

Suite récurrente, modèle logistique, introduction au chaos

Considérons une fonction $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathcal{D}$. On appelle suite récurrente de *fonction itératrice* f et de *germe* a , si elle existe, l'unique suite (u_n) déterminée par les conditions $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. Pour qu'une telle suite existe, il faut que $u_n \in \mathcal{D}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, de sorte de pouvoir calculer u_{n+1} . Une condition suffisante d'existence est qu'on ait tout simplement $f(x) \in \mathcal{D}$ pour tout $x \in \mathcal{D}$. La suite (u_n) a alors pour terme général $u_n = f^{\circ n}(a)$ en notant $f^{\circ n} = f \circ f \circ \dots \circ f$ (produit à n termes). L'application $f^{\circ n}$ est appelée *$n^{\text{ième}}$ itérée* de la fonction f . En pratique, il est rare de savoir expliciter concrètement $f^{\circ n}(x)$, ceci empêche d'étudier la suite (u_n) à partir de l'expression de son terme général. Pour étudier celle-ci, il faut alors adopter des démarches adaptées. Dans cet article, nous allons présenter des outils descriptifs et les appliquer à l'étude du modèle logistique.

Pour la suite, on se donne une fonction itératrice $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ de classe \mathcal{C}^1 , un germe $a \in \mathcal{D}$ et on étudie la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

Représentation :

Pour visualiser l'évolution de cette suite, il est usuel de représenter graphiquement la courbe d'équation $y = f(x)$ accompagnée de la première bissectrice du plan (droite d'équation $y = x$). Le germe $u_0 = a$ étant donné en abscisse, le point correspondant de la courbe $y = f(x)$ a pour ordonnée $u_1 = f(a)$. En prenant alors appui sur la première bissectrice, on peut reporter u_1 en abscisse puis reprendre le processus pour déterminer $u_2, u_3 \dots$. C'est ainsi qu'on parvient **aux figures classiques** :

[figure 1 et figure 2]

Point fixe, point attractif, point répulsif :

Si la suite (u_n) converge vers un réel $x_0 \in \mathcal{D}$, en passant la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ à la limite, on obtient $f(x_0) = x_0$. Un tel point x_0 est dit *point fixe* de la fonction f . Graphiquement, on observe alors une accumulation des termes de la suite vers l'abscisse d'un point intersection de la courbe $y = f(x)$ et de la première bissectrice.

Considérons un point fixe x_0 de f , nous convenons d'appeler voisinage de x_0 tout domaine de la forme $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap \mathcal{D}$ avec $\alpha > 0$.

S'il existe un voisinage de x_0 tel que pour tout germe dans celui-ci, il y a convergence de la suite vers x_0 , le point x_0 est dit *attractif*. En revanche, le point x_0 est dit *répulsif* lorsqu'il existe un voisinage de x_0 tel que, pour tout germe dans celui-ci, la suite s'éloigne de x_0 jusqu'à sortir de ce voisinage au bout d'un certain temps (ce qui ne lui interdit pas d'y revenir plus tard).

Notons $m = f'(x_0)$. Pour tout $x \in \mathcal{D}$, le théorème des accroissements finis assure l'existence d'un réel ξ_x intermédiaire à x_0 et x tel que $f(x) - x_0 = f'(\xi_x)(x - x_0)$. Exploitions cette relation :

Supposons $|m| < 1$ et considérons un réel ρ tel que $|m| < \rho < 1$. Il existe un voisinage de x_0 sur lequel $|f'(x)| \leq \rho$. Pour tout x dans ce voisinage on a alors $|f(x) - x_0| \leq \rho |x - x_0|$. On observe alors que x_0 est un point attractif.

En fait, on peut même voir que si $m > 0$ alors la suite va converger vers x_0 avec une représentation en escalier, ceci car la fonction itératrice est alors croissante au voisinage de x_0 (**c'est le cas de la figure 1**). En revanche, si

$m < 0$, il y a convergence avec un enroulement en colimaçon car cette fois-ci la fonction itératrice est décroissante au voisinage de x_0 (c'est le cas de la figure 2).

Notons que plus $|m|$ est petit, plus la convergence vers x_0 est rapide. En particulier, lorsque $m = 0$, on dit que le point x_0 est super attractif.

Supposons maintenant $|m| > 1$. Par la même démarche que ci-dessus, on observe cette fois-ci un éloignement systématique au voisinage de x_0 , le point est répulsif.

Cycle attractif, cycle répulsif.

Il n'y a malheureusement pas toujours convergence des suites récurrentes mais parfois apparaissent des phénomènes périodiques.

On appelle cycle de longueur p de la fonction f toute suite x_1, x_2, \dots, x_p d'éléments deux à deux distincts de \mathcal{D} tels que $x_2 = f(x_1), \dots, x_p = f(x_{p-1}), x_1 = f(x_p)$.

Les éléments d'un cycle de longueur p sont points fixes de $f^{\circ p}$.

Si le germe de la suite récurrente appartient à un cycle de longueur p , celle-ci s'avérera être p périodique.

Un cycle de longueur p est dit attractif (resp. répulsif) ssi chacun de ses points est point attractif (resp. répulsif) de $f^{\circ p}$. Lorsque le germe est choisi proche d'un terme d'un cycle attractif, la suite récurrente correspondante paraît « converger vers une suite périodique », on dit alors qu'elle est asymptotiquement périodique.

Pour déterminer la nature d'un cycle x_1, x_2, \dots, x_p , on introduit $m = f'(x_1)f'(x_2)\dots f'(x_p)$ appelé coefficient multiplicateur du cycle.

En fait $m = (f^{\circ p})'(x_1) = (f^{\circ p})'(x_2) = \dots = (f^{\circ p})'(x_p)$.

Par conséquent, si $|m| < 1$, tous les points du cycle sont attractifs et donc le cycle l'est. En revanche si $|m| > 1$, le cycle est répulsif.

[figure 3]

Modèle logistique

On désire modéliser l'évolution au cours du temps d'une espèce vivant sans prédateurs extérieurs et trouvant sa nourriture en abondance. Pour cela, notons p_n la population (quantifiée par un réel et non un entier) de l'espèce étudiée à la date n . Un premier modèle consiste à évaluer la population à la date $n+1$ par la formule $p_{n+1} = (1 + \alpha)p_n$ avec $\alpha > 0$. Le réel α modélise le taux de progression propre à l'espèce. On obtient rapidement $p_n = (1 + \alpha)^n p_0$ et p_n tend très rapidement vers l'infini.

Ce modèle n'est en fait satisfaisant que pour les petites valeurs de p_n pour lesquelles on veut bien accepter que la population trouve sa nourriture en abondance. Corrigeons celui-ci en ajoutant maintenant l'hypothèse de l'existence d'une population optimale \bar{p} déterminée à partir des conditions extérieures (comme la quantité de nourriture réellement disponible,...) Considérons alors que la population à la date $n+1$ est déterminée par

$p_{n+1} = (1 + \alpha \frac{(\bar{p} - p_n)}{\bar{p}})p_n$. Ce modèle est appelé modèle logistique

Dans cette optique la fonction itératrice considérée est $x \mapsto (1 + \alpha \frac{(\bar{p} - x)}{\bar{p}})x$ et \bar{p} apparaît comme étant un point fixe de celle-ci. Lorsque $p_n > \bar{p}$, on observe que $p_{n+1} \leq p_n$ et lorsque $p_n < \bar{p}$, on a $p_{n+1} \geq p_n$. Le réel \bar{p} apparaît bien comme la population optimale vers laquelle on semble tendre. Notons aussi que si $p_n \ll \bar{p}$, le modèle logistique est proche du modèle initial.

Pour simplifier l'étude posons $u_n = \frac{p_n}{\bar{p}}$ de sorte qu'on ait la relation $u_{n+1} = (1 + \alpha(1 - u_n))u_n$. La fonction itératrice est $f : x \mapsto (1 + \alpha - \alpha x)x$.

Pour que le modèle écologique soit cohérent il faut que la fonction f soit à valeurs positives (de sorte qu'il n'y ait pas de population négative). Cela nous oblige à nous positionner sur $\mathcal{D} = \left[0, \frac{1+\alpha}{\alpha}\right]$. Pour être assuré que les termes de la suite ne sortent pas de ce domaine, il faut que la restriction de f à \mathcal{D} soit à valeurs dans \mathcal{D} . Sachant que f est positive sur \mathcal{D} et que sa valeur maximale est en $\frac{1+\alpha}{2\alpha}$, cela conduit à la condition $\alpha \leq 3$.

Etude de cas particuliers

Etudions l'évolution de (p_n) dans les cas $\alpha = 1$ et $\alpha = 3$.

Pour $\alpha = 1$, la relation étudiée est $u_{n+1} = 2u_n - u_n^2$ avec $u_0 \in \mathcal{D} = [0, 2]$.

Si $u_0 = 0$ alors $u_1 = 0$ puis $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0$.

Si $u_0 = 2$ alors $u_1 = 0$ puis $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 0$.

Reste à étudier le cas général $u_0 \in]0, 2[$. Pour cela introduisons (v_n) définie par $v_n = 1 - u_n$. On a $v_{n+1} = (v_n)^2$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = (v_0)^{2^n}$ avec $v_0 = 1 - u_0 \in]-1, 1[$. Puisque $|v_0| < 1$, $v_n \rightarrow 0$ puis $u_n \rightarrow 1$. On observe ici le comportement attendu de convergence vers la population optimale. Notons de plus qu'ici la convergence est rapide.

Pour $\alpha = 2$, la fonction itératrice est décroissante sur $[3/4, 9/8]$ et est à valeurs dans lui-même. On parvient à montrer que les termes de la suite sont dans cet intervalle à partir d'un certain rang. Les suites (u_{2p}) et (u_{2p+1}) sont monotones et convergentes et ne peuvent tendre que vers 1.

Posons $v_n = u_n - 1$, $v_{n+1} = -v_n - 2v_n^2 \sim -v_n$, $a_n = v_{2n}$, $a_{n+1} = a_n - 8a_n^3 - 8a_n^4$, $\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2} \rightarrow 16$ puis via Césaro

$$\frac{1}{na_n^2} \rightarrow 16 \text{ puis } a_n \sim \frac{1}{4\sqrt{n}}.$$

Pour $\alpha = 3$, la relation étudiée est $u_{n+1} = 4u_n - 3u_n^2$ avec $u_0 \in \mathcal{D} = [0, 4/3]$. Posons $v_n = 3u_n$, on obtient la relation $v_{n+1} = 4v_n - v_n^2 = -(v_n - 2)^2 + 4$. Posons ensuite $w_n = 2 - v_n$, on obtient $w_{n+1} = w_n^2 - 2$. Puisque $u_n \in \mathcal{D}$, on a $w_n \in [-2, 2]$ ce qui permet d'écrire $w_n = 2\cos\theta_n$. La relation de récurrence donne alors $\cos\theta_{n+1} = \cos(2\theta_n)$. Ceci permet alors de montrer $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = 2\cos(2^n\theta_0)$. Cette fois, il n'y a pas convergence mais on observe plutôt une répartition aléatoire des valeurs de u_n à l'intérieur de \mathcal{D} , d'ailleurs cette idée est parfois exploitée pour générer des nombres aléatoires.

Etude qualitative générale

En dehors des cas simples précédents, il est délicat de préciser le comportement de (u_n) . En revanche, on peut le visualiser à l'aide de l'outil informatique. Pour une valeur $\alpha \in]0,3]$ donnée en abscisse, on a représenté **ci-dessous** les points d'ordonnées u_n avec $200 \leq n \leq 250$ (on a choisi, arbitrairement, $u_0 = 0,5$).

Ce dessin permet de visualiser le comportement de (u_n) quand $n \rightarrow +\infty$.

[figure 4]

On observe que pour $0 < \alpha < 2$, il y a convergence de la suite vers 1. En fait, 1 est alors point fixe de la fonction itératrice f avec $f'(1) = 1 - \alpha \in]-1,1[$. Il s'agit donc d'un point attractif. On peut même souligner que celui-ci est super attractif lorsque $\alpha = 1$.

Au-delà de 2, il y a apparition d'un cycle de longueur 2 et donc d'un phénomène périodique. En fait, à ce stade, le point fixe 1 est devenu répulsif alors qu'il apparaît un cycle de longueur 2 avec un coefficient multiplicateur égal à $5 - \alpha^2$. Ce cycle est attractif tant que $\alpha < \sqrt{6} \simeq 2,45$.

Au-delà de $\sqrt{6}$ le cycle de longueur 2 devient répulsif et c'est un cycle de longueur 4 qui prend le relais, puis un cycle de longueur 8, ... Ce phénomène de dédoublement se poursuit jusqu'à la valeur $\alpha \simeq 2,57$ appelée point de Feigenbaum (du nom du mathématicien découvreur du phénomène vers 1970)

Au-delà du point de Feigenbaum la figure devient confuse, il n'y a plus de comportements périodiques visibles, c'est le chaos...

A l'intérieur de ce chaos apparaît néanmoins des ouvertures appelées fenêtres d'ordre. La plus visible est en $\alpha \simeq 2,83$.

Approfondissons la visualisation de celle-ci :

[figure 5]

On observe un cycle de longueur 3, qui se dédouble, etc... Si on s'attarde sur l'une des branches, on observe une figure semblable à la figure initiale. Cette fois c'est le concept fractal qui apparaît...

[figure 6]

Conclusion

Les phénomènes observés, que nous n'allons pas approfondir plus à cause de leur complexité, sont généraux aux itérateurs dits quadratiques. C'est derniers ont couramment pour fonctions itératrices : $x \mapsto x^2 + c$, $x \mapsto \lambda x(1-x)$ ou $x \mapsto (1 + \alpha(1-x))x$. Notons que ces fonctions ne sont ici rien d'autres que des fonctions polynomiales de degré 2 et pourtant celles-ci ont suffi pour introduire des comportements terriblement complexes.

Encadré :

Le modèle logistique a été introduit par le mathématicien belge Pierre-François Verhulst en 1845. La version étudiée ici est une modélisation discrète de l'évolution d'une population. Le modèle continu correspondant est défini par l'équation $y' = \alpha(1-y)y$. L'étude en est plus simple car cette équation différentielle est à variables séparables, on sait donc la résoudre. Les comportements correspondant ne sont alors que des comportements de convergence.

Figure 1 – Itération sous $f(x) = (1 + \alpha(1 - x))x$ avec $\alpha = 0,7$. Convergence en escalier

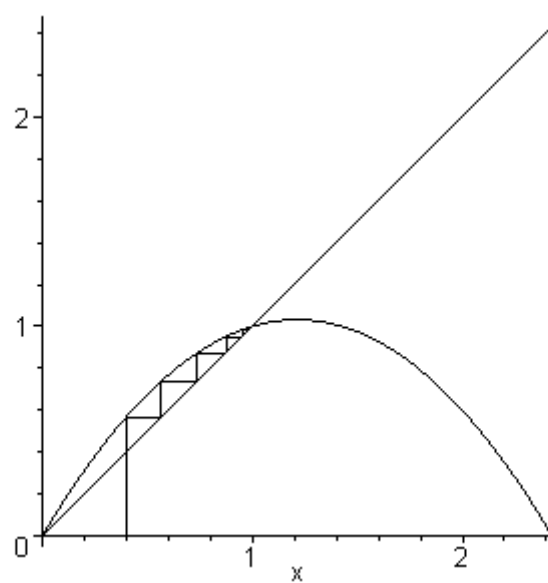


Figure 2 – Itération sous $f(x) = (1 + \alpha(1 - x))x$ avec $\alpha = 1,9$. Convergence en colimaçon

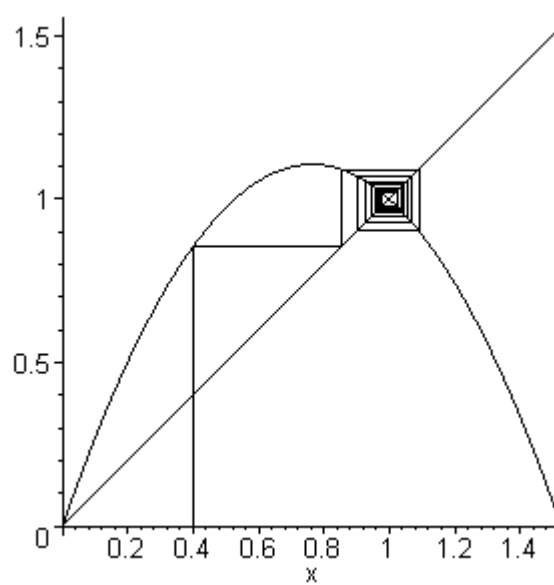


Figure 3 – Itération sous $f(x) = (1 + \alpha(1 - x))x$ avec $\alpha = 2,83$. Cycle de longueur 3

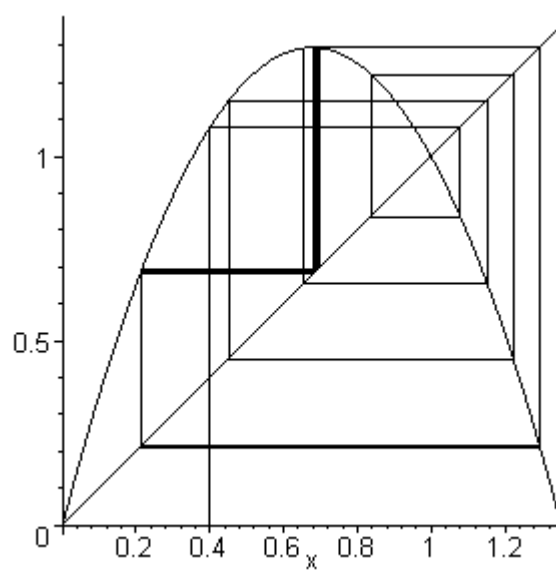


Figure 4 – Diagramme de bifurcation $0 < \alpha \leq 3$.

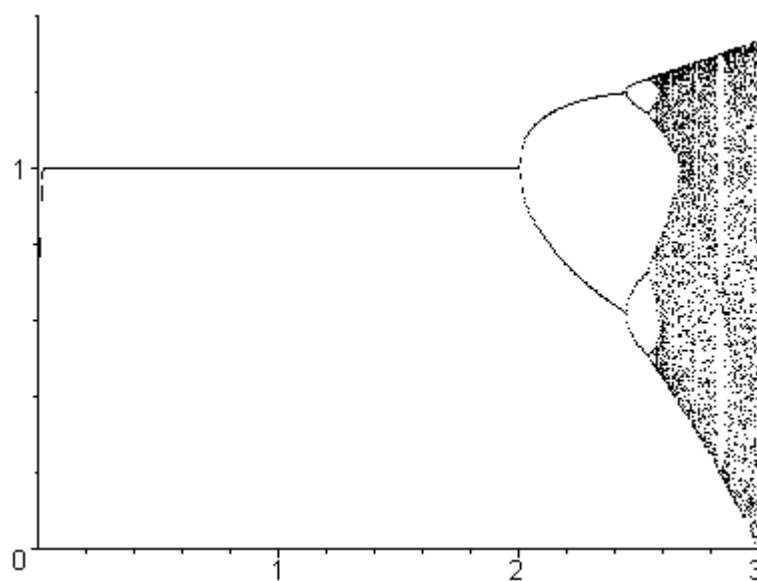


Figure 5 – Diagramme de bifurcation $2,82 \leq \alpha \leq 2,86$.

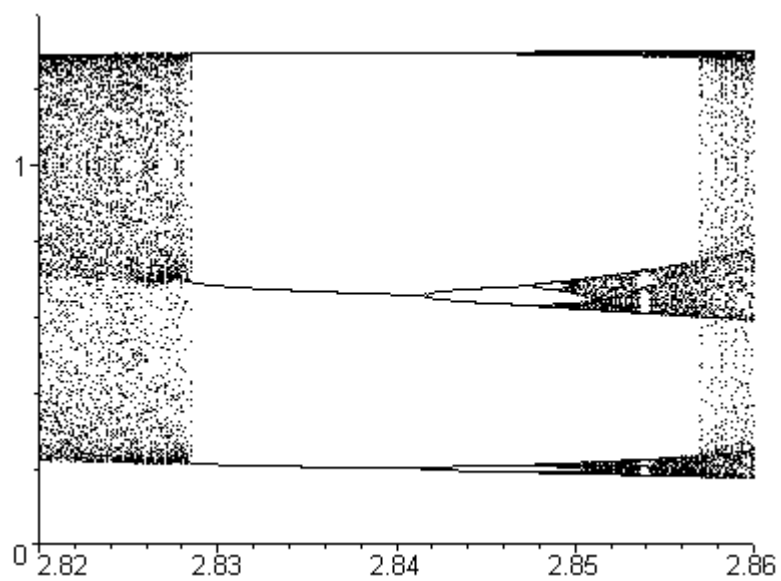


Figure 6 – Diagramme de bifurcation $2,84 < \alpha \leq 2,86$.

