^2$ (constante), on obtient

$$\boxed{\pi^\mu = m\,\dot{X}^\mu = m\,u^\mu =: p^\mu} \quad \text{avec} \quad \tilde{u} = \frac{\mathrm{d}\tilde{X}}{\mathrm{d}\tau} \tag{6}$$

et

$$S_{\text{libre}}[\tilde{X}] \;=\; -mc^2 \int_{\tilde{X}([\tau_0,\tau_1])} \mathrm{d}\tau$$



Ce paramètre τ est *affin* : on voit immédiatement que

$$\boxed{\mathrm{d}s = c\,\mathrm{d}\tau}$$

(ou $c\,\mathrm{d}\tau = \sqrt{-\mathrm{d}s^2}$ plus rigoureusement). On reconnait le **temps propre**. On aurait pu choisir tout autre valeur constante pour $\mathcal{L}(\dot{X}^\alpha)$: 42, 1… Ça ne changerait que l'unité de temps, le concept important est celui de **paramètre affin**, c'est-à-dire de paramètre proportionnel à la 4-distance invariante.

Le 4-vecteur $\tilde{u}$ est tout naturellement la **4-vitesse**, qui est *invariante* sous les transformations de Lorentz-Poincaré ($\tilde{X}$ et $\mathrm{d}s$ l'étant). L'équation des couches de masse donne

$$0 = \eta^{\mu\nu} p_\mu p_\nu + m^2c^2 = \eta_{\mu\nu}\,u^\mu\,u^\nu + m^2c^2 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\tilde{u}^2 = -c^2} \tag{7}$$

ou encore, si on note $\tilde{p} = \left[\begin{smallmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{smallmatrix}\right]_{\mathcal{R}}$,

$$\boxed{E^2 \;=\; m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2} \tag{8}$$

Enfin, dans cette paramétrisation affine, l'équation du mouvement est simplement

$$\boxed{\dot{u}^\mu = \ddot{X}^\mu \;=\; 0} \tag{9}$$

$\Rightarrow$ c'est un mouvement rectiligne uniforme, et la ligne d'univers est une ligne droite[3].

5. Vitesse. Facteur de Lorentz. Temps propre.

Vitesse mesurée d'une particule en mouvement : à partir du postulat 0 de la relatvité ($\mathrm{d}x^0/c = \mathrm{d}t$ intervalle infinitésimal de temps fourni par une horloge fixe), le vecteur vitesse est naturellement

$$\boxed{v^i := \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}} = c\,\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau}\,\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}x^0} = c\,\frac{u^i}{u^0}$$

Par définition,

$$\tilde{u} \;=\; \left[\begin{array}{c} c\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \\ \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}\tau} \end{array}\right]_{\mathcal{R}} = \left[\begin{array}{c} c\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \\ \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \end{array}\right]_{\mathcal{R}} = \left[\begin{array}{c} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\,c \\ \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\,\vec{v} \end{array}\right]_{\mathcal{R}}$$

En utilisant l'équation des couches de masse (7), $\tilde{u}^2 = -c^2$, on a alors

$$-c^2 \;=\; \big(\tfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\big)^2\,(-c^2 + \vec{v}^2) \quad \text{donc} \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = +\sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}} =: \gamma(\vec{v})} \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{\|\vec{v}\|}{c} \tag{10}$$

en adoptant la convention « τ même sens que t ». Le facteur $\gamma(\vec{v})$ est appellé le **facteur de Lorentz instantanné**. La 4-vitesse s'écrit alors à partir de la vitesse newtonienne comme

$$\boxed{\tilde{u} \;=\; \left[\begin{array}{c} \gamma(\vec{v})\,c \\ \gamma(\vec{v})\,\vec{v} \end{array}\right]_{\mathcal{R}}} \tag{11}$$

3. Toujours dans un référentiel inertiel bien évidemment.

Rapellons pourquoi on appelle τ le *temps propre*. Soit $\mathcal{R}_*(\tau)$ le *référentiel inertiel instantanné* de la particule, c'est-à-dire le référentiel dans lequel « la particule est momentanément au repos en τ » :

$$\vec{v}_*(\tau) = \vec{0}$$

Par (10), on a alors

$$\frac{\mathrm{d}t_*}{\mathrm{d}\tau} = \gamma(\vec{v}_*) = 1 \quad \text{donc} \quad \boxed{\mathrm{d}t_*(\tau) = \mathrm{d}\tau}$$

$\Rightarrow$ C'est le temps mesuré par une horloge se déplaçant avec la particule, donc le temps *propre à la particule*.

6. Mouvement dans un espace-temps courbe : équations des géodésiques.

On repart de l'action (2), qui est covariante au sens général, donc valable dans tout espace-temps courbe, et on utilise τ comme paramétrisation : $\mathcal{L}(x^\alpha(\tau), \dot{x}^\alpha(\tau)) = -mc\sqrt{-g_{\mu\nu}(x^\alpha(\tau))\,\dot{x}^\mu(\tau)\,\dot{x}^\nu(\tau)} \equiv -mc^2$, avec comme moment conjugué (6) $p_\alpha = m\,g_{\alpha\beta}(\tilde{x})\,\dot{x}^\beta$. Le lagrangien dépend ici explicitement de la position x^α à travers le tenseur métrique. Équation d'Euler-Lagrange :

$$\dot{p}_\alpha = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta x^\alpha} = -mc\,\frac{-\dot{x}^\mu\,\dot{x}^\nu\,\partial_\alpha\,g_{\mu\nu}}{2\,\sqrt{-g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\,\dot{x}^\nu}} = -m^2c^2\,\frac{\dot{x}^\mu\,\dot{x}^\nu\,\partial_\alpha\,g_{\mu\nu}}{2\,\mathcal{L}(\tilde{x},\dot{\tilde{x}})} \underset{\tau}{=} \tfrac{1}{2}\,m\,\dot{x}^\mu\,\dot{x}^\nu\,\partial_\alpha\,g_{\mu\nu} \tag{12}$$

Le moment se dérive en

$$\dot{p}_\alpha = m\left(\dot{x}^\mu\,\partial_\mu\,g_{\alpha\beta}\right)\dot{x}^\beta + m\,g_{\alpha\beta}\,\ddot{x}^\beta$$

que l'on combine avec (12) :

$$\begin{aligned}
& m\left(\dot{x}^\mu\,\partial_\mu\,g_{\alpha\beta}\right)\dot{x}^\beta + m\,g_{\alpha\beta}\,\ddot{x}^\beta = \tfrac{1}{2}\,m\,\dot{x}^\mu\,\dot{x}^\nu\,\partial_\alpha\,g_{\mu\nu} \\
\iff\ & g_{\alpha\beta}\,\ddot{x}^\beta + \dot{x}^\mu\,\dot{x}^\nu\,\partial_\mu\,g_{\alpha\nu} - \dot{x}^\mu\,\dot{x}^\nu\,\tfrac{1}{2}\,\partial_\alpha\,g_{\mu\nu} = 0 \\
[\times g^{\alpha\gamma}]\quad \iff\ & \ddot{x}^\gamma + \dot{x}^\mu\,\dot{x}^\nu\,g^{\alpha\gamma}\left(\partial_\mu\,g_{\alpha\nu} - \tfrac{1}{2}\,\partial_\alpha\,g_{\mu\nu}\right) = 0 \\
[\text{ car } \dot{x}^\nu\,\dot{x}^\mu = \dot{x}^\mu\,\dot{x}^\nu]\quad \iff\ & \ddot{x}^\gamma + \dot{x}^\mu\,\dot{x}^\nu\,g^{\alpha\gamma}\,\tfrac{1}{2}\left(\partial_\mu\,g_{\alpha\nu} + \partial_\nu\,g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha\,g_{\mu\nu}\right) = 0 \\
\iff\ & \boxed{\ddot{x}^\gamma + \dot{x}^\mu\,\dot{x}^\nu\,\Gamma^\gamma_{\mu\nu}(x^\alpha) = 0}
\end{aligned} \tag{13}$$

avec $\Gamma^\gamma_{\mu\nu}$ les *symboles de Christoffel* du système de coordonnées, encodant la mobilité des vecteurs de base. C'est l'**équation des géodésiques**. En effet, puisque $S_{\text{libre}} \propto \int \mathrm{d}s$, les lignes d'univers des particules-test libres sont des courbes de longueur extrémales, c'est-à-dire des géodésiques. Dans $\mathbb{M}^4$ et avec des coordonnées carthésiennes, les symboles de Christoffel sont nuls (car $\partial_\alpha\,\eta_{\mu\nu} = 0$) et on retrouve (9).

Todo : équation des couches de masse dans un espace courbe.

L'équation des géodésiques apparait aussi dans un cadre newtonien : soit une particule libre newtonienne, sur un espace courbe (ou simplement avec des coordonnées non carthésiennes sur $\mathbb{E}^3$), d'action

$$S^{\text{MN}}_{\text{libre}} = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}_{\text{libre}}\left(\vec{x}, \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{x}\right)\mathrm{d}t \quad \text{avec} \quad \mathcal{L}_{\text{libre}} = \tfrac{1}{2}\,m\,\vec{v}^2 = \tfrac{1}{2}\,m\,g_{ij}(\vec{x})\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j$$

Moment conjugué : $p_a = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{x}^a} = m\,g_{ab}\,\dot{x}^b$, qui n'est rien d'autre que (6) à 3D. Équation d'Euler-Lagrange : $\dot{p}_a = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta x^a} = \frac{1}{2}\,m\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j\,\partial_a\,g_{ij}$, qui n'est rien d'autre que (12) à 3D. On obtient donc le même résultat :

$$\ddot{x}^c + \dot{x}^a\,\dot{x}^b\,\Gamma^c_{ab} = 0 \tag{14}$$

7. Formalisme hamiltonien.

Calculons le hamiltonien d'une particule libre par transformation de Legendre du lagrangien libre

$$\mathcal{H}(\pi_\alpha, x^\alpha) \overset{\text{def}}{=} \pi_\mu\,\dot{x}^\mu - \mathcal{L}(x^\alpha, \dot{x}^\alpha)$$

En prenant $\mathcal{L}_\lambda = -mc\,\sqrt{-\dot{x}_\mu\,\dot{x}^\mu}$,

$$\pi_\mu = \frac{\delta\mathcal{L}_\lambda}{\delta\dot{x}^\mu} = mc\,\frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}_\nu\,\dot{x}^\nu}}$$

donc

$$\mathcal{H}_\lambda = mc\,\frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}_\nu\,\dot{x}^\nu}}\,\dot{x}^\mu + mc\,\sqrt{-\dot{x}_\nu\,\dot{x}^\nu} = -mc\,\frac{\sqrt{-\dot{x}_\nu\,\dot{x}^\nu}^2}{\sqrt{-\dot{x}_\nu\,\dot{x}^\nu}} + mc\,\sqrt{-\dot{x}_\nu\,\dot{x}^\mu} \quad \text{donc} \quad \boxed{\mathcal{H}_\lambda \equiv 0}$$

C'est embêtant… mais on pouvait s'y attendre. En effet, le hamiltonien (l'énergie) génère les translations temporelles. Or le temps et l'espace sont sur un même pied d'égalité dans ce lagrangien $\mathcal{L}_\lambda$, le paramétrage λ étant quelconque. Il n'y a donc aucune raison que le temps sorte par magie. Wheeler appelle ça le *super-hamiltonien*. On est dans une situation délicate et il ne faut pas faire n'importe quoi[4]. Une solution pour s'en sortir est de réduire le nombre de degrés de liberté en imposant l'équation des couches de masse. L'action dans le formalisme hamiltonien devient, après introduction du multiplicateur de Lagrange $\Lambda(\lambda)$ associé à l'équation des couches de masse $\eta^{\mu\nu}\pi_\mu\pi_\nu + m^2c^2 = 0$,

$$
\begin{aligned}
S[\pi_\alpha, x^\alpha] &= \int \mathrm{d}\lambda \left(\pi_\mu \dot{x}^\mu \underbrace{- \mathcal{H}_\lambda}_{=0} - \Lambda(\lambda) \cdot \left(\eta^{\mu\nu}\pi_\mu\pi_\nu + m^2c^2 \right) \right) \\
0 = \delta_{x^\alpha} S &= 0 \quad \text{oui…} \\
0 = \delta_{\pi_\alpha} S &= \int \mathrm{d}\lambda \left(\delta\pi_\alpha \dot{x}^\alpha - \Lambda \cdot \left(2\,\eta^{\alpha\nu}\delta\pi_\alpha\pi_\nu \right) \right) = \int \mathrm{d}\lambda \left(\dot{x}^\alpha - 2\,\Lambda\,\pi^\alpha \right) \delta\pi_\alpha \\
&= 0 \quad \forall \delta\pi_\alpha \quad \Longrightarrow \quad \forall\alpha, \quad \dot{x}^\alpha = 2\,\Lambda\,\pi^\alpha
\end{aligned}
$$

N'ayant pas d'autre contrainte sur Λ (c'est en fait parce que le paramètre λ est arbitraire), on a le loisir de le fixer, c'est-à-dire de fixer λ. En prenant $\lambda = \tau$, on a $\pi^\mu = m\,\dot{x}^\mu$, on en déduit donc[5] $\Lambda = \frac{1}{2m}$. Ainsi,

$$
\boxed{ S_{\mathsf{H}}^{\text{libre}}[\pi_\alpha, x^\alpha] = \int \mathrm{d}\tau \left(\frac{\eta^{\mu\nu}\pi_\mu\pi_\nu}{2\,m} - \frac{1}{2}\,m\,c^2 \right) } \tag{15}
$$

En quelque sorte, l'équation des couches de masse joue le rôle d'un hamiltonien effectif ($\tilde{\pi} = \tilde{p}$)

$$
\mathcal{H}_{\mathsf{H}}^{\text{libre}} = \frac{\tilde{p}^2}{2\,m} + \frac{1}{2}\,m\,c^2
$$

qui ressemble beaucoup au hamiltonien newtonien d'une particule libre.

Remarque : on a (équation des couches de masse) $\Leftrightarrow \mathcal{H}_{\mathsf{H}} = 0$. Mais l'équation des couches de masse ne peux *pas* être déduite de S_{H} ou $\mathcal{H}_{\mathsf{H}}$, il faut considérer S_{H} *avec* l'équation des couches de masse.

Maintenant, en oubliant la constante $-{}^1\!/_2\,m\,c^2$ dans $S_{\mathsf{H}}^{\text{libre}}$ et repassant (avec $\pi^\mu = m\,\dot{x}^\mu$) dans cadre lagrangien, on obtient une action alternative

$$
\boxed{ S_{\text{libre}}^{(2)}[x^\alpha] = \int \frac{1}{2}\,m\,\eta_{\mu\nu}\,\dot{x}^\mu\,\dot{x}^\nu\,\mathrm{d}\tau } = \int \frac{1}{2}\,m\,\tilde{u}^2\,\mathrm{d}\tau \tag{16}
$$

qui ressemble furieusement au lagrangien newtonien d'une particule libre. En pratique, cette action donne les bons résultats (équation des géodésiques, cf. (14), mouvement dans un champ EM…). Attention : comme pour $S_{\mathsf{H}}^{\text{libre}}$, cette action est "on-shell" dans le sens où elle n'est valable que sur la couche de masse : il faut la considérer *avec* l'équation des couches de masse ($\tilde{u}^2 = -c^2$), que l'on ne peut pas redémontrer à partir de $S_{\text{libre}}^{(2)}$! En fait, la contrainte de l'équation des couches de masse est caché dans cette action. Autrement dit $S_{\text{libre}}^{(2)}$ n'est *pas invariante par reparamétrisation*. L'action $S = -mc\int\sqrt{-\dot{x}_\mu\,\dot{x}^\mu}\,\mathrm{d}\lambda$ est, elle, "off-shell" dans le sens où on la minimise sans contraite, sur tout l'espace des trajectoires, et à partir de laquelle on dérive l'équation des couches de masse.

4. On a donc $\pi_\mu\,\dot{x}^\mu = \mathcal{L}$. Si à ce stade, on prend une paramétrisation affine et $\pi_\mu = m\,\dot{x}_\mu$, on tombe tout de suite sur l'absurdité "$\mathcal{L} = m\,\dot{x}_\mu\,\dot{x}^\mu$", qui redonnerait $\pi_\mu = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{x}^\mu} = 2\,m\,\dot{x}_\mu \neq \pi_\mu$. Bref, il ne faut pas faire n'importe quoi.

5. On peut aussi justifier ce choix pour Λ en comparant avec l'action (2) : soit $(\pi_\alpha(\lambda), x^\alpha(\lambda))$ une trajectoire solution. Avec $\dot{x}^\alpha = 2\,\Lambda\,\pi^\alpha$ et $\eta^{\mu\nu}\pi_\mu\pi_\nu + m^2c^2$,

$$
S|_{\text{traj}} = \int \mathrm{d}\lambda \left(2\,\Lambda\,\eta^{\mu\nu}\pi_\mu\pi_\nu \right) = -2m^2c^2 \int \mathrm{d}\lambda\Lambda(\lambda)
$$

D'autre part, $S|_{\text{traj}} = -mc^2\int\mathrm{d}\tau$. En identifiant les actions, on est ainsi amené à prendre $\Lambda(\tau) = \frac{1}{2\,m}$.