Exercice 1 [02948] [Correction]

(a) Montrer que tout sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ qui n'est pas monogène est dense dans $\mathbb{R}$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Montrer qu'il existe une infinité de $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que
$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

(c) Montrer la divergence de la suite de terme général
$$u_n = \frac{1}{n \sin n}.$$

Exercice 2 [04959] [Correction]
À quelle condition une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ peut-elle s'écrire comme somme de matrices nilpotentes ?

Exercice 3 [04966] [Correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Montrer que A est semblable à $-A$ si, et seulement si, $\mathrm{tr}(A) = \det(A) = 0$.

Exercice 4 [03033] [Correction]
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est nilpotente et qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(0) = 1$ et $B = AP(A)$. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q(0) = 1$ et $A = BQ(B)$.

Exercice 5 [02939] [Correction]
Soient E un espace vectoriel de dimension finie, p et q dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $p \circ q = q$ et $q \circ p = p$. Les endomorphismes p et q sont-ils diagonalisables ? codiagonalisables ?

Exercice 6 [02868] [Correction]
Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle, $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, f et g dans $\mathcal{L}(E)$ tels que
$$f \circ g - g \circ f = af + bg.$$
Montrer que f et g ont un vecteur propre commun.

Exercice 7 [00938] [Correction]
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$ deux à deux distincts dans $\mathbb{C}$. On suppose, pour $1 \le i \le n+1$, que $A + \lambda_i B$ est nilpotente.
Montrer que A et B sont nilpotentes.

Exercice 8 [02980] [Correction]
Soit φ une application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vers $\mathbb{C}$ vérifiant :
$$\forall A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B) \text{ et } \varphi\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \lambda.$$
Montrer que $\varphi = \det$.

Exercice 9 [02675] [Correction]
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.
Déterminer les $f \in \mathcal{L}(E)$ tels que tout sous-espace vectoriel de E stable par f possède un supplémentaire stable.

Exercice 10 [03023] [Correction]
Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.
On note $\mathcal{I}_1 = \left\{P \in \mathbb{C}[X] \mid P(u) = 0\right\}$ et $\mathcal{I}_2 = \left\{P \in \mathbb{C}[X] \mid P(u) \text{ est nilpotent}\right\}$.

(a) Montrer que $\mathcal{I}_1$ et $\mathcal{I}_2$ sont des idéaux non nuls de $\mathbb{C}[X]$.
On note P_1 et P_2 leurs générateurs unitaires respectifs.

(b) Établir un lien entre P_1 et P_2.

(c) Montrer l'existence de $Q \in \mathcal{I}_2$ tel que $u - Q(u)$ est diagonalisable

Exercice 11 [03095] [Correction]
Soit $\Phi \colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ vérifiant
$$\forall A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \Phi(AB) = \Phi(A)\Phi(B) \text{ et } \Phi\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \Phi(I_2).$$

(a) Démontrer que $\Phi(O_2) = 0$.

(b) Si A est nilpotente, démontrer que $\Phi(A) = 0$.

(c) Soient $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et B la matrice obtenue à partir de A en permutant les lignes de A.
Démontrer que $\Phi(B) = -\Phi(A)$.

(d) Démontrer que A est inversible si, et seulement si, $\Phi(A) \neq 0$.

Exercice 12 [02861] [Correction]
Déterminer les valeurs propres de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 13 [03255] [Correction]
Soit

$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & & (b) \\ & \ddots & \\ (a) & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

À quelle condition la matrice M_n est-elle diagonalisable ?
Déterminer alors une base de vecteurs propres

Exercice 14 [03270] [Correction]

(a) Déterminer les entiers k pour lesquelles l'équation

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta} = 1$$

admet au moins une solution $\theta \in \mathbb{R}$.

(b) Soit S_k l'ensemble des suites réelles u telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+k} = u_n + u_{n+k-1}.$$

À quelle condition sur k, S_k contient-il une suite périodique non nulle.

Exercice 15 [02954] [Correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\operatorname{tr}(A^m) \to 0$ quand $m \to +\infty$.
Montrer que les valeurs propres de A sont de module < 1

Exercice 16 [03032] [Correction]
Soit $f\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ non constante telle que :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2, f(AB) = f(A)f(B).$$

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, prouver l'équivalence :

$$A \text{ inversible} \iff f(A) \neq 0.$$

Exercice 17 [03474] [Correction]
Soient $\mathbb{K}$ un corps et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotentes commutant deux à deux.
Montrer

$$A_1A_2 \ldots A_n = O_n.$$

Exercice 18 [03073] [Correction]
Étant donné E un espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E et λ un scalaire, on dit que λ est séparable si le noyau et l'image de $u - \lambda\mathrm{Id}$ sont supplémentaires.

(a) Montrer que tout scalaire non séparable de u en est une valeur propre.

(b) Montrer qu'un endomorphisme scindé est diagonalisable si, et seulement si, toutes ses valeurs propres sont séparables.

(c) Caractériser la séparabilité d'une valeur propre à l'aide du polynôme minimal de u.

(d) Soit, avec ces notations, l'endomorphisme m de $\mathcal{L}(E)$ qui à v associe $u \circ v$. Comparer l'ensembles ses scalaires séparables relativement à m avec celui des scalaires séparables relativement à u.

Exercice 19 [01353] [Correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u) = 0$. Si $Q \in \mathbb{K}[X]$, existe-t-il $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $R(Q(u)) = 0$?

Exercice 20 [03477] [Correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) On suppose $A^3 = A^2$. Montrer que A^2 est diagonalisable et que $A^2 - A$ est nilpotente.

(b) Plus généralement on suppose $A^{k+1} = A^k$ pour un certain entier $k > 0$.
Établir l'existence d'un entier $p > 0$ tel que A^p est diagonalisable et $A^p - A$ nilpotente.

Exercice 21 [02652] [Correction]
On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on note

$$E_n = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \,\middle|\, \exists m \in \mathbb{N}^*, A^m = I_n\right\}.$$

Pour $A \in E_n$, on pose

$$\omega(A) = \min\left\{m \in \mathbb{N}^* \,\middle|\, A^m = I_n\right\}.$$

Montrer que $\omega(E_n)$ est fini.

Exercice 22 [03024] [Correction]
On définit sur $\mathbb{R}[X]$ le produit scalaire

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

Existe-t-il $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], P(0) = \langle A, P\rangle?$$

Exercice 23 [03079] [Correction]
On définit

$$Q_n(X) = \frac{1}{2^n n!}\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}.$$

(a) Soit $n \geq 1$. Montrer que Q_n possède n racines simples dans $]-1\,;1[$.

(b) Montrer que

$$Q_n = X^n + (X^2-1)R_n(X)$$

avec $R_n \in \mathbb{R}[X]$. En déduire $Q_n(1)$ et $Q_n(-1)$.

(c) On pose, pour $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$,

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que Q_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

(d) Calculer $\|Q_n\|^2$.

Exercice 24 [03076] [Correction]
Soit $(E, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ un espace euclidien.
Pour $\varphi \in \mathrm{O}(E)$, on note $M(\varphi) = \mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{Id}_E)$ et $F(\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id}_E)$.
Si $u \in E \setminus \{0\}$, s_u désigne la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $u^\perp$.

(a) Soit $\varphi \in \mathrm{O}(E)$. Montrer que $M(\varphi) \oplus^\perp F(\varphi) = E$.

(b) Si $(u_1, \dots, u_k)$ est libre, montrer :

$$M(s_{u_1} \circ \dots \circ s_{u_k}) = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k).$$

(c) On suppose $(u_1, \dots, u_k)$ libre. Soient $v_1, \dots, v_k \in E \setminus \{0\}$ tels que

$$s_{u_1} \circ \dots \circ s_{u_k} = s_{v_1} \circ \dots \circ s_{v_k}.$$

Montrer que $(v_1, \dots, v_k)$ est libre.

Exercice 25 [03077] [Correction]
Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.
Établir l'existence de $U \in \mathrm{O}_m(\mathbb{R})$ et $V \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice $N = UMV$ vérifie :

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}, i \neq j \implies N_{i,j} = 0.$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

(a) Soit H un tel groupe. Nécessairement $H \neq \{0\}$ ce qui permet d'introduire

$$a = \inf\{h > 0 \mid h \in H\}.$$

Si $a \neq 0$, on montre que $a \in H$ puis par division euclidienne que tout $x \in H$ est multiple de a. Ainsi $H = a\mathbb{Z}$ ce qui est exclu. Il reste $a = 0$ et alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha \in H \cap]0\,;\varepsilon]$. On a alors $\alpha\mathbb{Z} \subset H$ et donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $h \in \alpha\mathbb{Z} \subset H$ vérifiant $|x - h| \leq \alpha \leq \varepsilon$. Ainsi H est dense dans $\mathbb{R}$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, considérons l'application

$$f : \{0, \dots, N\} \to [0\,;1[$$

définie par $f(k) = kx - \lfloor kx \rfloor$. Puisque les $N + 1$ valeurs prises par f sont dans les N intervalles $[i/N\,;(i + 1)/N[$ (avec $i \in \{0, \dots, N - 1\}$), il existe au moins deux valeurs prises dans le même intervalle. Ainsi, il existe $k < k' \in \{0, \dots, N\}$ tel que

$$\left|f(k') - f(k)\right| < \frac{1}{N}$$

. En posant $p = \lfloor k'x \rfloor - \lfloor kx \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $q = k' - k \in \{1, \dots, N\}$, on a $|qx - p| < 1/N$ et donc

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{Nq} < \frac{1}{q^2}.$$

En faisant varier N, on peut construire des couples (p, q) distincts et donc affirmer qu'il existe une infinité de couple $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ vérifiant

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

(c) Puisque π est irrationnel, il existe une suite de rationnels p_n/q_n vérifiant

$$\left|\pi - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}$$

avec $q_n \to +\infty$.
On a alors

$$|u_{p_n}| = \left|\frac{1}{p_n \sin p_n}\right| = \left|\frac{1}{p_n \sin(p_n - q_n\pi)}\right| \geq \frac{1}{|p_n|}\frac{1}{|p_n - q_n\pi|} \geq \frac{q_n}{p_n} \to \frac{1}{\pi}.$$

Ainsi la suite (u_n) ne tend pas vers 0.

$$\left\{|\sin n| \mid n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{\left|\sin(n + 2k\pi)\right| \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}\right\} = \left|\sin(\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z})\right|.$$

Puisque le sous-groupe $H = \mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$, n'est pas monogène (car π irrationnel), H est dense dans $\mathbb{R}$ et par l'application $\left|\sin(.)\right|$ qui est une surjection continue de $\mathbb{R}$ sur $[0\,;1]$, on peut affirmer que $\left\{|\sin n| \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ est dense dans $[0\,;1]$.
En particulier, il existe une infinité de n tel que $|\sin n| \geq 1/2$ et pour ceux-ci $|u_n| \leq 2/n$.
Ainsi, il existe une suite extraite de (u_n) convergeant vers 0.
Au final, la suite (u_n) diverge.

Exercice 2 : [énoncé]

Les valeurs propres complexes d'une matrice nilpotente sont toutes nulles. La trace d'une matrice réelle étant la somme de ses valeurs propres complexes comptées avec multiplicité, la trace d'une matrice nilpotente réelle est assurément nulle. Par combinaison linéaire, si une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est somme de matrices nilpotentes, elle est aussi de trace nulle.
Inversement, soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice de trace nulle. On peut écrire

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

et alors

$$M = \begin{pmatrix} a & -a \\ a & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b + a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c - a & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui décompose M comme somme de matrices nilpotentes.
Notons que le résultat se généralise à la taille n en employant, par exemple, la nilpotence des matrices élémentaires non diagonales et la nilpotence des matrices

$$N_i = \begin{pmatrix} \mathrm{O}_i & & (0) \\ & N & \\ (0) & & \mathrm{O}_{n-i-2} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad i \in [\![0\,;n - 2]\!]$$

Exercice 3 : [énoncé]

($\Longrightarrow$) Si A est semblable à $-A$, ces deux matrices ont même trace et même déterminant. On en déduit

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(-A) = -\mathrm{tr}(A) \quad \text{donc} \quad \mathrm{tr}(A) = 0$$

et

$$\det(A) = \det(-A) = (-1)^3 \det(A) \quad \text{donc} \quad \det(A) = 0$$

($\Longleftarrow$) Supposons $\operatorname{tr}(A) = \det(A) = 0$.
La matrice A n'étant pas inversible, 0 en est valeur propre. La trace de A étant nulle, la somme des valeurs propres est nulle. On distingue alors deux cas :
Cas: $\operatorname{Sp}(A) \neq \{0\}$. La matrice A possède une valeur propre non nulle λ et donc trois valeurs propres distinctes λ, $-\lambda$ et 0. On en déduit que A est diagonalisable semblable à D

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Or, par échange des deux premiers vecteurs de base, c'est-à-dire par l'intermédiaire de la matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice D est semblable à $-D$ et donc A est semblable à $-A$.
Cas: $\operatorname{Sp} A = \{0\}$. La matrice A est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte et vérifie donc $A^3 = \mathrm{O}_3$.
Si $A^2 \neq \mathrm{O}_3$, la matrice A est semblable à

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est semblable à son opposée via renversement des vecteurs de base et passage à l'opposé du vecteur du milieu, c'est-à-dire via la matrice de passage

$$P' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $A^2 = \mathrm{O}_3$ et si $A \neq \mathrm{O}_3$, la matrice A est semblable à

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et cette matrice est semblable à son opposé via échange des premier et dernier vecteur de base et passage à l'opposé de l'un deux, c'est-à-dire via la matrice

$$P'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Enfin, si $A = \mathrm{O}_3$, la conclusion est immédiate.

Exercice 4 : [énoncé]
On sait qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = O_n$.
En introduisant les coefficients de P, la relation $B = AP(A)$ donne

$$B = A + a_2 A^2 + \cdots + a_{p-1} A^{p-1}.$$

On en déduit

$$B^2 = A^2 + a_{3,2} A^3 + \cdots + a_{p-1,2} A^{p-1}, \ldots, B^{p-2} = A^{p-2} + a_{p-1,p-2} A^{p-1}, B^{p-1} = A^{p-1}.$$

En inversant ces équations, on obtient

$$A^{p-1} = B^{p-1}, A^{p-2} = B^{p-2} + b_{p-1,p-2} A^{p-1}, \ldots, A^2 = B^2 + b_{3,2} B^3 + \cdots + b_{p-1,2} B^{p-1}$$

et enfin

$$A = B + b_{2,1} B^2 + \cdots + b_{p-1,1} B^{p-1}$$

ce qui détermine un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $Q(0) = 1$ et $A = BQ(B)$.

Exercice 5 : [énoncé]
$p \circ p = p \circ (q \circ p) = (p \circ q) \circ p = q \circ p = p$ et donc p est un projecteur. De même q est un projecteur et donc p et q sont diagonalisables. Si p et q sont codiagonalisables alors p et q commutent et donc $p = q \circ p = p \circ q = q$. Réciproque immédiate.

Exercice 6 : [énoncé]
Cas $a = b = 0$
Les endomorphismes f et g commutent donc les sous-espaces propres de l'un sont stables pour l'autre. Puisque le corps de base est $\mathbb{C}$, l'endomorphisme f admet au moins une valeur propre λ. L'espace $E_\lambda(f) \neq \{0\}$ est stable par g donc on peut introduire l'endomorphisme induit par g sur $E_\lambda(f)$ et ce dernier admet aussi au moins une valeur propre. Un vecteur propre associé à cette valeur propre de g est aussi un vecteur propre de f car élément non nul de $E_\lambda(f)$. Ainsi f et g ont un vecteur propre commun.
Cas $a = 0$ et $b \neq 0$
Par récurrence, on obtient $f \circ g^n - g^n \circ f = nbg^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
L'application $u \in \mathcal{L}(E) \mapsto f \circ u - u \circ f$ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ or $\dim \mathcal{L}(E) < +\infty$ donc cet endomorphisme n'admet qu'un nombre fini de valeur propre. Cependant, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ tel que $g^n \neq \tilde{0}$, le scalaire nb est valeur

propre de cet endomorphisme, on en déduit qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $g^n = \tilde{0}$ et en particulier $\operatorname{Ker} g \neq \{0\}$.
On vérifie aisément que $\operatorname{Ker} g$ est stable par f et un vecteur propre de l'endomorphisme induit par f sur $\operatorname{Ker} g$ est alors vecteur propre commun à f et g.
Cas $b = 0$ et $a \neq 0$
Semblable
Cas $a \neq 0$ et $b \neq 0$
On a

$$f \circ (af + bg) - (af + bg) \circ f = b(f \circ g - g \circ f) = b(af + bg).$$

Par l'étude qui précède, f et $af + bg$ admettent un vecteur propre commun et celui-ci est alors vecteur propre commun à f et g.

Exercice 7 : [énoncé]
Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente vérifie $M^n = O_n$. Considérons la matrice $(A + xB)^n$. Les coefficients de cette matrice sont des polynômes de degrés inférieurs à n s'annulant chacun en les $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$, ce sont donc des polynômes nuls. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{C}$, $(A + xB)^n = O_n$. En particulier pour $x = 0$, on obtient $A^n = O_n$. Aussi pour tout $y \neq 0$, en considérant $y = 1/x$, on a $(yA + B)^n = O_n$ et en faisant $y \to 0$, on obtient $B^n = O_n$.

Exercice 8 : [énoncé]
$\varphi(I_2) = 1$ donc si P est inversible alors $\varphi(P^{-1}) = \varphi(P)^{-1}$. Par suite, si A et B sont semblables alors $\varphi(A) = \varphi(B)$.
Puisque $\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ sont semblables, $\varphi\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = \mu$ puis $\varphi\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = \lambda\mu$. Ainsi pour A diagonale, $\varphi(A) = \det A$ et plus généralement cela vaut encore pour A diagonalisable. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, non diagonalisable, celle-ci est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.
Si $\lambda = 0$ alors $A^2 = 0$ et donc $\varphi(A) = 0 = \det A$.
Si $\lambda \neq 0$ alors puisque $\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$ et que $\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$ est diagonalisable, on obtient $2\varphi(A) = 2\lambda^2 = 2\det A$ et on peut conclure.

Exercice 9 : [énoncé]
Les endomorphismes recherchés sont les endomorphismes diagonalisables.
En effet, si f est diagonalisable et si F est un sous-espace vectoriel stable par f alors puisque f_F est diagonalisable, il existe une base de F formée de vecteurs propres de f. En complétant cette base à l'aide de vecteur bien choisis dans une base diagonalisant f, les vecteurs complétant engendrent un supplémentaire de F stable par f.
Inversement, si $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie la propriété proposée alors le sous-espace vectoriel $F = \oplus_{\lambda \in \operatorname{Sp} f} E_\lambda(f)$ étant stable par f, celui-ci admet un supplémentaire stable. Or f ne possède pas de vecteurs propres sur ce dernier et celui ne peut donc qu'être $\{0\}$ car ici le corps de base est $\mathbb{C}$. Par suite $F = E$ et donc f est diagonalisable.

Exercice 10 : [énoncé]

(a) $\mathcal{I}_1$ est l'idéal des polynômes annulateurs de u ; il est engendré par $P_1 = \pi_u$ polynôme minimal de u.
La somme de deux endomorphismes nilpotents commutant est encore nilpotent car la formule du binôme de Newton s'applique et il suffit de travailler avec un exposant assez grand. On obtient alors facilement que $\mathcal{I}_2$ est un sous-groupe de $(\mathbb{K}[X], +)$. La stabilité par absorption étant immédiate, $\mathcal{I}_2$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ et comme il contient $\mathcal{I}_1$, il est non nul.

(b) Puisque $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}_2$, $P_1 \in P_2\mathbb{K}[X]$ et donc $P_2 \mid P_1$.
Aussi, en posant n la dimension de E, on sait que pour tout endomorphisme nilpotent de v de E, on a $v^n = \tilde{0}$. Puisque $P_2(u)$ est nilpotent, on en déduit que $(P_2)^n(u) = \tilde{0}$ et donc $P_1 \mid P_2^n$.

(c) Cette question est immédiate avec la décomposition de Dunford mais cette dernière est hors-programme... Procédons autrement !
Puisque $P_2 \mid P_1$ et $P_1 \mid P_2^n$, les racines de P_2 sont exactement celles de P_1 c'est-à-dire les valeurs propres de l'endomorphisme u. On peut donc écrire

$$P_2 = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp} u} (X - \lambda)^{\alpha_\lambda}.$$

Or $P_2(u)$ étant nilpotent, il est immédiat que l'endomorphisme$\prod_{\lambda \in \operatorname{Sp} u} (u - \lambda \operatorname{Id}_E)$ l'est aussi.
On en déduit que

$$P_2 = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp} u} (X - \lambda)$$

et ce polynôme est donc scindé simple.
Déterminons maintenons un polynôme $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que pour $Q = P_2 R$, on ait $P_2(u - Q(u)) = \tilde{0}$.
On en déduira que $u - Q(u)$ est diagonalisable avec $Q(u) \in \mathcal{I}_2$.

L'identité $P_2(u - Q(u)) = \tilde{0}$ est obtenue dès que P_1 divise le polynôme

$$P_2\big(X - P_2(X)R(X)\big) = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp} u} \big(X - \lambda - P_2(X)R(X)\big).$$

Or $P_1 = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp} u} (X-\lambda)^{\beta_\lambda}$ donc il suffit que pour chaque $\lambda \in \operatorname{Sp} u$, le facteur $(X-\lambda)^{\beta_\lambda}$ divise le facteur $X - \lambda - P_2(X)R(X)$ pour pouvoir conclure.
On a

$$X - \lambda - P_2(X)R(X) = (X-\lambda)\left(1 - \prod_{\mu \neq \lambda} (X-\mu)R(X)\right).$$

La condition voulue est assurément vérifiée si $\beta_\lambda = 1$.
Pour $\beta_\lambda \geq 2$, la condition voulue est satisfaite si $\prod_{\mu \neq \lambda} (\lambda - \mu)R(\lambda) = 1$ et si pour tout $k \in \{1, \dots, \beta_\lambda - 2\}$, la dérivée $k$ème du polynôme $\prod_{\mu \neq \lambda} (X-\mu)R(X)$ s'annule en λ. Cela fournit des équations déterminant pleinement $R(\lambda), R'(\lambda), \dots, R^{\beta_\lambda - 2}(\lambda)$ car $\prod_{\mu \neq \lambda} (\lambda - \mu) \neq 0$.
Sachant qu'il est possible de construire un polynôme prenant des valeurs données ainsi que ses dérivées en des éléments deux à deux distincts de $\mathbb{K}$, on peut déterminer un polynôme résolvant notre problème.

Exercice 11 : [énoncé]

(a) $O_2^2 = O_2$ donc $\Phi(O_2)^2 = \Phi(O_2)$ d'où $\Phi(O_2) = 0$ ou 1.
Si $\Phi(O_2) = 1$ alors pour tout $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,
$\Phi(A) = \Phi(A) \times \Phi(O_2) = \Phi(A \times O_2) = 1$.
Ceci est exclu car la fonction Φ n'est pas constante. On en déduit $\Phi(O_2) = 0$.

(b) Si A est nilpotente alors $A^2 = O_2$ (car A est de taille 2) et donc $\Phi(A)^2 = 0$ puis $\Phi(A) = 0$.

(c) $I_2^2 = I_2$ donc $\Phi(I_2)^2 = \Phi(I_2)$ puis $\Phi(I_2) = 0$ ou 1.
Si $\Phi(I_2) = 0$ alors pour tout $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\Phi(A) = \Phi(A \times I_2) = \Phi(A) \times 0 = 0$.
Ceci est exclu car la fonction Φ n'est pas constante. On en déduit $\Phi(I_2) = 1$.
Notons $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
On remarque $E^2 = I_2$ donc $\Phi(E)^2 = 1$ puis $\Phi(E) = -1$ car $\Phi(E) \neq \Phi(I_2)$.
Puisque $B = EA$, on en déduit $\Phi(B) = -\Phi(A)$.

(d) Si A est inversible alors $\Phi(I_2) = \Phi(A) \times \Phi(A^{-1})$ et donc $\Phi(A) \neq 0$ puisque $\Phi(I_2) = 1 \neq 0$.
Inversement, supposons A non inversible. 0 est valeur propre de A.
On vérifie aisément que deux matrices A et B semblables vérifient $\Phi(A) = \Phi(B)$.
Si A est diagonalisable alors A est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{tr} A \end{pmatrix}.$$

Par suite

$$\Phi(A) = \Phi\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{tr} A \end{pmatrix} = -\Phi\begin{pmatrix} 0 & \operatorname{tr} A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

car cette dernière matrice est nilpotente.
Si A n'est pas diagonalisable A est trigonalisable (car χ_A scindé sur $\mathbb{R}$) et A est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et par suite $\Phi(A) = 0$ car cette dernière matrice est nilpotente.

Exercice 12 : [énoncé]
Notons M la matrice étudiée et supposons $n \geq 3$, les cas $n = 1$ et 2 étant immédiats.
Puisque $\operatorname{rg} M = 2$, 0 est valeur propre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\dim E_0(M) = n - 2$.
Soit λ une valeur propre non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X = {}^t\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.
L'équation $MX = \lambda X$ fournit le système

$$\begin{cases} x_n = \lambda x_1 \\ \quad\vdots \\ x_n = \lambda x_{n-1} \\ x_1 + \cdots + x_n = \lambda x_n. \end{cases}$$

On en déduit

$$\lambda(\lambda - 1)x_n = \lambda x_1 + \cdots + \lambda x_{n-1} = (n-1)x_n$$

avec $x_n \neq 0$ car $x_n = 0$ et $\lambda \neq 0$ entraînent $X = 0$.
Par suite λ est racine de l'équation $\lambda^2 - \lambda - (n-1) = 0$ et donc

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{4n-3}}{2}.$$

Inversement, on justifie que ses valeurs sont valeurs propres, soit en remontant le raisonnement, soit en exploitant la diagonalisabilité de la matrice symétrique réelle M pour affirmer l'existence de n valeurs propres comptées avec multiplicité.

Exercice 13 : [énoncé]
Cas $a = b = 0$ la résolution est immédiate.
Cas $a = 0$ et $b \neq 0$, la matrice M_n est triangulaire supérieure stricte non nulle, elle n'est pas diagonalisable.
Cas $a \neq 0$ et $b = 0$, idem.
Cas $a = b$

$$\chi_{M_n}(X) = (X - (n-1)a)(X+a)^{n-1}$$

avec

$$E_{(n-1)a} = \text{Vect}(1,\dots,1)$$

et

$$E_{-a} \colon x_1 + \dots + x_n = 0.$$

La matrice M_n est donc diagonalisable et il est aisé de former une base de vecteurs propres.
Cas $a \neq b$ et $ab \neq 0$
Après calculs (non triviaux)

$$\chi_{M_n}(X) = (-1)^n \frac{b(X+a)^n - a(X+b)^n}{b-a}.$$

Les racines de ce polynôme sont les solutions de l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

$$\left(\frac{z+a}{z+b}\right)^n = \frac{a}{b}.$$

Il y en a exactement n s'exprimant en fonction des racines n-ième de l'unité.
On en déduit que M_n est diagonalisable.
Soit λ une valeur propre de M_n et $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{C}^n$.
L'équation$M_n x = \lambda x$ équivaut au système

$$\begin{cases} -\lambda x_1 + bx_2 + \dots + bx_n = 0 \\ ax_1 - \lambda x_2 + \dots + bx_n = 0 \\ \vdots \\ ax_1 + \dots + ax_{n-1} - \lambda x_n = 0. \end{cases}$$

En retranchant à chaque équation la précédente, on obtient le système équivalent

$$\begin{cases} -\lambda x_1 + bx_2 + \dots + bx_n = 0 \\ (a+\lambda)x_1 + (b+\lambda)x_2 = 0 \\ \vdots \\ (a+\lambda)x_{n-1} - (b+\lambda)x_n = 0. \end{cases}$$

Puisque ce système est de rang $n-1$ (car λ est valeur propre simple) et puisque les $n-1$ dernières équations sont visiblement indépendantes, ce système équivaut encore à

$$\begin{cases} (a+\lambda)x_1 + (b+\lambda)x_2 = 0 \\ \vdots \\ (a+\lambda)x_{n-1} - (b+\lambda)x_n = 0. \end{cases}$$

La résolution de ce dernier est immédiate. On obtient pour vecteur propre $x = (x_1,\dots,x_n)$ avec

$$x_k = \left(\frac{a+\lambda}{b+\lambda}\right)^k.$$

Exercice 14 : [énoncé]
Supposons que l'équation étudiée admet une solution θ.
En passant aux parties réelle et imaginaire on obtient

$$\begin{cases} \cos\theta + \cos k\theta = 1 \\ \sin\theta + \sin k\theta = 0. \end{cases}$$

La deuxième équation donne

$$\theta = -k\theta\ [2\pi] \text{ ou } \theta = \pi - k\theta\ [2\pi].$$

Si $\theta = \pi - k\theta\ [2\pi]$ alors $\cos\theta + \cos k\theta = 0$ et le système initial n'est pas vérifié.
Si $\theta = -k\theta\ [2\pi]$ alors

$$\cos\theta + \cos k\theta = 1 \iff \cos\theta = 1/2$$

ce qui donne $\theta = \pi/3\ [2\pi]$ ou $\theta = -\pi/3\ [2\pi]$.
Cas $\theta = \pi/3\ [2\pi]$
On obtient

$$\begin{cases} \theta = \pi/3 + 2p\pi \\ (k+1)\theta = 2q\pi \end{cases}$$

avec $p, q \in \mathbb{Z}$.
On a alors

$$(6p+1)(k+1) = 6\ell.$$

Puisque $6\ell \wedge (6p+1) = 1$, le théorème de Gauss donne $6 \mid (k+1)$.
Inversement, si $6 \mid (k+1)$ alors on peut écrire $k+1 = 6\ell$ et pour $\theta = \pi/3$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(6\ell-1)\pi/3} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3} = 1$$

donc l'équation étudiée admet au moins une solution.

Cas $\theta = -\pi/3\ [2\pi]$
Une étude semblable conduit à la même condition.
Finalement, l'équation étudiée possède une solution réelle si, et seulement si,

$$6 \mid (k+1)$$

b) Supposons que 6 divise $k+1$. Pour $\theta = \pi/3$ on a

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta} = 1$$

donc en multipliant par $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta}$

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta} = 1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k-1)\theta}.$$

La suite v de terme général $v_n = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}$ vérifie alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+k} = v_n + v_{n+k-1}$$

et donc la suite $u = \mathrm{Re}\, v$ est un élément non nul de S_k. Puisque

$$u_n = \cos\frac{n\pi}{3}$$

la suite u est périodique et non nulle.
Inversement, montrons qu'il est nécessaire que 6 divise $k+1$ pour qu'il existe une suite périodique non nulle dans S_k. On vérifie aisément que S_k est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension k dont une base est formée par les suites $e_0, e_1, \dots, e_{k-1}$ déterminées par

$$\forall 0 \le n \le k-1, e_j(n) = \delta_{n,j} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, e_j(n+k) = e_j(n) + e_j(n+k-1).$$

Considérons l'endomorphisme $T\colon (u_n) \mapsto (u_{n+1})$ opérant sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
On vérifie aisément que T laisse stable S_k ce qui permet d'introduire l'endomorphisme induit par T sur S_k que nous noterons encore T. Affirmer l'existence d'une suite périodique non nulle dans S_k signifie que 1 est valeur propre d'une puissance T^q de T.
La matrice de T dans la base $(e_0, \dots, e_{k-1})$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

car $T(e_{k-1}) = e_{k-1} + e_0$. Le polynôme caractéristique de T est

$$\chi_T(X) = \begin{vmatrix} -X & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -X & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & -X & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1-X \end{vmatrix}.$$

Par l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + XL_2 + X^2L_3 + \cdots + X^{k-1}L_k$, on obtient

$$\chi_T(X) = (-1)^k\big(X^k - X^{k-1} - 1\big).$$

Les valeurs propres complexes de T sont alors les racines du polynôme

$$X^k - X^{k-1} - 1.$$

On vérifie que ce polynôme et son polynôme dérivé n'ont pas de racines en commun ; on en déduit que T admet exactement k valeurs propres complexes distinctes. L'endomorphisme T est diagonalisable dans le cadre complexe, il en est de même de T^q dont les valeurs propres sont alors les puissances $q$ème des valeurs propres de T. Ainsi 1 est valeur propre de T^q si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$\lambda^k - \lambda^{k-1} - 1 = 0 \text{ et } \lambda^q = 1.$$

Un tel nombre complexe peut s'écrire $\lambda = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ et l'on parvient alors à l'existence d'une solution à l'équation

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta} = 1$$

et donc à la condition $6 \mid (k+1)$.

Exercice 15 : [énoncé]
La matrice A est trigonalisable et si l'on note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses valeurs propres distinctes alors $\mathrm{tr}(A^m) = \sum_{j=1}^p \alpha_j \lambda_j^m$ avec α_j la multiplicité de la valeur propre λ_j.
Pour conclure, il suffit d'établir résultat suivant :
« Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{C}^*$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts.
Si $\sum_{j=1}^p \alpha_j \lambda_j^m \xrightarrow[m \to +\infty]{} 0$ alors $\forall 1 \le j \le p, |\lambda_j| < 1$ ».
Raisonnons pour cela par récurrence sur $p \ge 1$.
Pour $p = 1$, la propriété est immédiate.
Supposons la propriété vraie au rang $p \ge 1$.

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_{p+1} \in \mathbb{C}^*$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1} \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts tels que

$$\sum_{j=1}^{p+1} \alpha_j \lambda_j^m \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0 \text{ (1)}.$$

Par décalage d'indice, on a aussi

$$\sum_{j=1}^{p+1} \alpha_j \lambda_j^{m+1} \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0 \text{ (2)}$$

$\lambda_{p+1} \times (1) - (2)$ donne

$$\sum_{j=1}^{p} \alpha_j (\lambda_{p+1} - \lambda_j) \lambda_j^m \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$$

qui se comprend encore

$$\sum_{j=1}^{p} \beta_j \lambda_j^m \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$$

avec les $\beta_1, \dots, \beta_p$ non nuls.
Par hypothèse de récurrence, on a alors $\forall 1 \le j \le p, |\lambda_j| < 1$.
On en déduit $\sum_{j=1}^{p} \alpha_j \lambda_j^m \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$ et la relation (1) donne alors
$\alpha_{p+1}\lambda_{p+1}^m \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$ d'où l'on tire $|\lambda_{p+1}| < 1$.
Récurrence établie.

Exercice 16 : [énoncé]
Commençons par déterminer $f(I_n)$ et $f(O_n)$.
On a $f(I_n) = f(I_n^2) = f(I_n)^2$ donc $f(I_n) = 0$ ou 1.
Si $f(I_n) = 0$ alors pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $f(A) = f(A \times I_n) = f(A) \times f(I_n) = 0$ et donc f est constante ce qui est exclu. Ainsi $f(I_n) = 1$.
Aussi $f(O_n) = f(O_n^2) = f(O_n) \times f(O_n)$ donc $f(O_n) = 0$ ou 1.
Si $f(O_n) = 1$ alors pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,
$f(A) = f(O_n) \times f(A) = f(O_n \times A) = f(O_n) = 1$ et donc f est constante ce qui est exclu. Ainsi $f(O_n) = 0$.
Si A est inversible alors $f(I_n) = f(A \times A^{-1})$ donne $f(A) \times f(A^{-1}) = 1$ et donc $f(A) \neq 0$.
La réciproque est plus délicate.
Supposons A non inversible et posons $r = \operatorname{rg} A$.
La matrice A est équivalente à la matrice

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r} \end{pmatrix}$$

ce qui permet d'écrire $A = QJ_rP$ avec P, Q inversibles. On a alors
$f(A) = f(Q)f(J_r)f(P)$ et il suffit de montrer $f(J_r) = 0$ pour conclure.
Par permutation des vecteurs de bases, la matrice J_r est semblable à toute matrice diagonale où figure r coefficients 1 et $n - r$ coefficients 0. En positionnant, pertinemment les coefficients 0, on peut former des matrices $A_1, \dots, A_p$ toutes semblables à J_r vérifiant

$$A_1 \dots A_p = O_n.$$

On a alors

$$f(A_1) \dots f(A_p) = 0.$$

Or il est facile d'établir que si deux matrices sont semblables, la fonction f prend les mêmes valeurs sur celles-ci. Par suite $f(J_r) = f(A_1) = \dots = f(A_p)$ et ainsi $f(J_r)^p = 0$ puis enfin $f(J_r) = 0$.

Exercice 17 : [énoncé]
Commençons par établir pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$A \neq O_n, AB = BA \text{ et } B \text{ nilpotente} \implies \operatorname{rg}(AB) < \operatorname{rg} A.$$

Supposons donc $A \neq O_n, AB = BA$ et B nilpotente.
Par l'absurde, supposons aussi $\operatorname{rg}(AB) \ge \operatorname{rg} A$.
Puisque $\operatorname{rg}(AB) \le \min(\operatorname{rg} A, \operatorname{rg} B)$, on a $\operatorname{rg}(AB) = \operatorname{rg} A$.
Par la formule du rang, on obtient

$$\dim \operatorname{Ker}(AB) = \dim \operatorname{Ker} A.$$

Or $\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker}(BA) = \operatorname{Ker}(AB)$ donc $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker}(AB)$.
Considérons ensuite $\varphi\colon \operatorname{Im} A \to \operatorname{Im} A$ donné par $\varphi(Y) = BY$.
L'application φ est linéaire et bien définie car $\operatorname{Im} A$ est stable par B puisque A et B commutent.
Soit $Y = AX \in \operatorname{Im} A$
Si $\varphi(Y) = 0$ alors $BAX = ABX = 0$ donc $X \in \operatorname{Ker}(AB) = \operatorname{Ker} A$ puis $Y = 0$.
L'application linéaire φ est donc injective.
Or il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $B^p = O_n$ et donc $\varphi^p\colon Y \to B^pY = O_{n,1}$ est l'application nulle.
Sachant l'espace $\operatorname{Im} A$ non réduit à $\{0\}$, il y a absurdité et ainsi $\operatorname{rg}(AB) < \operatorname{rg} A$.

En revenant à l'énoncé initial, on montre alors par récurrence

$$\forall 1 \leq p \leq n, \operatorname{rg}(A_1 A_2 \dots A_p) \leq n - p$$

et en particulier $\operatorname{rg}(A_1 A_2 \dots A_n) = 0$.

Exercice 18 : [énoncé]

(a) Si $\operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}) = \{0\}$ alors $\operatorname{Im}(u - \lambda \operatorname{Id}) = E$ car $u - \lambda \operatorname{Id}$ est inversible.
On en déduit que λ est séparable.
Par contraposée, si λ n'est pas séparable alors λ est valeur propre de u.

(b) Si u est un endomorphisme diagonalisable alors pour tout scalaire λ, $\operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}) = \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id})^2$.
Par suite $\operatorname{Im}(u - \lambda \operatorname{Id}) \cap \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}) = \{0\}$ et on en déduit que λ est séparable.
Inversement, soit u un endomorphisme scindé dont toutes les valeurs propres sont séparables.
Puisque le polynôme caractéristique de u est scindé, on peut écrire

$$\chi_u = (-1)^{\dim E} \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp} u} (X - \lambda)^{m_\lambda}$$

et par le lemme de décomposition des noyaux

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp} u} \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id})^{m_\lambda}.$$

Or, pour toute valeur propre λ, $\operatorname{Im}(u - \lambda \operatorname{Id}) \cap \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}) = \{0\}$ entraîne $\operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}) = \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id})^2$ puis par le principe des noyaux itérés $\operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}) = \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id})^{m_\lambda}$. Par suite

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp} u} \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id})$$

et donc u est diagonalisable

(c) Soit λ une valeur propre de u. Le polynôme minimal de u peut s'écrire

$$\pi_u = (X - \lambda)^\alpha Q \text{ avec } Q(\lambda) \neq 0$$

$\pi_u(u) = 0$ donne

$$\operatorname{Im} Q(u) \subset \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id})^\alpha.$$

Si λ est une valeur propre séparable alors $\operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}) = \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id})^\alpha$ et donc

$$\operatorname{Im} Q(u) \subset \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id})$$

puis le polynôme $(X - \lambda)Q$ annule u. Par minimalité de π_u, on conclut $\alpha = 1$.
Inversement, si λ est une racine simple du polynôme minimal, alors

$$\pi_u = (X - \lambda)Q \text{ avec } Q(\lambda) \neq 0.$$

Puisque les polynômes Q et $X - \lambda$ sont premiers entre eux, on peut écrire

$$QU + (X - \lambda)V = 1 \text{ avec } U, V \in \mathbb{K}[X]$$

et en évaluant

$$Q(u)U(u)(x) + (u - \lambda \operatorname{Id})V(u)(x) = x$$

avec $Q(u)U(u)(x) \in \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id})$ (car π_u est annulateur) et $(u - \lambda \operatorname{Id})V(u)(x) \in \operatorname{Im}(u - \lambda \operatorname{Id})$.
Ainsi λ est une valeur propre séparable.
Finalement les scalaires non séparables sont les racines multiples de π_u.

(d) $m(v) = u \circ v$, $m^2(v) = u^2 \circ v, \dots P(m)(v) = P(u) \circ v$ pour tout polynôme P.
Par suite les endomorphismes m et u ont les mêmes polynômes annulateurs et donc le même polynôme minimal. Puisque les scalaires non séparables sont les racines multiples du polynôme minimal, les endomorphismes u et m ont les mêmes valeurs séparables.

Exercice 19 : [énoncé]

Puisque u possède un polynôme annulateur, on a

$$\dim \mathbb{K}[u] < +\infty.$$

Or $\mathbb{K}[Q(u)] \subset \mathbb{K}[u]$ donc

$$\dim \mathbb{K}[Q(u)] < +\infty$$

et par conséquent $Q(u)$ possède un polynôme annulateur.

Exercice 20 : [énoncé]

(a) On remarque

$$\forall k \geq 2, A^k = A^2.$$

En particulier $A^4 = A^2$ donc $X^2 - X = X(X-1)$ annule A^2. Ce poly étant scindé simple, la matrice A^2 est diagonalisable.
De plus $(A^2 - A)^2 = A^4 - 2A^3 + A^2 = O_n$ donc $A^2 - A$ est nilpotente.

(b) On remarque
$$\forall i \geq k, A^i = A^k$$
et donc $A^{2k} = A^k$ ce qui assure comme au dessus que A^k est diagonalisable et
$$(A^k - A)^k = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}A^{k(k-i)+i} = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}A^k = O_n.$$

Exercice 21 : [énoncé]
Si $A \in E_n$ alors A est diagonalisable et ses valeurs propres sont des racines de l'unité. Ces valeurs propres sont aussi racines du polynôme caractéristique de A. Or les coefficients de ce polynôme sont entiers et, par les expressions des coefficients d'un polynôme scindé en fonction de ses racines complexes (ici de module 1), on peut borner les coefficients du polynôme caractéristique de A. Par suite, il n'y a qu'un nombre fini de polynômes caractéristiques possibles pour un élément $A \in E_n$. Ces polynômes ont eux-mêmes qu'un nombre fini de racines et il n'y a donc qu'un nombre fini de racines de l'unité possibles pour les valeurs propres de $A \in E_n$.
On peut alors affirmer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que toutes les valeurs propres λ des matrices $A \in E_n$ vérifient $\lambda^N = 1$. On a alors aussi $A^N = 1$ (car A est diagonalisable) et donc $\omega(A) \leq N$. Ainsi $\omega(E_n) \subset [\![1\,;N]\!]$.

Exercice 22 : [énoncé]
Supposons l'existence d'un tel polynôme A et considérons $P(X) = XA(X)$.
On a
$$0 = P(0) = \langle A, P\rangle = \int_0^1 tA(t)^2\,\mathrm{d}t.$$
Par nullité de l'intégrale d'une fonction continue positive, on obtient
$$\forall t \in [0\,;1], tA(t)^2 = 0.$$
Le polynôme A admet une infinité de racine, c'est donc le polynôme nul ce qui est absurde.

Exercice 23 : [énoncé]
(a) 1 et -1 sont racines de multiplicité n du polynôme $(X^2-1)^n$.
1 et -1 sont donc racines des polynômes
$$(X^2-1)^n, \big((X^2-1)^n\big)', \dots, \big((X^2-1)^n\big)^{(n-1)}.$$
En appliquant le théorème de Rolle, on peut alors montrer par récurrence sur $k \in \{0, \dots, n\}$ que $\big((X^2-1)^n\big)^{(k)}$ possède au moins k racines dans l'intervalle $]-1\,;1[$.
En particulier Q_n possède au moins n racines dans $]-1\,;1[$, or $\deg Q_n = n$ donc il n'y a pas d'autres racines que celles-ci et elles sont simples.

(b) Raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 0$, c'est immédiat.
Supposons la propriété établie au rang $n \geq 0$.
$$Q_{n+1}(X) = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}\big(2(n+1)X(X^2-1)^n\big)^{(n)}.$$
Par la formule de Leibniz
$$Q_{n+1}(X) = \frac{1}{2^n n!}\Big(X\big((X^2-1)^n\big)^{(n)} + nX\big((X^2-1)^n\big)^{(n-1)}\Big)$$
1 et -1 sont racines du polynôme $\big((X^2-1)^n\big)^{(n-1)}$ et donc celui-ci peut s'écrire $(X^2-1)S(X)$.
En exploitant l'hypothèse de récurrence, on obtient
$$Q_{n+1}(X) = X^{n+1} + X(X^2-1)R_n(X) + 2nX(X^2-1)S(X) = X^{n+1} + (X^2-1)R_{n+1}(X).$$
Récurrence établie

(c) Par intégration par parties successives et en exploitant l'annulation en 1 et -1 des polynômes
$$(X^2-1)^n, \big((X^2-1)^n\big)', \dots, \big((X^2-1)^n\big)^{(n-1)}$$
on obtient
$$\int_{-1}^1 P(t)Q_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^1 P^{(n)}(t)(t^2-1)^n\,\mathrm{d}t.$$
En particulier, si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$,
$$\int_{-1}^1 P(t)Q_n(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

(d) Par la relation qui précède
$$\int_{-1}^1 \big(Q_n(t)\big)^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^1 Q_n^{(n)}(t)(1-t^2)^n\,\mathrm{d}t.$$

Puisque le polynôme $(X^2-1)^n$ est unitaire et de degré $2n$

$$\left((X^2-1)^n\right)^{(2n)} = (2n)! \text{ et } Q_n^{(n)} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

De plus, par intégration par parties successives

$$\int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \,\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t)^n(1+t)^n \,\mathrm{d}t = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Au final

$$\|Q_n\|^2 = \frac{2}{(2n+1)}.$$

Exercice 24 : [énoncé]

(a) Soient $y \in M(\varphi)$ et $x \in F(\varphi)$.
$\varphi(x) = x$ et il existe $a \in E$ tel que $y = \varphi(a) - a$.
On a alors

$$\langle x, y\rangle = \langle x, \varphi(a)\rangle - \langle x, a\rangle = \langle \varphi(x), \varphi(a)\rangle - \langle x, a\rangle = 0$$

car $\varphi \in \mathrm{O}(E)$.
Ainsi, $M(\varphi)$ et $F(\varphi)$ sont orthogonaux et par la formule du rang

$$\dim M(\varphi) + \dim F(\varphi) = \dim E$$

donne

$$M(\varphi) \oplus^{\perp} F(\varphi) = E.$$

(b) Par récurrence sur $k \geq 1$.
Pour $k = 1$: la propriété est immédiate.
Supposons la propriété vraie au rang $k \geq 1$.
Soient $(u_1, \dots, u_{k+1})$ une famille libre et $\varphi = s_{u_1} \circ \dots \circ s_{u_{k+1}} \in \mathrm{O}(E)$.
Étudions $F(\varphi)$.
Soit $x \in F(\varphi)$. La relation $\varphi(x) = x$ donne

$$s_{u_2} \circ \dots \circ s_{u_{k+1}}(x) = s_{u_1}(x)$$

puis

$$s_{u_2} \circ \dots \circ s_{u_{k+1}}(x) - x = s_{u_1}(x) - x.$$

Or $s_{u_1}(x) - x \in \mathrm{Vect}(u_1)$ et par hypothèse de récurrence
$s_{u_2} \circ \dots \circ s_{u_{k+1}}(x) - x \in \mathrm{Vect}(u_2, \dots, u_{k+1})$.

Puisque la famille $(u_1, \dots, u_{k+1})$ est libre, on obtient

$$s_{u_2} \circ \dots \circ s_{u_{k+1}}(x) - x = s_{u_1}(x) - x = 0.$$

Ainsi x est point fixe de $s_{u_2} \circ \dots \circ s_{u_{k+1}}$ et de s_{u_1} et donc

$$x \in \mathrm{Vect}(u_2, \dots, u_{k+1})^{\perp} \cap \mathrm{Vect}(u_1)^{\perp} = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_{k+1})^{\perp}.$$

Par suite

$$F(\varphi) \subset \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_{k+1})^{\perp}.$$

L'autre inclusion étant immédiate, on obtient

$$F(\varphi) = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_{k+1})^{\perp}$$

puis

$$M(\varphi) = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_{k+1}).$$

Récurrence établie.

(c) Posons

$$\varphi = s_{u_1} \circ \dots \circ s_{u_k} = s_{v_1} \circ \dots \circ s_{v_k}.$$

Par l'étude qui précède

$$F(\varphi) = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k)^{\perp}.$$

De façon immédiate

$$\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_k)^{\perp} \subset F(\varphi).$$

En passant à l'orthogonal

$$\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k) \subset \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_k).$$

Puisque la famille $(u_1, \dots, u_k)$ est supposé libre, un argument de dimension permet d'affirmer que la famille $(v_1, \dots, v_k)$ l'est aussi.

Exercice 25 : [énoncé]

Cas $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$
Soit u l'endomorphisme $\mathbb{R}^n$ canoniquement représenté par M.
Il s'agit d'établir, que u transforme une base orthonormée en une famille orthogonale.
On remarque que

$$(u(x) \,|\, u(y)) = (u^* \circ u(x) \,|\, y).$$

L'endomorphisme $u^* \circ u$ étant symétrique, le théorème spectral assure qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ le diagonalisant. Par le calcul qui précède, la famille $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est orthogonale.
De plus elle ne comporte pas le vecteur nul car $u \in \mathrm{GL}(E)$. Posons alors $\mathcal{B}'$ la famille des vecteurs $u(e_k)/\|u(e_k)\|$.
La famille $\mathcal{B}'$ est une base orthonormée et la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est diagonale (à coefficients diagonaux strictement positifs).
Une formule de changement de base orthonormée permet alors de conclure.
Cas général : $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$
Soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$ canoniquement représenté par M.
Posons $F = \operatorname{Ker} u$ et $G = \operatorname{Im} u$. La matrice de u dans une base orthonormée adaptée à la décomposition $F^\perp \oplus^\perp F = \mathbb{R}^n$ au départ et dans une base orthonormée adaptée à la décomposition $G \oplus^\perp G^\perp = \mathbb{R}^m$ à l'arrivée est de la forme

$$M' = \begin{pmatrix} A & O \\ O & O \end{pmatrix} \text{ avec } A \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{R}), r = \operatorname{rg} M.$$

L'étude qui précède permet de transformer A en une matrice diagonale D via produit par des matrices orthogonales U et V :

$$UAV = D.$$

En introduisant les matrices orthogonales

$$U' = \begin{pmatrix} U & O \\ O & I_{m-r} \end{pmatrix} \text{ et } V' = \begin{pmatrix} V & O \\ O & I_{n-r} \end{pmatrix}$$

on obtient en opérant par blocs

$$U'M'V' = \begin{pmatrix} D & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

Enfin par une formule de changement de bases orthonormées, il existe U'', V'' orthogonales telles que

$$M' = U''MV''$$

et on peut alors conclure.