Les distances de l'univers

La notion de distance est au centre de la cosmologie. L'univers est en expansion, donc l'univers a une histoire. Et pourtant, cette expansion, qui n'est qu'une histoire de *distances*, est sans doute la notion la plus difficile à comprendre en cosmologie.

Tout part d'une observation :

$$\boxed{\text{Les spectres des objets éloignés sont décalés vers le rouge, et d'autant plus qu'ils sont éloignés.}}$$

Plus précisemment, si on définit le redshift $z = \Delta\lambda_{\mathsf{obs}} / \lambda_{\mathsf{e}} = \lambda_{\mathsf{obs}} / \lambda_{\mathsf{e}} - 1$ d'un objet, on observe (dans l'univers proche en tout cas) une **loi de Hubble** :

$$\boxed{c\,z = H_0\,d}$$

entre le redshift et la distance d. Toute la diffuculté de l'établissement de cette loi est dans la mesure de d, qui n'est pas du tout facile (*distance ladder*). Mais c'est un travail d'astronome, et il n'y a a priori pas de question sur la *nature* de cette distance (en tout cas pas plus que la distance entre deux cailloux) tant que l'on ne dépasse pas une dizaine de Mpc (une dizaines de distances inter-galactiques).

Le but premier de la cosmologie est d'*expliquer* cette observation. On pourrait tout à faire dire que, simplement, c'est le résulat d'un effet Doppler, et donc d'une *vitesse* v_{r} (dite de récession) :

$$1 + z = \gamma\left(1 + \frac{v_{\mathsf{r}}}{c}\right) \quad \Longrightarrow \quad c\,z \simeq v_{\mathsf{r}} \quad \Longrightarrow \quad v_{\mathsf{r}} = H_0\,d$$

Sauf que ça impliquerait un grand sacrifice, celui de mettre la Terre au centre de l'univers. La cosmologie propose une alternative, qui respecte le *principe copernicien*, mais nécessite la relativité générale :

$$\boxed{\text{C'est l'espace lui même qui s'étend.}}$$

Il faut imaginer l'espace comme un ballon qui enflerait avec le temps, et à la surface duquel sont placées les galaxies. Dessinons un quadrillage sur le ballon, qui définit les *coordonnées comobiles* x, y, z. Sans expansion, $\chi^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$ représenterait la distance physique entre deux objets (c'est-à-dire mesurée par une règle), valable toujours et tout le temps. Mais si le ballon est en expansion, ces coordonnées comobiles, cette grille, ne sont plus reliés à la "distance physique". Une question redoutable vient tout de suite à l'esprit : si l'espace lui même est en expension, les étoiles aussi, nous aussi, les atomes aussi ? On ne peut pas mesurer un décalage vers le rouge des spectres si tout s'étend, y compris les atomes d'hydrogène et cie. qui produisent les raies.

Stop. Il faut définir proprement ces concepts : en restant dans le flou des mots, on se perd dans des questions mal posées.

→ Un univers FLRW plat est un espace-temps défini par la métrique FLRW :

$$\boxed{\mathrm{d}s^2 \;=\; -c^2\,\mathrm{d}t^2 + a^2(t)\,\mathrm{d}\chi^2} \quad \text{où} \quad \mathrm{d}\chi^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$$

→ La **distance physique instantannée** entre deux objets est donnée par la métrique à t constant :

$$\boxed{d_{A\text{-}B}} \;=\; \int_A^B \sqrt{\mathrm{d}s^2|_t} \;=\; a(t)\int_A^B \mathrm{d}\chi^2 \;\boxed{= a(t)\,\Delta_{A\text{-}B}\chi}$$

On parle de distance *physique* car c'est celle que mesure une règle rigide, cf. ci-dessous.

→ Un **objet comobile** est tel que $\dot{x}=\dot{y}=\dot{z}=0$. Alors $\mathrm{d}s^2=-c^2\,\mathrm{d}t^2$ sur sa ligne d'univers, et son temps propre est alors $\boxed{t=\tau_{\text{com}}}$. On voit donc que *les repères comobiles sont privilégiés*, et que la coordonnée t est simplement le temps propre, *global*, des objets comobiles, du *fluide cosmologique*.

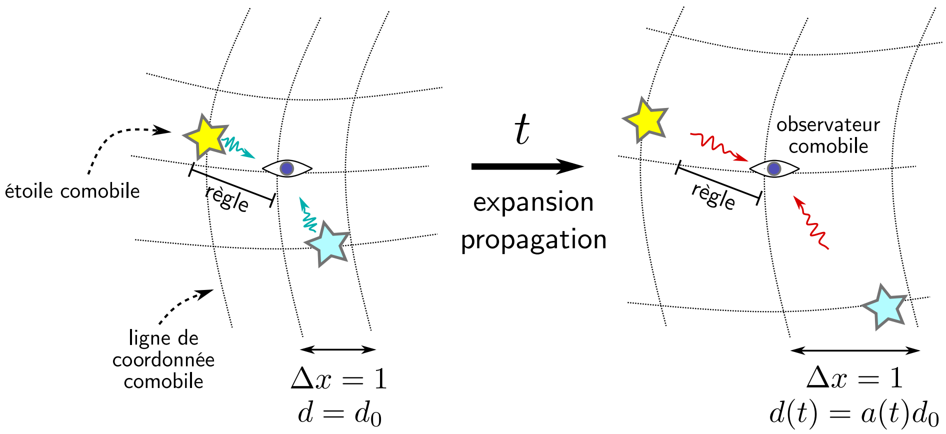


Figure 1. Illustration de l'espace-temps FLRW avec des objets comobiles émettant des signaux lumineux qui sont redshiftés.

Maintenant que ces bases relativistes sont posés, on peut discuter.

De toute évidence, si un objet lointain nous envoyait un photon et un atome d'hydrogène, *l'atome serait inchangé tandis que le photon serait redshifté*. Cela peut sembler profondemment étrange. La réponse correcte est que l'atome d'hydrogène est un système lié, alors que le photon est libre. Soit. Mais pourquoi diable les interactions viennent "briser" la comobilité des constituants ? Parce que **les interactions s'expriment avec la distance physique, pas la distance comobile**. C'est le **principe de relativité** qui impose ça : les lois physiques doivent être invariantes, donc s'exprimer à partir de l'unique invariant : $\mathrm{d}s$. Ainsi, notre atome d'hydrogène garde son rayon de Borh[1], et ne s'étire pas avec le fluide cosmologique. Ce qui est plutôt étonnant, en fait, c'est que le photon soit redshifté ! On va le démontrer (§1.1).

On est en mesure de dire ce que représente réellement la distance physique $d_{A\text{-}B}$: c'est la distance que mesure une règle solide entre les objets A et B. Si A et B sont *comobiles* ($\Delta_{A\text{-}B}\chi$ constant), la règle initialement de la bonne longueur ne va pas le rester, comme illustré sur la figure, car sa longueur d_0 est fixe (la distance entre ses atomes constituants est fixe), mais la distance $d_{A\text{-}B}=a(t)\,d_0$, elle, a augmenté.

→ *La cosmologie* FLRW *explique bien l'expansion de l'univers*

Décrire l'univers comme un espace-temps muni d'une métrique n'a rien d'évident, et c'est, en toute rigueur, une explication parmi d'autres[2], une modélisation de l'univers parmi d'autres, qui est néanmoins largement acceptée au vu du succès de ce modèle pour l'explications d'autres observations. L'univers FLRW est la brique de base à partir de laquelle se fonde toutes les théories cosmologiques modernes.

1. Toutefois, les *variations* de $a(t)$ peuvent tout à fait rentrer dans les équations régissant la matière, et donc jouer sur la taille de notre atome ou de notre règle. En fait, $\dot{a}$ ne joue pas car c'est une déviation du premier ordre à $\mathbb{M}^4$, et donc *effaçable* ("principe d'équivalence"). Seules les déviations du second ordre, c'est à dire $\ddot{a}$, peuvent jouer : ce sont les *effets de marrée*, dues à l'accélération de l'expension. Il *faut alors démontrer* que, avec les valeurs de $\ddot{a}$ en présence, les effets sont négligeables. C'est le cas, et ce n'est pas simple à montrer en détails. On peut toutefois remarquer qu'il y a une séparation très grande des temps caractéristiques : $H_0^{-1}\approx 10^{10}\,\mathrm{ans} \ggg t_{\text{Bohr}}=a_0/\alpha c \approx 10^{-11-8}\,\mathrm{s}$. Plus de détails :
   - On what does not expand in an expanding universe (oscill. harm.) : `https://arxiv.org/abs/1307.5818`
   - Size of a hydrogen atom in the expanding universe : `https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0264-9381/16/4/020`

2. Autres explications : effet Doppler, théorie de la "lumière fatiguée", redshift gravitationnel dans un espace de de Sitter…

1. Distances observables

Malheureusement, on ne dispose pas de règles de cette taille, et c'est toute la difficulté de l'astrophysique à échelle cosmologique. On ne peut se baser que sur des signaux lumineux, qui ont une vistesse de propagation finie : on observe à t_0 un signal émis à un temps antérieur t_e. On va construire deux distances observables que l'on reliera à la distance physique, avc la métrique FLRW pour un espace temps potentiellement courbe :

$$\boxed{\mathrm{d}s^2 = -c^2\,\mathrm{d}t^2 + a^2(t)\left(\mathrm{d}\chi^2 + f_\kappa^2(\chi)\,\mathrm{d}\Omega^2\right)} \quad \text{avec} \quad f_\kappa(\chi) = \begin{cases} \sin\chi & \text{si } \kappa = +1 \\ \chi & \text{si } \kappa = 0 \\ \sinh\chi & \text{si } \kappa = -1 \end{cases}$$

et $\mathrm{d}\Omega^2 = \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2$ (géométrie de courbure respectivement positive, nulle et négative). Un repère comobile est encore à χ constant, et on a encore $d_{A\text{-}B} = a(t)\,\Delta_{A\text{-}B}\chi$.

La lumière se propage le long des géodésiques radiales nulles $\mathrm{d}s = 0$ et $\mathrm{d}\Omega = 0$ [todo]. Ainsi,

$$\mathrm{d}s^2|_\text{light} = -c^2\,\mathrm{d}t^2 + a^2(t)\,\mathrm{d}\chi^2 = 0$$

1.1. Propagation et redshift de la lumière

Soit une onde émise en χ_e à un temps t_e, et notons Δt_e et Δt_obs sa période (temps entre deux crêtes) respectivement à l'émission et à la réception. Puisque, sur son trajet,

$$\frac{c\,\mathrm{d}t}{a(t)} = \mathrm{d}\chi \quad \text{(géodésique nulle)} \tag{1}$$

est indépendant du temps, cette quantité est conservée avec la propagation de l'onde. Ainsi,

$$\frac{c\,\Delta t_\mathrm{e}}{a(t_\mathrm{e})} = \frac{c\,\Delta t_\mathrm{obs}}{a(t_\mathrm{obs})} \quad \text{donc} \quad \frac{\lambda_\mathrm{obs}}{\lambda_\mathrm{e}} = \frac{a(t_\mathrm{obs})}{a(t_\mathrm{e})} = \frac{a_0}{a_\mathrm{e}} \tag{2}$$

en terme de longueur d'onde $\lambda = c\,\Delta t$. L'univers étant en expansion, $a_0 > a_\mathrm{e}$, on note

$$\frac{\lambda_\mathrm{obs}}{\lambda_\mathrm{e}} =: 1 + z$$

où z est le *décalage vers le rouge* de l'onde, ou **redshift**. En pratique, on regarde des spectres atomiques ou moléculaires. On connais λ_e car c'est une longueur d'onde d'un spectre caractéristique (mais reshifté) d'un atome ou d'une molécule qu'on étudie sur Terre, où l'on mesure λ_0. Heureusement,

$$\lambda_0 = \lambda_\mathrm{e}$$

En effet, les équations de la physique atomique et moléculaire sont les mêmes :

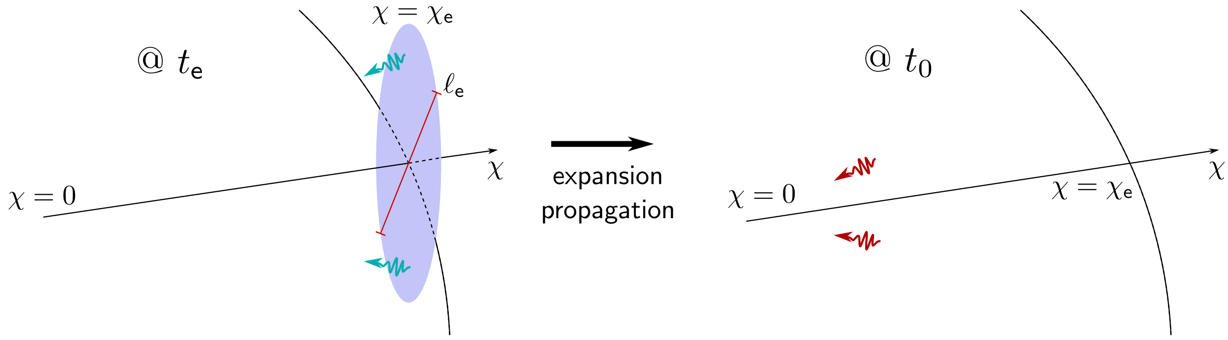
- $e, \hbar, m_e, \ldots$ constantes spatialement et dans le temps
- principe d'équivalence : espace-temps localement minkowskien $\to$ les lois qui régissent l'émission des spectres là bas sont les mêmes qui régissent l'émission ici maintenant

Bref, on a démontré que dans un univers FLRW, l'expansion fait subir un décalage vers le rouge des objets comobiles (qui donc *n'a rien à voir avec un effet Doppler* !) :

$$\boxed{1 + z = \frac{\lambda_\mathrm{obs}}{\lambda_0} = \frac{\lambda_\mathrm{obs}}{\lambda_\mathrm{e}} = \frac{a_0}{a_\mathrm{e}}} \tag{3}$$

1.2. Distance angulaire

Supposons que l'on connaisse la taille physique ℓ_{e} d'un objet loingtain (que l'on appelle alors une *règle standard*; par exemple une oscillation BAO gelée à $\ell_{\mathsf{BAO}} \approx 150\,\mathrm{Mpc}$). Ici bas, on l'observe avec une taille angulaire $\Delta\theta$. On note χ_{e} la distance radiale comobile par rapport à nous (nous sommes à $\chi = 0$).



À l'époque, sur la surface de type espace de l'objet (en bleu), on avait sur un diamètre

$$\ell_{\mathsf{e}} \overset{\text{def}}{=} \int_{\text{diam}} \sqrt{\mathrm{d}s^2|_{t_{\mathsf{e}},\chi_{\mathsf{e}}}} = \int_{\text{diam}} a(t_{\mathsf{e}})\, f_\kappa(\chi_{\mathsf{e}})\, \mathrm{d}\theta = a(t_{\mathsf{e}})\, f_\kappa(\chi_{\mathsf{e}})\, \Delta\theta_{\mathsf{e}}$$

Puisque $\mathrm{d}\theta|_{\text{light}} = 0$, la taille angulaire est conservée : $\Delta\theta \equiv \Delta\theta_{\mathsf{e}}$ [todo]. Ainsi,

$$\boxed{\ell_{\mathsf{e}} = a(t_{\mathsf{e}})\, f_\kappa(\chi_{\mathsf{e}})\, \Delta\theta}$$

Par analogie avec la géométrie euclidienne où $d = \frac{\ell_{\mathsf{e}}}{\tan(\Delta\theta)} \simeq \frac{\ell_{\mathsf{e}}}{\Delta\theta}$ est la distance à l'objet, on définit la *distance angulaire*

$$d_{\mathsf{A}} := \frac{\ell_{\mathsf{e}}}{\Delta\theta} \quad \text{et alors} \quad d_{\mathsf{A}} = a(t_{\mathsf{e}})\, f_\kappa(\chi_{\mathsf{e}})$$

Pour un univers plat ($\kappa = 0$, ce qui semble être le cas de notre univers), on a $f_\kappa(\chi) = \chi$ donc $d_{\mathsf{A}} = a(t_{\mathsf{e}})\, \chi_{\mathsf{e}}$. On reconnait la distance physique entre la surface et le point $\chi = 0$ *au temps d'émission* :

$$\boxed{d_{\mathsf{A}} = \frac{\ell_{\mathsf{e}}}{\Delta\theta} \overset{\kappa=0}{=} d_{\text{phys}}(\text{ici-surface @}\, t_{\mathsf{e}})}$$

De plus, puisque $d_{\text{phys}}(\text{now}) = a_0\, \chi_{\mathsf{e}} = \frac{a_0}{a_{\mathsf{e}}} d_{\text{phys}}(\text{@}\, t_{\mathsf{e}})$, on a aussi

$$\boxed{d_{\mathsf{A}} \overset{\kappa=0}{=} \frac{a_{\mathsf{e}}}{a_0} d_{\text{phys}}(\text{now}) = \frac{1}{1+z} d_{\text{phys}}(\text{now})}$$

1.3. Distance-luminosité

On observe un objet de luminosité absolue L (en $\mathrm{J/s}$) connue (que l'on appelle alors une *chandelle standard*; par exemple une supernovae de type 1A), avec un flux lumineux observé φ (en $\mathrm{J/s/m^2}$). On suppose que l'absorption sur le trajet jusqu'à nous est négligeable : le nombre de photons est conservé.

Dans un espace euclidien, on aurait alors $\varphi = \frac{L}{4\pi\, d^2}$. Définissons donc la **distance-luminosité**

$$d_{\mathsf{L}} := \sqrt{\frac{L}{4\pi\, \varphi}}$$

Un front d'onde émis en t_{e} à une distance comobile χ_{e} nous atteint en t_0 et est réparti sur une surface

$$S = \iint \mathrm{d}s^2|_{t_0,\chi_{\mathsf{e}}} = a_0^2\, f_\kappa^2(\chi_{\mathsf{e}}) \iint \mathrm{d}\Omega^2 = 4\pi\, a_0^2\, f_\kappa^2(\chi_{\mathsf{e}})$$

donc par conservation du nombre de photons, le nombre surfacique de photons reçus n_{obs} pendant Δt_0 est

$$n_{\mathsf{obs}} = \frac{N_{\mathsf{e}}}{S} \quad \text{avec} \quad N_{\mathsf{e}} = \Delta t_{\mathsf{e}} \frac{L}{h\nu_{\mathsf{e}}}$$

où Δt_{e} est la durée d'émission des photons, qui vaut (cf. 2, la lumière se propageant selon $\mathrm{d}s^2 = 0$)

$$\Delta t_{\mathsf{e}} = \frac{a_{\mathsf{e}}}{a_0} \Delta t_0$$

Donc, en prenant en compte à la fois le redshift (3) et la dilution temporelle du nombre de photons,

$$\varphi = h\nu_0 \frac{n_{\mathsf{obs}}}{\Delta t_0} = \frac{h\nu_0}{h\nu_{\mathsf{e}}} \frac{\Delta t_{\mathsf{e}}}{\Delta t_0} \frac{L}{S} = \frac{a_{\mathsf{e}}}{a_0} \frac{a_{\mathsf{e}}}{a_0} \frac{L}{4\pi\, a_0^2\, f_\kappa^2(\chi_{\mathsf{e}})} \quad \text{d'où} \quad a_0^2\, f_\kappa^2(\chi_{\mathsf{e}}) = \left(\frac{a_{\mathsf{e}}}{a_0}\right)^2 d_{\mathsf{L}}^2$$

donc

$$\boxed{d_{\mathsf{L}} = \sqrt{\frac{L}{4\pi\,\varphi}} = a_0\, f_\kappa(\chi_{\mathsf{e}}) \frac{a_0}{a_{\mathsf{e}}} = a_0\, f_\kappa(\chi_{\mathsf{e}})\,(1+z)}$$

On aussi remarque que

$$d_{\mathsf{L}} = \left(\frac{a_0}{a_{\mathsf{e}}}\right)^2 d_{\mathsf{A}} = (1+z)^2\, d_{\mathsf{A}}$$

Dans un univers plat, $f_\kappa(\chi) = \chi$ donc $a_0\, f_\kappa(\chi_{\mathsf{e}}) = a_0\, \chi_{\mathsf{e}} = d_{\mathsf{phys}}(\mathsf{now})$, et alors

$$\boxed{d_{\mathsf{L}} \overset{\kappa=0}{=} \frac{a_0}{a_{\mathsf{e}}} d_{\mathsf{phys}}(\mathsf{now}) = (1+z)\, d_{\mathsf{phys}}(\mathsf{now})}$$

2. Relations distance-redshift

Pour le moment, on a seulement défini des distances dans un cadre général. On les a mis en relation avec la distance physique, qui est innacessible directement. La loi d'évolution du facteur d'échelle, qui dépend du modèle d'univers choisi, va nous permettre d'exprimer la distance physique en fonction du redshift, qui est observable directement. Il faut connaitre l'histoire de l'univers pour pouvoir interpréter les observations, surtout loin dans le passé. C'est à la fois une difficulté majeure pour les astronomes et une façon de vérifier que notre description théorique de l'univers est cohérente avec la réalité.

2.1. Loi de Hubble-Lemaître

Considérons un signal émis depuis un objet comobile en χ_{e}

$$\frac{c\,\mathrm{d}t}{a(t)} \overset{\text{light}}{=} \mathrm{d}\chi \quad \Rightarrow \quad \chi_{\mathsf{e}} = \int_{t_{\mathsf{e}}}^{t_0} \frac{c\,\mathrm{d}t}{a(t)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{d_{\mathsf{phys}}(\mathsf{now}) = a_0\, \chi_{\mathsf{e}} = c \int_{t_{\mathsf{e}}}^{t_0} \frac{a_0}{a(t)}\, \mathrm{d}t} \tag{4}$$

On préfère souvent intégrer selon z, car t n'est pas pratique ni accessible directement. Notons $H = \dot{a}/a$.

$$\frac{a_0}{a} = 1+z \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{a_0} H = \frac{\dot{a}}{a_0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{a}{a_0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{1}{1+z} = \frac{-1}{(1+z)^2} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}t = \frac{1}{H} \frac{a_0}{a} \frac{-\mathrm{d}z}{(1+z)^2} = \frac{1}{H} \frac{-\mathrm{d}z}{1+z}$$

donc

$$a_0\, \chi_{\mathsf{e}} = c \int_{t_{\mathsf{e}}}^{t_0} \frac{a_0}{a}\, \mathrm{d}t = c \int_{z_{\mathsf{e}}}^{z_0} (1+z) \frac{1}{H} \frac{-\mathrm{d}z}{1+z} = -c \int_{z_{\mathsf{e}}}^{0} \frac{\mathrm{d}z}{H} \tag{5}$$

Ainsi,

$$\boxed{d_{\mathsf{phys}}(\mathsf{now}) = c \int_0^{z_{\mathsf{e}}} \frac{\mathrm{d}z}{H(z)}} \tag{6}$$

Pour avoir une relation explicite, il faut connaitre la loi d'évolution de H. On peut néanmoins développer H avec $t = t_0 + \delta t$:

$$H(z) \;=\; H(z=0) + z\,\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}z}(z=0) + o(z) \;=\; H_0 + H_0\,(1+q_0)\,z + o(z) \quad \text{avec} \quad q = -\frac{\ddot{a}\,a_0}{\dot{a}^2}$$

le **paramètre de décélération**. En effet,

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}z}\,\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{a_0}{a}\right)^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\dot{a}}{a} = \left(-\frac{a_0\,\dot{a}}{a^2}\right)^{-1}\frac{\ddot{a}\,a - \dot{a}^2}{a^2} = -\frac{\ddot{a}\,a - \dot{a}^2}{a_0\,\dot{a}} = \frac{a}{a_0}\,\frac{\dot{a}}{a}\left(1 - \overbrace{\frac{\ddot{a}\,a_0}{\dot{a}^2}}^{-q}\,\frac{a}{a_0}\right)$$

ce qui donne, en $z=0$ ($a=a_0$), $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}z}(0) = H_0\,(1+q_0)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
d_{\mathsf{phys}}(\mathsf{now}) &= c\int_0^{z_{\mathsf{e}}}\frac{\mathrm{d}z}{H_0 + H_0\,(1+q_0)\,z + o(z)}\\
&= \frac{c}{H_0}\int_0^{z_{\mathsf{e}}}\frac{\mathrm{d}z}{1 + (1+q_0)\,z + o(z)}\\
&= \frac{c}{H_0}\int_0^{z_{\mathsf{e}}}\left(1 - (1+q_0)\,z + o(z)\right)\mathrm{d}z\\
&= \frac{c}{H_0}\left(z_{\mathsf{e}} - (1+q_0)\,\tfrac{1}{2}\,z_{\mathsf{e}}^2 + o(z_{\mathsf{e}})^2\right)
\end{aligned}$$

On obtient la **loi de Hubble** à l'ordre 2 :

$$\boxed{\tfrac{1}{c}\,H_0\,d_{\mathsf{phys}}(\mathsf{now}) \;=\; z - \frac{1+q_0}{2}\,z^2 + o(z)^2}$$

À faible redshift, distance physique et redshift sont proportionnels, reliés par la constante de Hubble H_0 :

$$H_0\,d_{\mathsf{phys}}(\mathsf{now}) \;\simeq\; c\,z$$

comme si on avait une vitesse de récession $v_{\mathsf{r}} = H_0\,d$. Évidemment, pour un objet non-comobile, avec une vitesse péculière non nulle, le redshift observé est entaché d'un (vrai) effet Doppler supplémentaire, qu'on cherche à éliminer d'une façon ou d'une autre.

À plus grand redshift, les écarts à cette linéarité nous permettent d'accéder au paramètre de décélération $q_0 = -\frac{\ddot{a}_0\,a_0}{\dot{a}_0}$ qui mesure l'*accélération de l'expansion de l'univers*.

On peut aussi retrouver la loi de Hubble en restant avec la variable t. En effet, on montre[3] que

$$z \;=\; (t_0 - t_{\mathsf{e}})\,H_0\cdot\left(1 + \left(1 + \tfrac{1}{2}q_0\right)H_0\,(t_0 - t_{\mathsf{e}}) + o(\Delta t)\right)$$

et que

$$d = a_0\,\chi_{\mathsf{e}} = c\,(t_0 - t_{\mathsf{e}})\cdot\left(1 + \tfrac{1}{2}H_0\,(t_0 - t_{\mathsf{e}}) + \tfrac{1}{3}\left(1 + \tfrac{1}{2}q_0\right)H_0^2\,(t_0 - t_{\mathsf{e}})^2 + o(\Delta t)^2\right)$$

En exprimant d en fonction de $z + o(z) = H_0\,(t_0 - t_{\mathsf{e}})$, on retrouve la loi de Hubble.

2.2. Horizons

Schémas + analogie avec les accélérations constantes dans $\mathbb{M}^4$

Si l'age de l'univers est fini, c'est à dire la métrique n'est définie qu'à partir d'un temps $t_{\mathsf{ini}} \neq -\infty$ ($a(t_{\mathsf{ini}}) = 0$ pour un big bang), alors il peux exister des points de l'univers qui sont suffisement éloignés pour que tout lumière/information émise à t_{ini} et se propageant à la vitesse limite c ($\Leftrightarrow$ géodésique nulle $\mathrm{d}s = 0$) ne puisse nous avoir (encore) atteint. La frontière séparant les points observables et non-observables est alors

$$\chi_{\mathsf{H}} \;=\; \int_{t_{\mathsf{ini}}}^{t_0}\mathrm{d}\chi|_{\mathsf{light}} \;=\; \int_{t_{\mathsf{ini}}}^{t_0}\frac{c\,\mathrm{d}t}{a(t)} \quad\Rightarrow\quad \boxed{d_{\mathsf{H}} \;=\; a_0\int_{t_{\mathsf{ini}}}^{t_0}\frac{c\,\mathrm{d}t}{a(t)} \;\overset{(6)}{=}\; c\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}z}{H(z)}}$$

3. hubble-dev-a.tm

en terme de distance physique actuelle et pour un big bang ($z_{\mathsf{ini}} = \infty$ car $a_{\mathsf{ini}} = 0$). On l'appelle l'**horizon des particules**. *Tout point au delà de χ_H est causalement déconnecté de nous, mais pourrait le devenir dans notre futur.*

Dans un univers dominé par la matière ou le rayonnement, d_{H} est de l'ordre de c/H_0. Dans un univers de de Sitter, avec constante cosmologique seulement, il n'y a pas de temps initial (age infini) et $d_{\mathsf{H}} = \infty$.

Supposons qu'un objet émette un signal. Peut-il nous atteindre ? Considérons un éventuel collapse final à t_{fin} ($t_{\mathsf{fin}} = \infty$ si expension infinie, ce qui est le cas dans ΛCDM). Alors on ne pourra jamais reçevoir un signal de tout point plus éloigné que

$$\chi_{\mathsf{E}} = \int_{t_0}^{t_{\mathsf{fin}}} \mathrm{d}\chi|_{\mathsf{light}} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{d_{\mathsf{E}} = a_0 \int_{t_0}^{t_{\mathsf{fin}}} \frac{c\,\mathrm{d}t}{a(t)}}$$

L'état actuel ou futur d'un point au delà de χ_E est inobservable pour toujours. Mais son état passé peut déjà être (ou peut devenir) observable. Comme lorsqu'un objet rentre dans un trou noir et que son état est inobservable au delà de l'horizon $\to$ on appelle d_{E} l'**horizon des évènements**.

Dans un espace euclidien (et dans un espace dominé par la matière ou le rayonnement dans le futur), tout signal peut nous atteindre et il n'y a pas d'horizon des évènements. Mais dans un espace en expansion accélérée (par exemple un univers dominé dans le futur par Λ, ce qui est notre cas), $a(t)$ croit suffisemment vite pour que $d_{\mathsf{E}} \neq \infty$, et d_{E} est de l'ordre de c/H_0 (*rayon de Hubble*) $\to$ à partir de ce rayon, le fluide cosmologique (la grille comobile) se déplace à une vitesse de récession $v_{\mathsf{r}} > c$, donc aucun signal ne peut atteindre cette zone.

2.3. Univers dominé par la matière froide, la courbure et la constante cosmologique