Intégrales dépendant d'un paramètre

Convergence dominée

Exercice 1 [00921] [Correction]
Calculer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

(a) $u_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x \,\mathrm{d}x$
(b) $v_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n + \mathrm{e}^x}$

Exercice 2 [03800] [Correction]
Étudier la limite éventuelle, quand n tend vers $+\infty$, de la suite

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1 + x^{n+2}} \,\mathrm{d}x.$$

Exercice 3 [00746] [Correction]
Calculer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

(a) $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^n x}{x^2} \,\mathrm{d}x$
(b) $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n \,\mathrm{d}x}{x^{n+2}+1}$
(c) $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n \,\mathrm{d}x}{x^{2n}+1}$

Exercice 4 [01771] [Correction]
Vérifier que la suite de terme général

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{nt + t^2} \,\mathrm{d}t$$

est bien définie et étudier sa convergence.

Exercice 5 [00926] [Correction]
Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \sin^n(t) \,\mathrm{d}t.$$

Exercice 6 [00927] [Correction]
Établir que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}t.$$

Exercice 7 [02568] [Correction]
Montrer que

$$u_n = (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$$

est définie pour $n \geq 1$.
Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}.$$

En déduire la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 8 [03807] [Correction]
Montrer que la fonction f_n donnée par

$$f_n(x) = \frac{\ln(1 + x/n)}{x(1+x^2)}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Montrer que la suite de terme général $u_n = n \int_0^{+\infty} f_n(x) \,\mathrm{d}x$ converge vers une limite à préciser.

Exercice 9 [02567] [Correction]
Soit $f\colon [0\,;+\infty[\to \mathbb{C}$ continue.
On suppose que la fonction f converge en $+\infty$ vers une limite finie ℓ.
Déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de

$$\mu_n = \frac{1}{n} \int_0^n f(t) \,\mathrm{d}t.$$

Exercice 10 [00150] [Correction]
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ bornée. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{+\infty} n f(t) \mathrm{e}^{-nt} \,\mathrm{d}t.$$

Déterminer la limite de I_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 11 [00924] [Correction]
Soit $f\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ continue et bornée.
Déterminer la limite quand $n\to+\infty$ de

$$\int_0^{+\infty}\frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 12 [03650] [Correction]
Soit $f\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ intégrable ainsi que sa dérivée.

(a) Déterminer pour $x>0$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}n\cos t(\sin t)^nf(xt)\,\mathrm{d}t.$$

(b) Préciser le mode de convergence.

Exercice 13 [04079] [Correction]
Étudier

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n\mathrm{d}t.$$

Exercice 14 [00922] [Correction]
Étudier

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 15 [00923] [Correction]
Déterminer un équivalent de

$$\int_0^n\sqrt{1+\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 16 [02982] [Correction]
Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n\left(\cos\frac{x}{n}\right)^{n^2}\mathrm{d}x.$$

Exercice 17 [02862] [Correction]
Calculer

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{n!}{\prod_{k=1}^n(k+x)}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 18 [03159] [Correction]
Soit F une application continue décroissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, tendant vers 1 en $-\infty$ et vers 0 en $+\infty$. Soient deux réels h et δ vérifiant $0<h<\delta$.

(a) Déterminer la limite éventuelle de

$$I_n=\int_0^1F\bigl(\sqrt{n}(\delta t-h)\bigr)\,\mathrm{d}t.$$

(b) On pose

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}F\left(\sqrt{n}\left(\delta\frac{k+1}{n}-h\right)\right).$$

Déterminer un équivalent de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 19 [02392] [Correction]
Soit f une application réelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a\,;b]$ avec $0<a<1<b$ et $f(1)\neq0$. Soit (f_n) la suite de fonctions telle que

$$f_n(x)=\frac{f(x)}{1+x^n}.$$

(a) Déterminer la limite simple de (f_n).

(b) Établir l'égalité suivante :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^bf_n(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^1f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(c) Montrer que

$$\int_a^1t^{n-1}f_n(t)\,\mathrm{d}t\sim\frac{\ln 2}{n}f(1).$$

Exercice 20 [02517] [Correction]
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{x^2}{2n^2}\right)^{2n^4}.$$

Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et nulle en dehors d'un segment $[a\,;b]$.
Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(0).$$

Exercice 21 [04143] [Correction]
Soit $f\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $f(1) \neq 0$. Déterminer un équivalent quand n tend vers l'infini de

$$I_n = \int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 22 [04158] [Correction]

(a) Rappeler une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction dérivable sur un intervalle soit strictement croissante.

(b) Soit $f\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}_+$ continue dont l'ensemble des zéros est d'intérieur vide et $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer qu'il existe une unique subdivision $(x_0,\dots,x_n)$ de $[a\,;b]$ vérifiant :

$$\forall i \in [\![1\,;n]\!],\ \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(c) Soit $g\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}_+$ continue. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(x_i).$$

Exercice 23 [04159] [Correction]
Soit a et b strictement positifs. On définit deux suites (a_n) et (b_n) par

$$a_0 = a, b_0 = b \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

(a) Montrer que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite, notée $M(a,b)$.

(b) On pose

$$T(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(a^2+u^2)(b^2+u^2)}}.$$

Montrer

$$T\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = T(a,b).$$

On pourra utiliser le changement de variable $u = \frac{1}{2}\left(t - \frac{ab}{t}\right)$.

(c) Montrer

$$T(a,b) = \frac{\pi}{M(a,b)}.$$

Exercice 24 [04945] [Correction]

(a) Justifier l'existence de

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^3)^n} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*.$$

(b) Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ converge et trouver sa limite.

(c) Étudier la convergence de $\sum(-1)^{n-1}I_n$ et calculer son éventuelle somme.

Intégration terme à terme

Exercice 25 [00928] [Correction]
Montrer

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Exercice 26 [03781] [Correction]
Prouver l'égalité

$$\int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

Exercice 27 [00929] [Correction]
Établir que
$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2}.$$

Exercice 28 [02864] [Correction]
Existence et calcul de
$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t.$$
Le résultat est à exprimer à l'aide de $\zeta(2)$.

Exercice 29 [00931] [Correction]

(a) Établir
$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

(b) En déduire
$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

(c) Calculer cette somme sachant
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 30 [00930] [Correction]

(a) Établir
$$\int_0^1 \frac{\arctan t}{t}\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

(b) En déduire
$$\int_0^1 \frac{\arctan t}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$

Cette valeur est appelée constante de Catalan, elle vaut approximativement $0,916$.

Exercice 31 [02615] [Correction]
Pour $n, m \in \mathbb{N}$, on pose
$$I_n(m) = \int_0^1 x^n (\ln x)^m \,\mathrm{d}x.$$

(a) Calculer $I_n(n)$.

(b) En déduire
$$\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}.$$

Exercice 32 [02869] [Correction]
Montrer
$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n} = \int_0^1 t^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 33 [02570] [Correction]
Soient p et k 2 entiers naturels, non nul. Soit $f_{p,k}\colon x \mapsto x^p(\ln x)^k$.

(a) Montrer que $f_{p,k}$ est intégrable sur $]0\,;1]$. Soit
$$K_{p,k} = \int_0^1 x^p (\ln x)^k \,\mathrm{d}x.$$

(b) Exprimer $K_{p,k}$ en fonction de $K_{p,k-1}$.

(c) Exprimer $J_n = \int_0^1 (x\ln x)^n\,\mathrm{d}x$ en fonction de n.

(d) On pose $I = \int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x$. Montrer
$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

Exercice 34 [00934] [Correction]
Établir que pour $p \geq 2$,
$$\int_0^1 \frac{(\ln x)^p}{1-x}\,\mathrm{d}x = (-1)^p p! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{p+1}}.$$

Exercice 35 [00933] [Correction]
Établir
$$\int_0^1 x^x \,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}.$$

Exercice 36 [03790] [Correction]
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose
$$f_n(x) = x^n(1-\sqrt{x}).$$

(a) Montrer que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

(b) En déduire la valeur de
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+3)}.$$

Exercice 37 [03268] [Correction]
Montrer
$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{2\cos x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\pi}{(n!)^2}.$$

Exercice 38 [02439] [Correction]
Soient $a \in \mathbb{C}$, $|a| \neq 1$ et $n \in \mathbb{Z}$. Calculer
$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{int}}{\mathrm{e}^{it}-a}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 39 [03214] [Correction]
Montrer que
$$\forall a,b>0,\ \int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{-at}}{1-\mathrm{e}^{-bt}}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+bn)^2}.$$

Exercice 40 [00935] [Correction]
Déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de
$$\frac{1}{n}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x/n}}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 41 [00939] [Correction]
Soient $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$. On pose
$$u_n(\alpha) = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^\alpha (\cos t)^n \,\mathrm{d}t.$$

(a) Nature de la série de terme général $u_n(1)$.

(b) Plus généralement, nature de la série de terme général $u_n(\alpha)$.

(c) Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(\alpha)$ pour $\alpha = 2, 3$.

Exercice 42 [02807] [Correction]

(a) Pour $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, calculer
$$\int_0^1 x^n(1-x)^m\,\mathrm{d}x.$$

Pour $p \in \mathbb{Z}$, montrer l'existence de
$$S_p = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^p}{\binom{2n}{n}}.$$

(b) Calculer S_0 et S_{-1}.

(c) Si $p \in \mathbb{N}$, proposer une méthode de calcul de S_p.

Exercice 43 [02641] [Correction]
n désigne un entier naturel non nul.

(a) Justifier que l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$
est définie.

(b) Soit $a \geq 0$. Calculer
$$\int_0^a \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2}\,\mathrm{d}x.$$
En déduire la valeur de
$$\int_0^{+\infty} \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$
puis de
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2}\,\mathrm{d}x.$$

(c) Soit $a \geq 0$. Montrer que la série
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2}$$
converge uniformément sur $[0\,;a]$, puis que
$$\int_0^a \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}.$$

(d) En exploitant une comparaison série-intégrale, déterminer
$$\lim_{a \to +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}.$$

(e) En déduire que l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$
est convergente et donner sa valeur.
Comparer avec le résultat obtenu en b). Qu'en conclure ?

Exercice 44 [02438] [Correction]

(a) Démontrer la convergence de la série de terme général
$$a_n = \frac{n!}{n^n}.$$

(b) Comparer
$$a_n \text{ et } n\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t.$$

(c) En déduire :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{-t}}{(1 - t\mathrm{e}^{-t})^2}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 45 [02445] [Correction]

On pose
$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1 + t^n}\,\mathrm{d}t$$
pour tout entier $n > 0$.

(a) Trouver la limite ℓ de (I_n).

(b) Donner un équivalent de $(\ell - I_n)$.

(c) Justifier
$$\int_0^1 \frac{\ln(1 + y)}{y}\,\mathrm{d}y = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k + 1)^2}.$$

(d) Donner un développement asymptotique à trois termes de (I_n).

Exercice 46 [02612] [Correction]

(a) Déterminer la limite ℓ quand $n \to +\infty$ de
$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1 + t^n}\,\mathrm{d}t.$$

(b) Donner un équivalent de
$$I_n - \ell.$$

(c) Justifier
$$\int_0^1 \ln(1 + t^n)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(nk + 1)}.$$

(d) En déduire un équivalent de
$$\int_0^1 \ln(1 + t^n)\,\mathrm{d}t$$
et donner un développement asymptotique à trois termes de I_n.

Exercice 47 [02840] [Correction]

(a) Si $(s,\lambda)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{C}$, quelle est la nature de la série de terme général

$$\frac{\lambda^n}{s(s+1)\dots(s+n)}$$

pour $n\geq 0$? À λ fixé, on note Δ_λ l'ensemble des $s>0$ tels que la série converge, et on note $F_\lambda(s)$ la somme de cette série.

(b) Calculer $\lim_{s\to\sup\Delta_\lambda}F_\lambda(s)$.

(c) Donner un équivalent de $F_\lambda(s)$ quand $s\to\inf\Delta_\lambda$.

(d) Si $n\geq 1$, calculer :

$$\int_0^1(1-y)^{s-1}y^n\,\mathrm{d}y.$$

(e) En déduire une expression intégrale de $F_\lambda(s)$.

Exercice 48 [02866] [Correction]

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite bornée. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2t}\left(\sum_{p=n}^{+\infty}a_p\frac{t^p}{p!}\right)\mathrm{d}t.$$

Exercice 49 [02870] [Correction]

Si $x>1$, on pose $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$. Montrer

$$\int_2^{+\infty}(\zeta(x)-1)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2\ln n}.$$

Exercice 50 [00118] [Correction]

Soit, pour $n\in\mathbb{N}$,

$$u_n=\int_0^{\pi/2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)\right)^n\mathrm{d}x.$$

(a) Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

(b) Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

Exercice 51 [03287] [Correction]

Donner la nature de la série de terme général

$$u_n=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\cos^{2n}t\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 52 [02583] [Correction]

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

(a) Ensemble de définition de

$$I_n(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^x)^n}.$$

(b) Montrer que si $x>1$, $\sum I_n(x)$ diverge.

(c) Calculer $I_n(2)$ pour $n\geq 1$.

Exercice 53 [01102] [Correction]

(a) Donner les limites éventuelles en $+\infty$ des suites de termes généraux

$$U_n=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}\text{ et }V_n=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}.$$

(b) Quelles sont les natures des séries

$$\sum_{n\geq 1}U_n\text{ et }\sum_{n\geq 1}V_n\ ?.$$

Exercice 54 [02360] [Correction]

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, soit f_n l'application définie par

$$f_n(x)=\begin{cases}\frac{2\operatorname{sh}(x)}{\mathrm{e}^{nx}-1} & \text{si } x\in\,]0\,;+\infty[\\ \alpha & \text{si } x=0.\end{cases}$$

(a) Pour quelle valeurs de α la fonction f_n est-elle continue ? Dans la suite, on prendra cette valeur de α.

(b) Montrer que f_n est bornée.

(c) Montrer que $\int_0^{+\infty}f_n(x)\,\mathrm{d}x$ existe pour $n\geq 2$.

(d) Exprimer $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ comme la somme d'une série.

Exercice 55 [02609] [Correction]
Pour $n \geq 1$, on pose
$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}.$$

(a) Déterminer la limite de la suite (I_n).

(b) Établir que pour tout entier $n \geq 1$,
$$I_{n+1} = \frac{3n-1}{3n} I_n.$$

(c) Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel qu'il y ait convergence de la suite de terme général
$$u_n = \ln(n^\alpha I_n).$$

(d) En déduire la convergence de la série
$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} I_n$$
et exprimer sa somme à l'aide d'une intégrale.

Exercice 56 [04144] [Correction]

(a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer
$$I_k = \int_0^1 t^{k-1} \ln(t)\,\mathrm{d}t.$$

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}.$$
Exprimer R_n à l'aide d'une intégrale.

(c) Calculer
$$\sum_{n=0}^{+\infty} R_n.$$

Intégration terme à terme par les sommes partielles

Exercice 57 [00936] [Correction]
Montrer que, pour $a > 0$
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{na+1}.$$

Exercice 58 [00942] [Correction]
Pour tout $\alpha > 0$, établir que
$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha}.$$

Exercice 59 [02863] [Correction]

(a) Établir pour $a, b > 0$ l'égalité
$$\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}.$$

(b) Calculer
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}.$$

Exercice 60 [02437] [Correction]
Montrer
$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Exercice 61 [04155] [Correction]
Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$S_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^p}{\mathrm{e}^t - 1} \mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer l'existence de l'intégrale définissant S_n.

(b) Pour $a, b \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$T(a,b) = \int_0^{+\infty} t^a \mathrm{e}^{-bt}\,\mathrm{d}t.$$

Simplifier l'expression de $T(a,b)$.

(c) Montrer que pour tout naturel n

$$S_0 = p!\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{p+1}} + S_n.$$

(d) Montrer que la suite (S_n) converge vers 0.

(e) Montrer

$$S_0 = p!\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+1}}.$$

Etude de fonctions concrètes

Exercice 62 [00534] [Correction]

(a) Justifier que l'intégrale suivante est définie pour tout $x > 0$

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

(b) Justifier la continuité de f sur son domaine de définition.

(c) Calculer $f(x) + f(x+1)$ pour $x > 0$.

(d) Donner un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 0^+$ et la limite de f en $+\infty$.

Exercice 63 [03658] [Correction]

On pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+tx}\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que $F(x)$ est bien définie pour tout $x \geq 0$.

(b) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0\,;+\infty[$.

(c) Calculer $F^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 64 [00538] [Correction]

Soit

$$F\colon x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que F est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de limite nulle en $+\infty$ de l'équation différentielle

$$y'' + y = \frac{1}{x}.$$

Exercice 65 [00537] [Correction]

Soit

$$f\colon x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et solution de l'équation différentielle

$$y - y' = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}.$$

Exercice 66 [00532] [Correction]

Soit

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx^2}\,\mathrm{d}t}{1+t^3}.$$

(a) Calculer $g(0)$ en réalisant le changement de variable $t = 1/u$.

(b) Étudier les variations de g sur son domaine de définition.

(c) Étudier la limite de g en $+\infty$.

Exercice 67 [00531] [Correction]

Soit

$$f\colon x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+x^3+t^3}.$$

(a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+$.

(b) À l'aide du changement de variable $u = 1/t$, calculer $f(0)$.

(c) Montrer que f est continue et décroissante.

(d) Déterminer $\lim_{+\infty} f$.

Exercice 68 [00533] [Correction]
Soit
$$f : x \mapsto \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{t+x}\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que f est définie, continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Étudier les variations de f.
(b) Déterminer les limites de f en 0^+ et $+\infty$.
(c) Déterminer un équivalent de f en 0^+ et $+\infty$.

Exercice 69 [00536] [Correction]
Soit f la fonction donnée par
$$f(x) = \int_0^{\pi/2} \sin^x(t)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que f est définie et positive sur $]-1\,;+\infty[$.
(b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et préciser sa monotonie.
(c) Former une relation entre $f(x+2)$ et $f(x)$ pour tout $x > -1$.
(d) On pose pour $x > 0$,
$$\varphi(x) = xf(x)f(x-1).$$
Montrer que
$$\forall x > 0, \varphi(x+1) = \varphi(x).$$
Calculer $\varphi(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
(e) Déterminer un équivalent à f en -1^+.

Exercice 70 [02880] [Correction]
Montrer que, pour tout x réel positif,
$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x/t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 71 [02875] [Correction]
Soit $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z > -1\}$. Si $z \in \Omega$, on pose
$$f(z) = \int_0^1 \frac{t^z}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que f est définie et continue sur Ω.
(b) Donner un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers -1.
(c) Donner un équivalent de $f(z)$ quand $\mathrm{Re}(z) \to +\infty$.

Exercice 72 [02871] [Correction]
Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t.$$

(a) Définition de f.
(b) Continuité et dérivabilité de f.
(c) Écrire $f(1)$ comme somme de série.

Exercice 73 [02882] [Correction]
On pose, pour $x > 0$,
$$f(x) = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$
Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0\,;+\infty[$ et trouver des équivalents simples de f en 0 et en $+\infty$.

Exercice 74 [03324] [Correction]
Pour $x > 0$, on pose
$$f(x) = \int_{-x}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2-t^2}}.$$

(a) Montrer que f est définie et continue.
(b) Déterminer les limites de f en 0^+ et $+\infty$.

Exercice 75 [03621] [Correction]

(a) Déterminer le domaine de définition de
$$f(x) = \int_1^x \frac{\cos^2 t}{t}\,\mathrm{d}t.$$
(b) Donner un équivalent de f en 0 et en $+\infty$.

Exercice 76 [03760] [Correction]

(a) Déterminer l'ensemble de définition de

$$f(x)=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)(1-x^2t)}}.$$

(b) Donner la limite de f en $x=1$.

Exercice 77 [03736] [Correction]

On pose

$$f(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+x)}.$$

(a) Étudier l'ensemble de définition de f.

(b) Donner un équivalent de f en 0.

(c) Montrer que le graphe de f admet une symétrie d'axe $x=1/2$.

(d) Montrer que f est continue sur son ensemble de définition.

(e) Calculer la borne inférieure de f.
Énoncé fourni par le concours CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA

Exercice 78 [02556] [Correction]

Pour $x>0$, on pose

$$F(x)=\int_0^1\frac{\ln t}{t+x}\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$.

(b) Calculer $F'(x)$ et en déduire l'expression de

$$G(x)=F(x)+F(1/x).$$

(c) Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Calculer

$$\int_0^1\frac{t-1}{t+1}\frac{\ln t}{t^2+2t\operatorname{ch}(\theta)+1}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 79 [03889] [Correction]

Soit

$$g\colon x\mapsto\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

Montrons que g est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle

$$-y'+y=\frac{1}{x}.$$

Calcul de fonction intégrale

Exercice 80 [02874] [Correction]

Étudier

$$f\colon x\mapsto\int_0^1\frac{t-1}{\ln t}t^x\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 81 [03888] [Correction]

(a) Montrer que l'application $g\colon x\mapsto\int_0^1\frac{t^x-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ est définie sur $]-1\,;+\infty[$.

(b) Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer $g'(x)$.

(c) En déduire une expression simple de $g(x)$ pour $x>-1$.

Exercice 82 [00546] [Correction]

Soit

$$F\colon x\mapsto\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{t}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

(a) Justifier que F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(b) Calculer $F'(x)$.

(c) En déduire une expression simplifiée de $F(x)$.

Exercice 83 [02873] [Correction]

Pour tout x réel, on pose

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xt)}{\sqrt t}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\text{ et }g(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{\sqrt t}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Existence et calcul de ces deux intégrales.

Exercice 84 [00553] [Correction]

Soit

$$F(x,y)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-xt}-\mathrm{e}^{-yt}}{t}\,\mathrm{d}t\text{ avec }x,y>0.$$

Pour $y>0$, montrer que $x\mapsto F(x,y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y).$$

En déduire la valeur de $F(x,y)$.

Exercice 85 [02611] [Correction]
On pose
$$F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}}{t}\cos(xt)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Quel est le domaine de définition réel I de la fonction F ?
(b) Justifier que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
(c) Exprimer $F(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 86 [03311] [Correction]
Soit a,b deux réels strictement positifs.

(a) Justifier l'existence pour tout $x\in\mathbb{R}$ de
$$F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}}{t}\cos(xt)\,\mathrm{d}t.$$
(b) Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$.
(c) Exprimer $F(x)$

Exercice 87 [00548] [Correction]
On pose
$$z\colon x\mapsto\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i}x)t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$
et on donne $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\sqrt{\pi}/2$.

(a) Justifier et calculer $z(0)$.
(b) Montrer que z est définie, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et
$$z'(x)=\frac{-1}{2(x+\mathrm{i})}z(x).$$
(c) En déduire l'expression de $z(x)$.

Exercice 88 [03655] [Correction]
En dérivant la fonction déterminer l'expression de la fonction
$$g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{tx}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 89 [03656] [Correction]

(a) Existence de
$$F(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\operatorname{ch}(2xt)\,\mathrm{d}t.$$
(b) Calculer $F(x)$ en introduisant une équation différentielle vérifiée par F.
(c) Calculer $F(x)$ directement par une intégration terme à terme.

Exercice 90 [00555] [Correction]
Ensemble de définition, dérivée et valeur de
$$f\colon x\mapsto\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2t^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 91 [03660] [Correction]
Pour $x>0$, on pose
$$F(x)=\int_0^{\pi/2}\ln\bigl(\cos^2(t)+x^2\sin^2(t)\bigr)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Justifier que F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$.
(b) Calculer $F'(x)$ et en déduire un expression de $F(x)$.

Exercice 92 [02881] [Correction]
Existence et calcul de
$$\int_0^{2\pi}\frac{\ln(1+x\cos t)}{\cos t}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 93 [00556] [Correction]
Soit
$$F(x)=\int_0^{\pi/2}\ln(1+x\sin^2 t)\,\mathrm{d}t \text{ sur } [0\,;+\infty[.$$

(a) Justifier que F est bien définie et continue.
(b) Étudier la dérivabilité sur $[0\,;+\infty[$ et donner l'expression de sa dérivée via le changement de variable $u=\tan t$.
(c) Établir que
$$F(x)=\pi(\ln(1+\sqrt{1+x})-\ln 2).$$

Exercice 94 [02876] [Correction]
Existence et calcul de

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2 + t^2)}{1 + t^2} \,\mathrm{d}t.$$

Exercice 95 [00551] [Correction]
Soit

$$F(x) = \int_0^1 \frac{\ln\left(1 + 2t\cos x + t^2\right)}{t} \,\mathrm{d}t.$$

(a) Justifier que F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;\pi/2]$

(b) Calculer $F'(x)$ sur $[0\,;\pi/2]$

(c) Donner la valeur de $F(0)$ puis celle de $F(x)$ sachant

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Exercice 96 [00552] [Correction]
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, on pose

$$I_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(x^2 + t^2)^n}.$$

(a) Justifier l'existence de $I_n(x)$.

(b) Calculer $I_1(x)$.

(c) Justifier que $I_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer $I_n'(x)$.

(d) Exprimer $I_n(x)$.

Exercice 97 [03619] [Correction]
Soit F la fonction définie par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1 + t^2)} \,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
On admet l'identité

$$\frac{x^2 - 1}{(1 + x^2t^2)(1 + t^2)} = \frac{x^2}{1 + x^2t^2} - \frac{1}{1 + t^2}$$

valable pour tout x et t dans $\mathbb{R}$

(b) Déterminer l'expression de $F(x)$.

Exercice 98 [04944] [Correction]
Soit

$$F\colon x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}\sin t}{t} \,\mathrm{d}t.$$

(a) Justifier que F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $F'(x)$.

(b) En déduire une expression simplifiée de $F(x)$ pour tout $x > 0$.

Étude théorique

Exercice 99 [00540] [Correction]
Soit f une application continue de $\mathbb{R} \times [a\,;b]$ dans $\mathbb{R}$.
Expliquer pourquoi f est uniformément continue sur $S \times [a\,;b]$ pour tout segment S de $\mathbb{R}$.
En déduire que $F\colon x \mapsto \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = \int_0^1 \mathrm{e}^{xt}\,\mathrm{d}t$. À l'aide de la question précédente, étudier la continuité de g. Retrouver le résultat en calculant $g(x)$.

Exercice 100 [00544] [Correction]
Soient $f\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $u, v\colon I \to \mathbb{R}$ continues.
Montrer la continuité de la fonction

$$x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 101 [03756] [Correction]
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ vérifiant $f(0) = 0$.
Montrer que la fonction

$$g\colon x \mapsto \frac{f(x)}{x}$$

se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer ses dérivées successives en 0 en fonction de celles de f.

Exercice 102 [00294] [Correction]
Soient $f\colon I\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $a\in\mathbb{R}$ tels que

$$f(a)=f'(a)=\dots=f^{(\alpha-1)}(a)=0.$$

(a) Montrer qu'on a pour tout $x\in I$

$$f(x)=\int_a^x\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}f^{(\alpha)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

(b) En déduire qu'on peut écrire $f(x)=(x-a)^\alpha g(x)$ avec g de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 103 [04195] [Correction]
Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ si $x\neq0$ et $f(0)=1$.
Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et vérifier

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|f^{(n)}(t)\right|\leq\frac{1}{n+1}.$$

Transformée de Fourier et intégrales apparentées

Exercice 104 [00547] [Correction]
On pose

$$z\colon x\mapsto\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i}x)t^2}\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que z est définie, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie

$$z'(x)=\frac{-1}{2(x+i)}z(x).$$

(b) En déduire l'expression de $z(x)$ sachant $z(0)=\sqrt{\pi}/2$.

Exercice 105 [03211] [Correction]
On considère

$$\varphi\colon x\mapsto\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer la définie et la continuité de φ sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et montrer que

$$\varphi'(x)=\mathrm{i}\int_0^{+\infty}\frac{t\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

(c) Montrer que pour $x>0$,

$$\varphi'(x)=\mathrm{i}\int_0^{+\infty}\frac{u\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u$$

et déterminer un équivalent de $\varphi'(x)$ quand $x\to0^+$.

(d) La fonction φ est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 106 [02499] [Correction]
On étudie

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Donner le domaine de définition de f.

(b) Calculer f en formant une équation différentielle.

(c) Calculer f en exploitant le développement en série entière de la fonction cosinus.

Exercice 107 [00554] [Correction]
Existence et calcul de

$$g(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$$

sachant $g(0)=\sqrt{\pi}/2$.

Fonction d'Euler

Exercice 108 [00560] [Correction]
Démontrer que la fonction

$$\Gamma\colon x\mapsto\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0\,;+\infty[$.

Exercice 109 [00561] [Correction]

(a) Démontrer que la fonction Γ donnée par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

est définie et continue sur $]0\,;+\infty[$.

(b) Démontrer que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0\,;+\infty[$.

(c) En exploitant l'inégalité de Cauchy Schwarz, établir que la fonction $x \mapsto \ln\Gamma(x)$ est convexe.

Exercice 110 [00562] [Correction]

L'objectif de cet exercice est de calculer

$$\int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que pour tout $t \in [0\,;n]$,

$$0 \le \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1} \le \mathrm{e}.\mathrm{e}^{-t}.$$

(b) Établir que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \ln(t)\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\ln(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

(c) Observer que

$$\int_0^n \ln(t)\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\mathrm{d}t = \ln n + \int_0^1 \frac{(1-u)^n-1}{u}\,\mathrm{d}u.$$

(d) Conclure que

$$\int_0^{+\infty}\ln(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -\gamma$$

où γ désigne la constante d'Euler.

Exercice 111 [02635] [Correction]

On rappelle $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
Pour $x>0$, on pose

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que cette fonction est définie et indéfiniment dérivable sur $]0\,;+\infty[$. On étudiera la régularité en se restreignant à $x \in [a\,;b] \subset\,]0\,;+\infty[$.

(b) Calculer $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

(c) En réalisant le changement de variable $t = n + y\sqrt{n}$, transformer l'intégrale $\Gamma(n+1)$ en

$$\frac{n^n}{\mathrm{e}^n}\sqrt{n}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(y)\,\mathrm{d}y$$

où $f_n(y) = 0$ pour $y \le -\sqrt{x}$, $0 \le f_n(y) \le \mathrm{e}^{-y^2/2}$ pour $-\sqrt{t} < y \le 0$ et $0 \le f_n(y) \le (1+y)\mathrm{e}^{-y}$ pour $y > 0$ et $t \ge 1$.

(d) En appliquant le théorème de convergence dominée établir la formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{\mathrm{e}^n}.$$

Exercice 112 [02537] [Correction]

(a) Donner le domaine de définition de la fonction

$$\Gamma\colon x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

(b) Calculer l'intégrale

$$I_n(x) = \int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\mathrm{d}t.$$

(c) Expliquer rapidement pourquoi $\left(1-\frac{t}{n}\right)^n$ converge vers e^{-t} et montrer que

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

Exercice 113 [00941] [Correction]

Établir que pour tout $x > 0$

$$\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!(x+n)}.$$

Applications au calcul d'intégrales

Exercice 114 [03654] [Correction]
L'objectif de ce sujet est de calculer

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

Pour $x\geq 0$, on pose

$$F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}\,\mathrm{d}t.$$

(a) Justifier que la fonction F est bien définie

(b) Déterminer une équation linéaire d'ordre 1 dont F est solution sur $]0\,;+\infty[$.

(c) Calculer $F(0)$ et la limite de F en $+\infty$.

(d) En déduire la valeur de I.

Exercice 115 [02638] [Correction]
On pose, pour $x\geq 0$,

$$F(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que F est continue sur $[0\,;+\infty[$ et tend vers 0 en $+\infty$.

(b) Montrer que F est deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et calculer $F''(x)$.

(c) En déduire la valeur de $F(0)$ puis la valeur de l'intégrale convergente

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 116 [00542] [Correction]

(a) Justifier la convergence de l'intégrale

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

(b) Pour tout $x\geq 0$, on pose

$$F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-xt}\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Déterminer la limite de F en $+\infty$.

(c) Justifier que F est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et calculer F'

(d) En admettant la continuité de F en 0 déterminer la valeur de I.

Exercice 117 [00543] [Correction]
Pour $x\in\mathbb{R}_+$ et $t\geq 0$, on pose $f(x,t)=\mathrm{e}^{-xt}\operatorname{sinc} t$ où sinc (lire sinus cardinal) est la fonction $t\mapsto\frac{\sin t}{t}$ prolongée par continuité en 0.
Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose

$$u_n(x)=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}f(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que $u_n(x)=(-1)^n\int_0^\pi g_n(x,u)\,\mathrm{d}u$ avec $g_n(x,u)$ qu'on explicitera.

(b) Montrer que la série de fonctions de terme général u_n converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

(c) On pose $U(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$. Justifier que U est continue et expliciter U sous la forme d'une intégrale convergente.

(d) Montrer que U est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$ et calculer $U'(x)$.

(e) Expliciter $U(x)$ pour $x>0$ puis la valeur de

$$U(0)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 118 [02872] [Correction]
Pour $x\in\mathbb{R}_+$, soit

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t.$$

(a) Justifier la définition de $f(x)$.

(b) Montrer que f est classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(c) Calculer $f(x)$ si $x\in\mathbb{R}_+^*$.

(d) Montrer que f est continue en 0. Qu'en déduit-on ?

Exercice 119 [00550] [Correction]
Soit F la fonction définie par :

$$F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Déterminer l'expression de $F(x)$.

(c) Calculer
$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 120 [03312] [Correction]

(a) Montrer que pour tout $x > -1$
$$\int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\ln 2}{2}\arctan x + \frac{\pi}{8}\ln(1+x^2) - \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

(b) En déduire la valeur de
$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 121 [04177] [Correction]

(a) Déterminer le domaine de définition réel de
$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\arctan(x\tan\theta)}{\tan\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

(b) Calculer $F(x)$.

(c) En déduire les valeurs de
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\theta}{\tan\theta}\,\mathrm{d}\theta$$
et de
$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
À chaque fois, on vérifie que les fonctions engagées sont continues par morceaux.

(a) Sur $[0\,;\pi/4[$, $\tan^n x \xrightarrow{CVS} 0$ $\left|\tan^n x\right| \leq 1 = \varphi(x)$ intégrable sur $[0\,;\pi/4[$ donc

$$u_n \to \int_0^{\pi/4} 0\,\mathrm{d}x = 0.$$

(b) Sur $[0\,;+\infty[$, $\frac{1}{x^n+\mathrm{e}^x} \xrightarrow{CVS} f(x)$ avec $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ sur $[0\,;1[$ et $f(x) = 0$ sur $]1\,;+\infty[$.
De plus $\left|\frac{1}{x^n+\mathrm{e}^x}\right| \leq \mathrm{e}^{-x} = \varphi(x)$ avec φ intégrable sur $[0\,;+\infty[$ donc

$$v_n \to \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}.$$

Exercice 2 : [énoncé]
En découpant l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{n+2}}\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+2}}\,\mathrm{d}x.$$

En appliquant le théorème de convergence dominée aux deux intégrales, on obtient

$$I_n \to \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = 1.$$

Exercice 3 : [énoncé]
À chaque fois, on vérifie que les fonctions engagées sont continues par morceaux.

(a) Ici, on ne peut appliquer le théorème de convergence dominée sur $[0\,;+\infty[$ après une majoration de $|\sin x|$ par 1 car la fonction dominante $\varphi(x) = 1/x^2$ ne sera pas intégrable sur $]0\,;+\infty[$. Pour contourner cette difficulté, on découpe l'intégrale.

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^n x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\sin^n x}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{\sin^n x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

On a

$$\left|\int_0^1 \frac{\sin^n x}{x^2}\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_0^1 \left|\sin^{n-2}(x)\right|\mathrm{d}x \quad \text{car} \quad |\sin x| \leq |x|\,.$$

Sans difficultés, par le théorème de convergence dominée

$$\int_0^1 \left|\sin^{n-2}(x)\right|\mathrm{d}x \to 0$$

et donc

$$\int_0^1 \frac{\sin^n x}{x^2}\,\mathrm{d}x \to 0.$$

Aussi

$$\left|\int_1^{+\infty} \frac{\sin^n x}{x^2}\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|^n}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Or $\frac{|\sin x|^n}{x^2} \xrightarrow{CS} f(x)$ avec $f(x) = 0$ pour tout $x \neq \pi/2\ [\pi]$.
De plus $\frac{|\sin x|^n}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} = \varphi(x)$ avec φ intégrable sur $[1\,;+\infty[$ donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|^n}{x^2}\,\mathrm{d}x \to \int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

puis $u_n \to 0$.

(b) On écrit

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{x^{n+2}+1} + \int_1^{+\infty} \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{x^{n+2}+1}.$$

On a

$$\left|\int_0^1 \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{x^{n+2}+1}\right| \leq \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$$

et

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{x^{n+2}+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = 1$$

en vertu du théorème de convergence dominée et via la domination $\left|\frac{x^n}{x^{n+2}+1}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ sur $[1\,;+\infty[$.
Ainsi $u_n \to 1$.

(c) On écrit

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{x^{2n}+1} + \int_1^{+\infty} \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{x^{2n}+1}.$$

On a

$$\left|\int_0^1 \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{x^{2n}+1}\right| \leq \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$$

et

$$\left|\int_1^{+\infty} \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{x^{2n}+1}\right| \leq \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n} = \frac{1}{n-1}$$

donc $u_n \to 0$.
On peut aussi appliquer le théorème de convergence dominée mais c'est moins efficace.

Exercice 4 : [énoncé]
Posons
$$f_n\colon t \mapsto \frac{\sin(nt)}{nt+t^2}.$$
La fonction f_n est définie et continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$.
Quand $t \to 0^+$, $f_n(t) \sim \frac{nt}{nt+t^2} \to 1$.
Quand $t \to +\infty$; $f_n(t) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$.
On peut donc affirmer que f_n est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.
Pour $t \in]0\,;+\infty[$.
Quand $n \to +\infty$, $f_n(t) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ donc la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.
De plus, pour $t \le \pi/2$, on a, sachant $|\sin u| \le |u|$,
$$\left|f_n(t)\right| \le \frac{nt}{nt+t^2} \le 1$$
et pour $t \ge \pi/2$,
$$\left|f_n(t)\right| \le \frac{1}{nt+t^2} \le \frac{1}{t^2}.$$
Ainsi $|f_n| \le \varphi$ avec
$$\varphi\colon t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0\,;\pi/2] \\ 1/t^2 & \text{si } t \in]\pi/2\,;+\infty[. \end{cases}$$
La fonction φ étant intégrable sur $]0\,;+\infty[$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et affirmer
$$u_n \to \int_0^{+\infty} 0\,\mathrm{d}t = 0.$$

Exercice 5 : [énoncé]
La fonction intégrée ne converge pas simplement en les $t = \pi/2 + \pi\ [2\pi]$. Pour contourner cette difficulté on raisonne à l'aide de valeurs absolues.
$$\left|\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin^n(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\left|\sin^n t\right|\mathrm{d}t.$$
On a
$$f_n(t) = \left|\mathrm{e}^{-t}\sin^n(t)\right| \xrightarrow{CS} f(t)$$
avec
$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \ne \pi/2\ [\pi] \\ \mathrm{e}^{-t} & \text{sinon.} \end{cases}$$
Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux et
$$\left|f_n(t)\right| \le \mathrm{e}^{-t} = \varphi(t)$$
avec φ continue par morceaux intégrable sur $[0\,;+\infty[$ donc par convergence dominée :
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin^n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Exercice 6 : [énoncé]
Les fonctions données par
$$f_n(t) = \left(1+t^2/n\right)^{-n}$$
sont définies et continues par morceaux sur $\mathbb{R}$.
La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers f avec $f(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$ définie et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé et considérons
$$\varphi\colon x \mapsto -x\ln(1+t^2/x)$$
définie sur $[1\,;+\infty[$.
En étudiant le signe de φ'', on démontre φ' est croissante. Or $\lim_{+\infty}\varphi' = 0$ et donc φ' est négative.
La fonction φ est donc décroissante et par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$\left|f_n(t)\right| \le \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} = \exp(\varphi(n)) \le \exp(\varphi(1)) = \frac{1}{1+t^2}.$$
La fonction $t \mapsto 1/(1+t^2)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
Par convergence dominée
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 7 : [énoncé]
La fonction $t \mapsto \frac{1}{(1+t^3)^n}$ est continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$ et on observe

$$\frac{1}{(1+t^3)^n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{3n}}$$

avec $3n > 1$ donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$ est bien définie pour $n \geq 1$.
Par application du théorème de convergence dominée (en prenant $\varphi(t) = \frac{1}{1+t^3}$ pour dominatrice), on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n} = 0.$$

La décroissance de $(|u_n|)$ et la positivité de l'intégrale étant des propriétés immédiates, on peut appliquer le critère spécial et affirmer que $\sum u_n$ converge.

Exercice 8 : [énoncé]
f_n est définie et continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$.
Quand $x \to 0^+$, $f_n(x) \to \frac{1}{n}$, on peut donc la prolonger par continuité.
Quand $x \to +\infty$, $f_n(x) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
Par suite f_n est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{n\ln(1+x/n)}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x.$$

Posons

$$g_n(x) = \frac{n\ln(1+x/n)}{x(1+x^2)} = nf_n(x).$$

Pour $x > 0$, quand $n \to +\infty$, $g_n(x) \to \frac{1}{1+x^2}$.
De plus, sachant $\ln(1+u) \leq u$, on a $\left|g_n(x)\right| \leq \frac{1}{1+x^2} = \varphi(x)$ avec φ intégrable.
Par convergence dominée,

$$u_n \to \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 9 : [énoncé]
Par changement de variable

$$\mu_n = \int_0^1 f(ns)\,\mathrm{d}s.$$

Par convergence dominée

$$\mu_n \to \ell.$$

Exercice 10 : [énoncé]
Par le changement de variable $u = nt$

$$I_n = \int_0^{+\infty} f(u/n)\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u.$$

Par convergence dominée, sachant

$$\left|f(u/n)\right| \leq \|f\|_\infty \mathrm{e}^{-u} = \varphi(u)$$

avec φ intégrable, on obtient

$$I_n \to \int_0^{+\infty} f(0)\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = f(0).$$

Exercice 11 : [énoncé]
Par le changement de variable $u = nx$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{f(u/n)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u.$$

Posons alors $f_n\colon u \mapsto \frac{f(u/n)}{1+u^2}$ définie sur $\mathbb{R}_+$.
La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers

$$f_\infty\colon u \mapsto \frac{f(0)}{1+u^2}.$$

Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

$$\left|f_n(u)\right| \leq \frac{\|f\|_\infty}{1+u^2} = \varphi(u)$$

avec φ intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
Par convergence dominée,

$$\int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \frac{f(0)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi f(0)}{2}.$$

Exercice 12 : [énoncé]
(a) Pour $x > 0$, posons

$$u_n(x) = \int_0^{+\infty} n\cos t(\sin t)^n f(xt)\,\mathrm{d}t.$$

L'intégrabilité de f assure que $u_n(x)$ est bien définie.
Puisque f' est intégrable, la fonction f converge en $+\infty$ et, puisque f est aussi intégrable, f tend vers 0 en $+\infty$. Par intégration par parties, on obtient alors

$$u_n(x) = -\frac{n}{n+1}\int_0^{+\infty} (\sin t)^{n+1} x f'(xt)\,\mathrm{d}t.$$

Posons $g_n(x) = |\sin t|^{n+1} x f'(xt)\,\mathrm{d}t$.
Chaque fonction g_n est continue par morceaux.
La suite de fonctions (g_n) converge simplement vers une fonction continue par morceaux, nulle en chaque $x \neq \pi/2 + k\pi$.
La fonction limite simple est continue par morceaux.
Enfin on a la domination

$$\left|g_n(x)\right| \leq x f'(xt) = \varphi(t)$$

avec la fonction φ intégrable.
Par convergence dominée

$$\int_0^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et par comparaison

$$u_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

(b) On vient déjà d'obtenir une convergence simple de la suite de fonctions (u_n) vers la fonction nulle. Montrons qu'en fait il s'agit d'une convergence uniforme.
Par changement de variable

$$u_n(x) = -\frac{n}{n+1}\int_0^{+\infty} (\sin(u/x))^{n+1} f'(u)\,\mathrm{d}u.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la fonction f' est intégrable, il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\int_A^{+\infty} \left|f'(u)\right|\mathrm{d}u \leq \varepsilon$$

et alors

$$\left|u_n(x)\right| \leq M\int_0^A \left|\sin(u/x)\right|^{n+1}\mathrm{d}u + \varepsilon \text{ avec } M = \max_{u\in[0;A]}\left|f'(u)\right|.$$

Pour $x \geq 4A/\pi$, on a

$$\forall u \in [0\,;A], 0 \leq \frac{u}{x} \leq \frac{A}{x} \leq \frac{\pi}{4}$$

et donc

$$\int_0^A \left|\sin(u/x)\right|^{n+1}\mathrm{d}u \leq \frac{A}{\sqrt{2}^{n+1}}.$$

Pour $x \leq 4A/\pi$, on a par changement de variable

$$\int_0^A \left|\sin(u/x)\right|^{n+1}\mathrm{d}u = x\int_0^{A/x} |\sin t|^{n+1}\,\mathrm{d}t.$$

Pour k entier tel que $k\pi < A/x \leq (k+1)\pi$.

$$\int_0^A \left|\sin(u/x)\right|^{n+1}\mathrm{d}u \leq x\int_0^{(k+1)\pi} |\sin t|^{n+1}\,\mathrm{d}t = x(k+1)\int_0^{\pi} (\sin t)^{n+1}\,\mathrm{d}t.$$

Or $x(k+1)\pi \leq A + x\pi \leq 5A$ et donc

$$\int_0^A \left|\sin(u/x)\right|^{n+1}\mathrm{d}u \leq \frac{5A}{\pi}\int_0^{\pi} (\sin t)^{n+1}\,\mathrm{d}t.$$

Finalement, pour tout $x > 0$,

$$\left|u_n(x)\right| \leq \frac{5AM}{\pi}\int_0^{\pi} (\sin t)^{n+1}\,\mathrm{d}t + \frac{AM}{\sqrt{2}^{n+1}} + \varepsilon$$

et donc pour n assez grand, on a pour tout $x > 0$.

$$\left|u_n(x)\right| \leq 2\varepsilon.$$

Il y a donc convergence uniforme vers la fonction nulle.

Exercice 13 : [énoncé]
Posons

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - t^2/n\right)^n & \text{si } t \in [0\,;\sqrt{n}[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $t \in [0\,;+\infty[$, à partir d'un certain rang $t > \sqrt{n}$ et

$$f_n(t) = \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)\right) \to \mathrm{e}^{-t^2}.$$

Ainsi, la suite (f_n) converge simplement vers $f\colon t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$.
En vertu de l'inégalité $\ln(1+u) \leq u$, on obtient

$$\left|f_n(t)\right| \leq \mathrm{e}^{-t^2} = \varphi(t)$$

et ce que $t \in [0\,;\sqrt{n}]$ ou non.
La fonction φ est intégrable sur $[0\,;+\infty[$.
Par application du théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 14 : [énoncé]
Posons

$$f_n(x)=\begin{cases}(1+x/n)^n & \text{si } x\in[0\,;n]\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Pour $x\in[0\,;+\infty[$, à partir d'un certain rang $x \geq n$ et

$$f_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\mathrm{e}^{-2x}=\exp\left(n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-2x\right)\to\mathrm{e}^{-x}.$$

Ainsi, la suite (f_n) converge simplement vers $f\colon x\mapsto\mathrm{e}^{-x}$.
En vertu de l'inégalité $\ln(1+u)\leq u$, on obtient

$$\left|f_n(x)\right|\leq\mathrm{e}^{-x}=\varphi(x)$$

et ce que $x\in[0\,;n]$ ou non.
La fonction φ est intégrable sur $[0\,;+\infty[$.
Par application du théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=1.$$

Exercice 15 : [énoncé]
Par changement de variable

$$\int_0^n\sqrt{1+\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}\,\mathrm{d}x\ n\underset{u=1-x/n}{=}n\int_0^1\sqrt{1-u^n}\,\mathrm{d}u.$$

Par le théorème de convergence dominée

$$\int_0^1\sqrt{1-u^n}\,\mathrm{d}u\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$$

donc

$$\int_0^n\sqrt{1+\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}\,\mathrm{d}x\sim n.$$

Exercice 16 : [énoncé]
Posons $f_n(x)=\left(\cos\frac{x}{n}\right)^{n^2}$ si $x\in[0\,;n]$ et $f_n(x)=0$ si $x\in\,]n\,;+\infty[$.
Pour $x\in\mathbb{R}_+$, quand $n\to+\infty$,

$$f_n(x)=\left(\cos\frac{x}{n}\right)^{n^2}=\exp\big(n^2\ln\big(1-x^2/2n^2+\mathrm{o}(1/n^2)\big)\big)\to\mathrm{e}^{-x^2/2}.$$

Ainsi, la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $f\colon x\mapsto\mathrm{e}^{-x^2/2}$ sur $[0\,;+\infty[$. Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux.
Soit $\psi\colon[0\,;1]\to\mathbb{R}$ définie par $\psi(t)=1-t^2/4-\cos t$. Par étude des variations,

$$\forall x\in[0\,;1],\psi(x)\geq 0.$$

On en déduit que, pour $x\in[0\,;n]$,

$$\ln\left(\cos\frac{x}{n}\right)\leq\ln\left(1-\frac{x^2}{4n^2}\right)\leq-\frac{x^2}{4n^2}$$

puis

$$f_n(x)\leq\mathrm{e}^{-x^2/4}.$$

Cette inégalité vaut aussi pour $x\in\,]n\,;+\infty[$ et puisque la fonction $x\mapsto\mathrm{e}^{-x^2/4}$ est intégrable, on peut appliquer le théorème de convergence dominée pour affirmer

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n\left(\cos\frac{x}{n}\right)^{n^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Exercice 17 : [énoncé]
On a

$$\left|\frac{n!}{\prod_{k=1}^n(k+x)}\right|\leq\frac{1\times 2}{(x+1)(x+2)}\times 1=\varphi(x)$$

avec φ intégrable sur $[0\,;+\infty[$.
Quand $n\to+\infty$,

$$\ln\left(\frac{n!}{\prod_{k=1}^n(k+x)}\right)=-\sum_{k=1}^n\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\to-\infty$$

car $\ln(1+x/k)\sim x/k$ terme général d'une série à termes positifs divergente.
Par suite

$$\frac{n!}{\prod_{k=1}^n(k+x)}\to 0$$

puis par le théorème de convergence dominée

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{n!}{\prod_{k=1}^n(k+x)}\,\mathrm{d}x=0.$$

Exercice 18 : [énoncé]

(a) Appliquons le théorème de convergence dominée.
Posons $f_n\colon[0\,;1]\to\mathbb{R}$ définie par

$$f_n(t)=F\big(\sqrt{n}(\delta t-h)\big).$$

Pour $t\in[0\,;h/\delta[$, on a $f_n(t)\to 1$.
Pour $t\in]h/\delta\,;1]$, on a $f_n(t)\to 0$.
Enfin, pour $t=h/\delta$, $f_n(t)=F(0)\to F(0)$.
Ainsi la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0\,;1]$ vers f définie par

$$f(t)=\begin{cases}1 & \text{si } t\in[0\,;h/\delta[\\ F(0) & \text{si } t=h/\delta\\ 0 & \text{si } t\in]h/\delta\,;1].\end{cases}$$

Les fonctions f_n sont continues et la limite simple f est continue par morceaux.
Enfin

$$\forall t\in[0\,;1],\left|f_n(t)\right|\le 1=\varphi(t)$$

avec φ continue par morceaux et intégrable.
Par convergence dominée,

$$I_n\to\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{h/\delta}1\,\mathrm{d}t=\frac{h}{\delta}.$$

(b) Par la décroissance de F, on peut écrire

$$\int_{(k+1)/n}^{(k+2)/n}F\big(\sqrt{n}(\delta t-h)\big)\,\mathrm{d}t\le\frac{1}{n}F\left(\sqrt{n}\left(\delta\frac{k+1}{n}-h\right)\right)\le\int_{k/n}^{(k+1)/n}F\big(\sqrt{n}(\delta t-h)\big)\,\mathrm{d}t.$$

En sommant ces inégalités

$$\int_{1/n}^{(n+1)/n}F\big(\sqrt{n}(\delta t-h)\big)\,\mathrm{d}t\le\frac{S_n}{n}\le I_n$$

et

$$\int_{1/n}^{(n+1)/n}F\big(\sqrt{n}(\delta t-h)\big)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 F\big(\sqrt{n}(\delta(t+1/n)-h)\big)\,\mathrm{d}t.$$

Par convergence dominée, on obtient de façon analogue à ce qui précède, la limite de ce terme et on conclut

$$S_n\sim\frac{h}{\delta}n.$$

Exercice 19 : [énoncé]

(a) (f_n) converge simplement vers la fonction f donnée par

$$f(x)=\begin{cases}f(x) & \text{si } x\in[a\,;1[\\ f(1)/2 & \text{si } x=1\\ 0 & \text{si } x\in]1\,;b].\end{cases}$$

(b) Sachant $\left|f_n(x)\right|\le\left|f(x)\right|$ avec f intégrable sur $[a\,;b]$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et on obtient directement le résultat proposé.

(c) Par une intégration par parties

$$\int_a^1 t^{n-1}f_n(t)\,\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{n}\ln(1+t^n)f(t)\right]_a^1-\frac{1}{n}\int_a^1\ln(1+t^n)f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

D'une part

$$\left[\frac{1}{n}\ln(1+t^n)f(t)\right]_a^1=\frac{\ln 2}{n}f(1)+\frac{\ln(1+a^n)}{n}f(a)=\frac{\ln 2}{n}f(1)+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

car $\ln(1+a^n)\to 0$.
D'autre part

$$\left|\frac{1}{n}\int_a^1\ln(1+t^n)f'(t)\,\mathrm{d}t\right|\le\frac{1}{n}\left\|f'\right\|_\infty\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)=\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

sachant $\ln(1+u)\le u$.
Au final, on obtient

$$\int_a^1 t^{n-1}f_n(t)\,\mathrm{d}t=\frac{\ln 2}{n}f(1)+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 20 : [énoncé]
L'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

est bien définie.
Par le changement de variable $x = u/n$ bijectif de classe $\mathcal{C}^1$

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{na}^{nb} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{u^2}{2n^4}\right)^{2n^4} g(u/n)\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(u)\,\mathrm{d}u$$

avec

$$h_n(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{u^2}{2n^4}\right)^{2n^4} g(u/n)\chi_{[na;nb]}$$

h_n est continue par morceaux, (h_n) converge simplement vers h continue par morceaux avec

$$h(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-u^2} g(0).$$

Pour n assez grand de sorte que $|a/n|, |b/n| \leq 1$ on a pour tout $u \in [na\,;nb]$, $\left|u^2/2n^4\right| \leq 1/2 < 1$,

$$\left|h_n(u)\right| = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{2n^4\ln(1-u^2/2n^4)} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-u^2} = \varphi(u)$$

et cette inégalité vaut aussi pour $u \notin [na\,;nb]$.
La fonction φ étant continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et conclure sachant

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}.$$

Exercice 21 : [énoncé]
Par le changement de variable $u = t^{n+1}$, on obtient

$$(n+1)I_n = \int_0^1 f\big(u^{1/(n+1)}\big)\,\mathrm{d}u.$$

Posons $f_n(u) = f\big(u^{1/(n+1)}\big)$ avec $u \in [0\,;1]$ et réunissons les hypothèses d'application du théorème de convergence dominée :

(1) Pour tout $u \in [0\,;1]$, on peut affirmer par continuité de f et composition de limites

$$f_n(u) = f\big(u^{1/(n+1)}\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f_\infty(u) = \begin{cases} f(0) & \text{si } u = 0 \\ f(1) & \text{si } u \in \,]0\,;1]. \end{cases}$$

On en déduit que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0\,;1]$ vers la fonction f_∞ décrite ci-dessus.

(2) Les fonctions f_n et la fonction f_∞ sont continues par morceaux.

(3) La fonction f étant continue sur le segment $[0\,;1]$, elle y est bornée par un certain $M \in \mathbb{R}_+$ et alors

$$\forall u \in [0\,;1], \left|f_n(u)\right| = \left|f\big(u^{1/(n+1)}\big)\right| \leq M = \varphi(t).$$

La fonction constante φ est évidemment intégrable sur le segment $[0\,;1]$.

Par le théorème convergence dominée, on obtient

$$(n+1)I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f_\infty(u)\,\mathrm{d}u = f(1).$$

Sachant $f(1) \neq 0$, cette limite finie non nulle est aussi un équivalent et donc

$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{f(1)}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{f(1)}{n}.$$

Exercice 22 : [énoncé]

(a) Une fonction dérivable sur un intervalle y est strictement croissante si, et seulement si, sa dérivée est positive et n'est nulle sur aucun sous-intervalle non réduit à un point (l'ensemble des zéros est d'intérieur vide).

(b) L'application $F\colon x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une bijection continue strictement croissante de $[a\,;b]$ vers $[0\,;L]$ avec L l'intégrale de f sur $[a\,;b]$. Les x_i sont alors déterminés par

$$x_i = F^{-1}\left(\frac{iL}{n}\right).$$

(c) On peut écrire

$$\frac{L}{n}\sum_{i=1}^n g(x_i) = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x_i)f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Montrons par application du théorème de convergence dominée

$$\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x_i)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

On écrit
$$\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x_i)\,\mathrm{d}x = \int_a^b h_n(x)\,\mathrm{d}x$$
avec
$$h_n(x) = g(x_i)f(x) \text{ pour } x \in [x_{i-1}\,;x_i[\text{ } (x_i \text{ est fonction de } n).$$
Les fonctions g et h étant continues sur un segment, on peut les borner et il est facile d'acquérir l'hypothèse de domination. Le plus difficile est d'obtenir la convergence simple...

Soit $x \in [a\,;b]$.

Si $f(x) = 0$ alors $h_n(x) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)g(x)$.

Si $f(x) \neq 0$ alors, il existe $m > 0$ et $\alpha > 0$ tels que
$$\forall y \in [a\,;b],\ |y-x| \leq \alpha \implies f(y) \geq m.$$
Pour l'indice i tel que $x \in [x_{i-1}\,;x_i[$, on a (selon que l'intervalle $[x_{i-1}\,;x_i]$ est de longueur supérieure ou inférieure à α)
$$\frac{1}{n}L = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t \geq m\min(x_i - x_{i-1}, \alpha).$$
On en déduit $x_i - x_{i-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ puis $x_i \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$, et, par continuité de g, $h_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)g(x)$.

Par application du théorème de convergence dominée, on peut conclure
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(x_i) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Exercice 23 : [énoncé]

Sans perte de généralités, on suppose $a \leq b$.

(a) Les suites (a_n) et (b_n) sont bien définies et à termes positifs. Par l'inégalité $2xy \leq x^2 + y^2$, on obtient $a_{n+1} \leq b_{n+1}$. On en déduit la croissance de (a_n) et la décroissance de (b_n). Ces suites sont monotones et bornées donc convergentes. Notons ℓ et ℓ' leurs limites. Par passage à la limite de la relation définissant a_{n+1} en fonction de a_n et b_n, on obtient
$$\ell = \frac{\ell + \ell'}{2}.$$
On en déduit $\ell = \ell'$.

(b) L'intégrale définissant $T(a,b)$ est convergente car
$$\frac{1}{\sqrt{(a^2+u^2)(b^2+u^2)}} \underset{u\to\pm\infty}{\sim} \frac{1}{u^2}.$$
La fonction de changement de variable $t \mapsto \frac{1}{2}\left(t - \frac{ab}{t}\right)$ est une bijection $\mathcal{C}^1$ croissante de $]0\,;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$. Après calculs
$$T\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}}.$$
Par parité de la fonction intégrée
$$T\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = T(a,b).$$

(c) On a
$$T(a_{n+1}, b_{n+1}) = T(a_n, b_n)$$
et donc
$$T(a_n, b_n) = T(a,b).$$
Par convergence dominée avec la fonction de domination
$$\varphi(u) = \frac{1}{a^2 + u^2}$$
on obtient
$$T(a_n, b_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{M(a,b)^2 + u^2} = \frac{1}{M(a,b)}\left[\arctan\frac{u}{M(a,b)}\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{M(a,b)}.$$

Exercice 24 : [énoncé]

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Introduisons $u_n\colon [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par
$$u_n(x) = \frac{1}{(1+x^3)^n}.$$
La fonction u_n est continue par morceaux et intégrable car
$$u_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{3n}} \quad \text{avec} \quad 3n > 1.$$

(b) La suite de fonctions (u_n) converge simplement vers

$$u_\infty : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Les fonctions u_n et u_∞ sont continues par morceaux et, pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in [0\,;+\infty[$,

$$\left|\frac{1}{(1+x^3)^n}\right| \leq \frac{1}{1+x^3} = \varphi(x).$$

La fonction φ est intégrable et par convergence dominée

$$I_n = \int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} u_\infty(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

(c) On remarque $0 \leq u_{n+1}(x) \leq u_n(x)$ pour tout $x \in [0\,;+\infty[$ et, par intégration en bon ordre, $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$. On en déduit que la série $\sum(-1)^{n-1}I_n$ est alternée et que son terme général décroît en valeur absolue vers 0 : la série converge par application du critère spécial.

Pour tout $N \geq 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}I_n &= \int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}}{(1+x^3)^n}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^3}\left(\frac{1-\frac{(-1)^N}{(1+x^3)^N}}{1+\frac{1}{1+x^3}}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{2+x^3}\left(1+\frac{(-1)^{N+1}}{(1+x^3)^N}\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Or

$$\left|\int_0^{+\infty}\frac{1}{2+x^3}\cdot\frac{(-1)^{N+1}}{(1+x^3)^N}\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^3)^{N+1}} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

car $2+x^3 \geq 1+x^3$ On en déduit

$$\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}I_n \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{2+x^3}.$$

Pour calculer, cette dernière intégrale, on réalise le changement de variable $x = 2^{1/3}t$ puis la décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{t^3+1} = \frac{1/3}{t+1} + \frac{-\frac{1}{3}t+\frac{2}{3}}{t^2-t+1}.$$

Au terme des calculs

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}I_n = \frac{2^{1/3}\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Exercice 25 : [énoncé]

Pour tout $t > 0$, on a

$$\frac{1}{\mathrm{e}^t-1} = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-nt}$$

donc

$$\frac{t}{\mathrm{e}^t-1} = \sum_{n=1}^{+\infty}t\mathrm{e}^{-nt} = \sum_{n=1}^{+\infty}f_n(t).$$

Les fonctions f_n sont continues par morceaux sur $]0\,;+\infty[$ et, en vertu de l'étude qui précède, la série $\sum f_n$ converge simplement et sa somme est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$

Les fonctions f_n sont intégrables sur $]0\,;+\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty}\left|f_n(t)\right|\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$$

qui est sommable. On en déduit que la fonction $t \mapsto \frac{t}{\mathrm{e}^t-1}$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty}\frac{t}{\mathrm{e}^t-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Exercice 26 : [énoncé]

Pour $x \in [0\,;1[$, on peut écrire

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$$

et pour $x \in]0\,;1[$, on a

$$\frac{(\ln x)^2}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}(\ln x)^2.$$

Considérons alors la série des fonctions

$$u_n(x) = (-1)^n x^{2n}(\ln x)^2.$$

Par convergence des séries précédentes, la série des fonctions u_n converge simplement vers la fonction $x \mapsto (\ln x)^2/(1+x^2)$. Les fonctions u_n et la fonction somme sont continues par morceaux.
Chaque fonction u_n est intégrable et

$$\int_0^1 |u_n(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{2n}(\ln x)^2\,\mathrm{d}x.$$

Par intégration par parties, on montre

$$\int_0^1 x^{2n}(\ln x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{(2n+1)^3}.$$

On peut alors appliquer le théorème d'intégration terme à terme et affirmer

$$\int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

Exercice 27 : [énoncé]
Sur $]0\,;1[$,

$$\frac{\ln t}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{2n}(\ln t).$$

Posons $f_n(t) = (-1)^n t^{2n}\ln t$.
Les $f_n\colon]0\,;1[\to \mathbb{R}$ sont continues par morceaux et la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers $\frac{\ln t}{1+t^2}$ elle-même continue par morceaux sur $]0\,;1[$.

$$\int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(2n+1)^2}$$

et la série $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge donc on peut intégrer terme à terme la série de fonctions et on obtient

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 (-1)^n t^{2n}\ln t\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2}.$$

Ce dernier calcul est non trivial et fait référence à la constante de Catalan.

Exercice 28 : [énoncé]
Pour $t \in]0\,;1[$, on peut écrire

$$\frac{\ln t}{1-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n}\ln t.$$

Or

$$\int_0^1 t^{2n}\ln t\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{(2n+1)^2}.$$

Sachant que la série des intégrales des valeurs absolues converge, le théorème d'intégration terme à terme de Fubini donne

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = -\frac{3\zeta(2)}{4}$$

avec en substance la convergence de l'intégrale étudiée.

Exercice 29 : [énoncé]

(a) Par intégration par parties avec convergence du terme entre crochet (car $\ln(1+t) \sim_{t\to 0} t$)

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(1+t)\ln(t)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

et donc

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

(b) Sur $]0\,;1[$,

$$-\frac{\ln t}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}t^n(\ln t).$$

Posons $f_n(t) = (-1)^{n-1}t^n\ln t$.
Les $f_n\colon]0\,;1[\to \mathbb{R}$ sont continues par morceaux et la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers $-\frac{\ln t}{1+t}$ elle-même continue par morceaux sur $]0\,;1[$.
On a

$$\int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)^2}$$

et la série $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$ converge donc on peut intégrer terme à terme la série de fonctions et donc

$$-\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 (-1)^{n-1}t^n\ln t\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

(c) En séparant les termes pairs et les termes impairs (ce qui se justifie en transitant par les sommes partielles)

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}-\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^2}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}-2\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^2}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}.$$

Exercice 30 : [énoncé]

(a) Par une intégration par parties avec convergence du terme entre crochet (car $\arctan t \underset{t\to 0}{\sim} t$)

$$\int_0^1 \frac{\arctan t}{t}\,\mathrm{d}t=\Big[\ln(t)\arctan(t)\Big]_0^1-\int_0^1\frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

On obtient donc

$$\int_0^1 \frac{\arctan t}{t}\,\mathrm{d}t=-\int_0^1\frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

avec convergence des intégrales proposées

(b) Pour tout t élément de $]0\,;1[$,

$$-\frac{\ln t}{1+t^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}t^{2n}(\ln t).$$

Posons $f_n(t)=(-1)^{n-1}t^{2n}\ln t$.
Les $f_n\colon\,]0\,;1[\,\to\mathbb{R}$ sont continues par morceaux et la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers $-\frac{\ln t}{1+t^2}$ elle-même continue par morceaux sur $]0\,;1[$.

$$\int_0^1 \left|f_n(t)\right|\mathrm{d}t=\frac{1}{(2n+1)^2}$$

et la série $\sum\frac{1}{(2n+1)^2}$ converge donc on peut intégrer terme à terme la série de fonctions et donc

$$-\int_0^1\frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1(-1)^{n-1}t^{2n}\ln t\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$

Rq : on aurait aussi pu exploiter $\arctan t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}t^{2n+1}$.

Exercice 31 : [énoncé]

Les intégrales considérées sont bien définies.
Par intégration par parties,

$$I_n(m)=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln x)^m\right]_0^1-\frac{m}{n+1}I_n(m-1).$$

Ainsi

$$I_n(m)=\frac{(-1)^m}{(n+1)^{m+1}}m!$$

En particulier

$$I_n(n)=\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}n!$$

b) $x^{-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}(x\ln x)^n$.
Par convergence de la série des intégrales des valeurs absolues,

$$\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}I_n(n)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^{n+1}}.$$

Exercice 32 : [énoncé]

Par la série exponentielle, on peut écrire pour $t>0$,

$$t^{-t}=\exp(-t\ln t)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(t\ln t)^n}{n!}.$$

Pour procéder à une intégration terme à terme, posons $u_n(t)=(-1)^n(t\ln t)^n/n!$ pour $t\in\,]0\,;1]$.
Les fonctions u_n sont continues par morceaux et la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0\,;1]$ vers la fonction $t\mapsto t^{-t}$ elle-même continue par morceaux.
Les fonctions u_n sont intégrables sur $]0\,;1]$ car on peut les prolonger par continuité en 0 et

$$\int_0^1\left|u_n(t)\right|\mathrm{d}t=(-1)^n\int_0^1 u_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par intégration par parties

$$\int_\varepsilon^1 (t\ln t)^n\,\mathrm{d}t=\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}(\ln t)^n\right]_\varepsilon^1-\frac{n}{n+1}\int_\varepsilon^1 t^n(\ln t)^{n-1}\,\mathrm{d}t.$$

En passant à la limite quand $\varepsilon \to 0$, on obtient

$$\int_0^1 (t\ln t)^n \,\mathrm{d}t = -\frac{n}{n+1}\int_0^1 t^n(\ln t)^{n-1}\,\mathrm{d}t.$$

En itérant le procédé on obtient

$$\int_0^1 (t\ln t)^n \,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$$

et ainsi

$$\int_0^1 \left|u_n(t)\right| \mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série $\sum \int_0^1 |u_n|$ étant convergente, on peut intégrer terme à terme et l'on obtient

$$\int_0^1 t^{-t}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^{(n+1)}}$$

avec existence de l'intégrale en premier membre.

Exercice 33 : [énoncé]

(a) $f_{p,k}$ est définie et continue par morceaux sur $]0\,;1]$.
Quand $x \mapsto 0^+$, $\sqrt{x} f_{p,k}(x) = x^{p+1/2}(\ln x)^k \to 0$ donc $f_{p,k}(x) = \mathrm{o}\big(1/\sqrt{x}\big)$.
Par suite $f_{p,k}$ est intégrable sur $]0\,;1]$.

(b) Par intégration par parties

$$K_{p,k} = -\frac{k}{p+1}K_{p,k-1}.$$

(c)

$$K_{p,k} = \frac{(-1)^k k!}{(p+1)^k}K_{p,0} = \frac{(-1)^k k!}{(p+1)^{k+1}}$$

et donc

$$J_n = K_{n,n} = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}.$$

(d) $x^x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x\ln x)^n}{n!}$ pour tout $x \in\,]0\,;1]$.
Posons $f_n : x \mapsto \frac{1}{n!}(x\ln x)^n$.
Les fonctions f_n sont continues par morceaux et intégrables sur $]0\,;1]$.
La série $\sum f_n$ converge simplement sur $]0\,;1]$ et sa somme, qui est $x \mapsto x^x$, est continue par morceaux sur $]0\,;1]$.

Enfin

$$\int_0^1 \left|f_n(x)\right| \mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

est terme général d'une série convergente.
Par théorème d'intégration terme à terme, $x \mapsto x^x$ est intégrable sur $]0\,;1]$ et

$$I = \int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

Exercice 34 : [énoncé]
Pour $x \in\,]0\,;1[$, on a

$$\frac{(\ln x)^p}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n(\ln x)^p = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

avec $f_n(x) = x^n(\ln x)^p$ sur $]0\,;1[$.
Les fonctions f_n sont continues par morceaux et la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ l'est aussi.
Les fonctions f_n sont intégrables sur $]0\,;1[$ et par intégration par parties,

$$\int_0^1 |f_n| = (-1)^p\int_0^1 x^n(\ln x)^p\,\mathrm{d}x = \frac{p!}{(n+1)^{p+1}}.$$

Puisque la série $\sum\int |f_n|$ converge, le théorème d'intégration terme à terme de Fubini donne

$$\int_0^1 \frac{(\ln x)^p}{1-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^p p!\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{p+1}}$$

avec en substance existence de l'intégrale et de la série intoduite.

Exercice 35 : [énoncé]
Pour $x > 0$,

$$x^x = \mathrm{e}^{x\ln x} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x\ln x)^n}{n!}$$

donc

$$\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x = \int_{]0;1]}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$

avec
$$f_n(x) = \frac{(x\ln x)^n}{n!}.$$
Les fonctions f_n sont continues par morceaux, $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction continue par morceaux sur $]0\,;1]$.
Les fonctions f_n sont intégrables et
$$\int_{]0;1]} |f_n| = \int_{]0;1[} \frac{(-1)^n x^n (\ln x)^n}{n!}\,\mathrm{d}x.$$
Or
$$\int_\varepsilon^1 x^n(\ln x)^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}(\ln x)^n\right]_\varepsilon^1 - \frac{n}{n+1}\int_\varepsilon^1 x^n(\ln x)^{n-1}\,\mathrm{d}x$$
donc quand $\varepsilon \to 0$
$$\int_{]0;1]} x^n(\ln x)^n\,\mathrm{d}x = -\frac{n}{n+1}\int_{]0;1]} x^n(\ln x)^{n-1}\,\mathrm{d}x.$$
Ainsi
$$\int_{]0;1]} x^n(\ln x)^n\,\mathrm{d}x = (-1)^n\frac{n}{n+1}\frac{n-1}{n+1}\cdots\frac{1}{n+1}\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}.$$
Par suite
$$\int_0^1 |f_n|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$
et il y a convergence de la série $\sum \int_0^1 |f_n|$
Par le théorème d'intégration terme à terme, on obtient que l'intégrale $\int_{]0;1]} x^x\,\mathrm{d}x$ est définie et
$$\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$$
puis le résultat voulu.

Exercice 36 : [énoncé]

(a) Sur $[0\,;1[$, la série de fonction $\sum f_n$ converge simplement et sa somme est
$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \frac{x}{1-x}(1-\sqrt{x}) = \frac{x}{1+\sqrt{x}}.$$
Cette fonction somme est continue par morceaux sur $[0\,;1[$.

Les fonction f_n sont intégrables sur $[0\,;1[$ et
$$\int_0^1 \left|f_n(x)\right|\mathrm{d}x = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \underset{u=\sqrt{x}}{=} \frac{1}{(n+1)(2n+3)}.$$
Ce terme est sommable et l'on peut donc intégrer terme à terme ce qui donne
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

(b) Ainsi
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(2n+3)} = \int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \underset{u=\sqrt{x}}{=} \frac{5}{3} - 2\ln 2.$$

Exercice 37 : [énoncé]

Pour $x \in [0\,;2\pi]$, on peut écrire
$$\mathrm{e}^{2\cos x} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n\cos^n x}{n!}.$$
Posons
$$f_n : x \in [0\,;2\pi] \mapsto \frac{2^n\cos^n x}{n!}.$$
Les fonctions f_n sont continues et la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[0\,;2\pi]$ puisque
$$\|f_n\|_\infty \le \frac{2^n}{n!} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
On peut donc intégrer terme à terme pour obtenir
$$\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{2\cos x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{n!}\int_0^{2\pi}(\cos x)^n\,\mathrm{d}x.$$
Par intégration par parties (cf. intégrale de Wallis)
$$\int_0^{2\pi}(\cos x)^n\,\mathrm{d}x = \frac{n-1}{n}\int_0^{2\pi}(\cos x)^{n-2}\,\mathrm{d}x.$$
Sachant
$$\int_0^{2\pi}(\cos x)^0\,\mathrm{d}x = 2\pi \text{ et } \int_0^{2\pi}(\cos x)^1\,\mathrm{d}x = 0$$

on obtient

$$\int_0^{2\pi}(\cos x)^{2p}\,\mathrm{d}x = 2\pi\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \text{ et } \int_0^{2\pi}(\cos x)^{2p+1}\,\mathrm{d}x = 0$$

et donc

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{2\cos x}\,\mathrm{d}x = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{2^{2p}}{(2p)!}\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}2\pi = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{2\pi}{(p!)^2}.$$

Exercice 38 : [énoncé]
Si $|a|<1$ alors

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-a}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)t}}{1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}a^k\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-(k+1))t}\,\mathrm{d}t.$$

Par convergence normale de la série

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-a}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty}a^k\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-(k+1))t}\,\mathrm{d}t = \begin{cases}2\pi a^{n-1} & \text{si } n\geq 1\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Si $|a|>1$ alors

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-a}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{a}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}/a}\,\mathrm{d}t$$
$$= -\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{a^{k+1}}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+k)t}\,\mathrm{d}t = \begin{cases}-2\pi a^{n-1} & \text{si } n\leq 0\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Exercice 39 : [énoncé]
Par sommation géométrique

$$\forall t>0, \frac{t\mathrm{e}^{-at}}{1-\mathrm{e}^{-bt}} = \sum_{n=0}^{+\infty}t\mathrm{e}^{-(a+nb)t}.$$

Posons $f_n\colon\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ définie par

$$f_n(t) = t\mathrm{e}^{-(a+nb)t}.$$

Les fonctions f_n sont continues par morceaux, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0\,;+\infty[$ et sa somme est continue par morceaux puisque c'est la fonction

$$t\mapsto\frac{t\mathrm{e}^{-at}}{1-\mathrm{e}^{-bt}}.$$

Les fonctions f_n sont intégrables sur $]0\,;+\infty[$ et par intégration par parties

$$\int_{[0;+\infty[}|f_n| = \int_0^{+\infty}f_n = \frac{1}{(a+bn)^2} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Puisque la série $\sum\int|f_n|$ converge, on peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme de Fubini et on obtient

$$\int_0^{+\infty}\frac{t\mathrm{e}^{-at}}{1-\mathrm{e}^{-bt}}\,\mathrm{d}t = \int_{[0;+\infty[}\sum_{n=0}^{+\infty}f_n = \sum\int_{[0;+\infty[}f_n\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(a+bn)^2}.$$

Exercice 40 : [énoncé]
La convergence de l'intégrale proposée est facile.
En découpant l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x/n}}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\mathrm{e}^{-x/n}}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-k\pi/n}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{-x/n}}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

Dans la somme proposée, le terme intégrale ne dépend de l'indice sommation donc

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x/n}}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \left(\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-k\pi/n}\right)\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{-x/n}}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\pi/n}}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{-x/n}}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

Quand $n\to+\infty$,

$$\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\pi/n}}\sim\frac{n}{\pi}$$

et

$$\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{-x/n}}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x\to\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$$

par application du théorème de convergence dominée.
Par le changement de variable $t=\tan x$ inspiré des règles de Bioche,

$$\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} = 2\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} = 2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{2+t^2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Au final

$$\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x/n}}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Exercice 41 : [énoncé]

(a) On a

$$u_n(1) = \int_0^{\pi/2} \sin t(\cos t)^n \,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{n+1}\cos^{n+1} t\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{n+1}.$$

La série de terme général $u_n(1)$ est divergente.

(b) Pour $\alpha \le 1$,

$$\forall t \in \left]0\,;\pi/2\right], (\sin t)^\alpha \ge \sin t$$

et donc $u_n(\alpha) \ge u_n(1)$.
On en déduit que la série de terme général $u_n(\alpha)$ est alors divergente.
Pour $\alpha > 1$. La série des $u_n(\alpha)$ est une série à termes positifs et

$$\sum_{k=0}^{n} u_k(\alpha) = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^\alpha \frac{1-(\cos t)^{n+1}}{1-\cos t}\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\sum_{k=0}^{n} u_k(\alpha) \le \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin t)^\alpha}{1-\cos t}\,\mathrm{d}t$$

avec l'intégrale majorante qui est convergente puisque

$$\frac{(\sin t)^\alpha}{1-\cos t} \sim 2\frac{t^\alpha}{t^2} = \frac{2}{t^{2-\alpha}} \text{ quand } t \to 0^+.$$

Puisque la série à termes positifs $\sum u_n(\alpha)$ a ses sommes partielles majorées, elle est convergente.

(c) Par ce qui précède, on peut intégrer terme à terme car il y a convergence de la série des intégrales des valeurs absolues des fonctions. On peut alors écrire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \sin^\alpha t \cos^n t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^\alpha t}{1-\cos t}\,\mathrm{d}t.$$

Pour $\alpha = 2$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 t}{1-\cos t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} 1+\cos t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}+1.$$

Pour $\alpha = 3$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 t}{1-\cos t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sin t(1+\cos t)\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}.$$

Exercice 42 : [énoncé]

(a) Par intégration par parties on obtient une relation de récurrence qui conduit à

$$\int_0^1 x^n(1-x)^m \,\mathrm{d}x = \frac{n!m!}{(n+m+1)!}.$$

En posant u_n le terme général de la série étudiée, on observe $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \frac{1}{4}$ ce qui assure la convergence de la série.

(b) $S_{-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 x^n(1-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x$. Par convergence de la série des intégrales des valeurs absolues, on peut permuter et obtenir

$$S_{-1} = \int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{1-x(1-x)} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Puisque

$$\binom{2n+2}{n+1} = \frac{4n+2}{n+1}\binom{2n}{n}$$

on observe

$$\frac{4}{\binom{2n+2}{n+1}} - \frac{2}{n+1}\frac{1}{\binom{2n+2}{n+1}} = \frac{1}{\binom{2n}{n}} \quad (*).$$

En sommant pour n allant de 1 à $+\infty$, on obtient

$$4\left(S_0 - \frac{1}{2}\right) - 2\left(S_{-1} - \frac{1}{2}\right) = S_0$$

puis

$$S_0 = \frac{1+2S_{-1}}{3}.$$

(c) On multiplie la relation$(*)$ par $(n+1)^p$ et on développe le $(n+1)^p$ du second membre et en sommant comme ci-dessus, on saura exprimer $3S_p$ en fonction des S_q avec $q < p$.

Exercice 43 : [énoncé]

(a) $f\colon x \mapsto \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}$ est définie, continue sur $[0\,;+\infty[$ et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{x^2}$ donc $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est définie.

(b)

$$\int_0^a \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^a \frac{1}{n^2+x^2}\,\mathrm{d}x - 2\int_0^a \frac{x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$

et

$$\int_0^a \frac{x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[-\frac{x}{n^2+x^2}\right]_0^a + \frac{1}{2}\int_0^a \frac{1}{n^2+x^2}\,\mathrm{d}x$$

donc

$$\int_0^a \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{n^2+a^2}.$$

Par suite

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to+\infty}\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

La série $\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$ est convergente et de somme nulle.

(c) Pour $x\in[0\,;a]$,

$$\left|\frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}\right| \leq \frac{n^2+a^2}{n^4}$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2+a^2}{n^4} < +\infty$$

donc $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}$ converge normalement, et donc uniformément sur $[0\,;a]$.
Par suite

$$\int_0^a\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^a\frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a}{n^2+a^2}.$$

(d) La fonction $x\mapsto\frac{a}{x^2+a^2}$ est décroissante et intégrable sur $[0\,;+\infty[$ donc par comparaison série-intégrale

$$\int_1^{+\infty}\frac{a}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a}{n^2+a^2} \leq \int_0^{+\infty}\frac{a}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x.$$

Or

$$\int_1^{+\infty}\frac{a}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \left[\arctan\frac{x}{a}\right]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{a}$$

et

$$\int_0^{+\infty}\frac{a}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \left[\arctan\frac{x}{a}\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

donc

$$\lim_{a\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{2}.$$

(e) Ci-dessus :

$$\lim_{a\to+\infty}\int_0^a\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

donc l'intégrale

$$\int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$

est convergente et vaut $\pi/2$.
Le résultat diffèrent de celui obtenu en b). Il est donc faux ici de permuter somme et intégrale. Document7

Exercice 44 : [énoncé]

(a) $a_{n+1}/a_n \to 1/\mathrm{e} < 1$.

(b) Posons

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t.$$

Par intégration par parties, on obtient $I_n = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$ d'où

$$a_n = n\int_0^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t.$$

(c) On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} nt^n\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$$

et la série

$$\sum\int_0^{+\infty}\left|nt^n\mathrm{e}^{-nt}\right|\mathrm{d}t = \sum a_n$$

converge donc on peut intégrer terme à terme et on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} nt^n\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$$

avec

$$(1-t\mathrm{e}^{-t})\sum_{n=1}^{+\infty} nt^n\mathrm{e}^{-nt} = \sum_{n=1}^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-nt} = \frac{t\mathrm{e}^{-t}}{1-t\mathrm{e}^{-t}}$$

d'où la conclusion.

Exercice 45 : [énoncé]

(a) Posons $u_n(t) = 1/(1+t^n)$ sur $]0\,;1]$.
La suite de fonctions (u_n) converge simplement vers la fonction $u_\infty : t \mapsto 1$.
Les fonctions u_n et la fonction u_∞ sont continues par morceaux.
Enfin
$$\forall t \in \,]0\,;1],\ \left|u_n(t)\right| \le 1 = \varphi(t)$$
avec $\varphi :]0\,;1] \to \mathbb{R}_+$ intégrable. Par convergence dominée
$$I_n = \int_0^1 u_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 u_\infty(t)\,\mathrm{d}t = 1 = \ell.$$

(b) On a
$$\ell - I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t\frac{t^{n-1}}{1+t^n}\,\mathrm{d}t.$$
Par intégration par parties,
$$\ell - I_n = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t.$$
Puisque
$$\left|\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$$
on peut affirmer $\ell - I_n \sim \frac{\ln 2}{n}$.

(c) Pour $y \in \,]0\,;1[$,
$$\frac{\ln(1+y)}{y} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k y^k}{k+1}.$$
Par convergence de la série des intégrales des valeurs absolues,
$$\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y}\,\mathrm{d}y = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}.$$
Sans peine, $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{12}$ sachant $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

(d) Par le changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement croissant $y = t^n$
$$\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y^{\frac{n-1}{n}}}\,\mathrm{d}y.$$
Par convergence dominée (domination par sa limite simple),
$$\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y^{\frac{n-1}{n}}}\,\mathrm{d}y \to \int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y}\,\mathrm{d}y = \frac{\pi^2}{12}.$$
Ainsi,
$$\ell - I_n = \frac{\ln 2}{n} - \frac{\pi^2}{12n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
puis
$$I_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + \frac{\pi^2}{12n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 46 : [énoncé]

(a) On a
$$|I_n - 1| = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,\mathrm{d}t \le \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1} \to 0$$
donc $I_n \to \ell = 1$.

(b) Par intégration par parties
$$I_n - 1 = -\frac{\ln 2}{n} + \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t.$$
Or
$$0 \le \int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t \le \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t \to 0$$
donc
$$I_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

(c) On a
$$\ln(1+t^n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} t^{nk}.$$
Par convergence de la série des intégrales des valeurs absolues, on obtient la relation proposée.

(d) On a
$$n\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(nk+1)} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2(nk+1)}$$
avec
$$\left|\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2(nk+1)}\right| \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \to 0$$
donc
$$n\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t \to \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$$

avec
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}=\frac{\pi^2}{12}$$
car on sait
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$
Finalement
$$I_n=1-\frac{\ln 2}{n}+\frac{\pi^2}{12n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 47 : [énoncé]

(a) Par la règle de d'Alembert la série converge pour tout $(s,\lambda)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{C}$.
Δ_λ : $]0;+\infty[$.

(b)
$$F_\lambda(s)=\frac{1}{s}\left(1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{(s+1)\dots(s+n)}\right).$$
Or
$$\left|1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{(s+1)\dots(s+n)}\right|\le\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{|\lambda|^n}{n!}=\mathrm{e}^{|\lambda|}$$
donc $F_\lambda(s)\xrightarrow[s\to+\infty]{}0$.

(c) Puisque
$$\left|\frac{\lambda^n}{(s+1)\dots(s+n)}\right|\le\frac{\lambda^n}{n!}$$
il y a converge normale sur $\mathbb{R}_+$ de la série des fonctions continues $s\mapsto\frac{\lambda^n}{(s+1)\dots(s+n)}$. Ceci permet d'affirmer
$$1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{(s+1)\dots(s+n)}\xrightarrow[s\to0]{}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{n!}=\mathrm{e}^\lambda$$
et donc
$$F_\lambda(s)\underset{s\to0^+}{\sim}\frac{\mathrm{e}^\lambda}{s}.$$

(d) Par intégrations par parties successives :
$$\int_0^1(1-y)^{s-1}y^n\,\mathrm{d}y=\frac{n!}{s(s+1)\dots(s+n)}.$$

(e)
$$F_\lambda(s)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\int_0^1(1-y)^{s-1}y^n\,\mathrm{d}y.$$
Par convergence de la série des intégrales des valeurs absolues, on peut échanger somme et intégrale :
$$F_\lambda(s)=\int_0^1\mathrm{e}^{\lambda y}(1-y)^{s-1}\,\mathrm{d}y.$$

Exercice 48 : [énoncé]

La série $\sum a_p\frac{t^p}{p!}$ est convergente car
$$\left|a_p\frac{t^p}{p!}\right|\le\left\|(a_n)\right\|_\infty\frac{t^p}{p!}.$$
De plus sa somme est continue car on peut aisément établir la convergence normale sur tout segment.
Enfin
$$\left|\sum_{p=n}^{+\infty}a_p\frac{t^p}{p!}\right|\le\left\|(a_n)\right\|_\infty\mathrm{e}^t$$
permet d'assurer l'existence de l'intégrale étudiée.
Posons
$$f_p(t)=a_p\frac{t^p}{p!}\mathrm{e}^{-2t}.$$
La série de fonction $\sum f_p$ convergence simplement.
Les fonctions f_p et $\sum_{p=n}^{+\infty}f_p$ sont continues par morceaux.
Les fonctions f_p sont intégrables sur $[0\,;+\infty[$ et
$$\int_0^{+\infty}\left|f_p(t)\right|\mathrm{d}t=\frac{|a_p|}{2^{p+1}}=\mathrm{O}\left(\frac{1}{2^{p+1}}\right)$$
est terme générale d'une série convergente.
Par le théorème d'intégration terme à terme de Fubini, on obtient
$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2t}\left(\sum_{p=n}^{+\infty}a_p\frac{t^p}{p!}\right)\mathrm{d}t=\sum_{p=n}^{+\infty}\frac{a_p}{2^{p+1}}.$$
Enfin, cette expression tend vers 0 en tant que reste d'une série convergente.

Exercice 49 : [énoncé]
On sait que la fonction ζ est continue.

$$\int_2^{+\infty}(\zeta(x)-1)\,\mathrm{d}x=\int_2^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^x}\,\mathrm{d}x$$

avec

$$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{n^x}=\frac{1}{n^2\ln n}.$$

La convergence de la série des intégrales des valeurs absolues assure la convergence de l'intégrale du premier membre et permet de permuter intégrale et somme. On obtient alors

$$\int_2^{+\infty}(\zeta(x)-1)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2\ln n}.$$

Exercice 50 : [énoncé]

(a) Posons

$$f_n(x)=\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)\right)^n.$$

Les fonctions f_n sont continues par morceaux et la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0\,;\pi/2[$, elle-même continue par morceaux. Enfin, on a la domination

$$\left|f_n(x)\right|\le 1=\varphi(x)$$

avec φ évidemment intégrable sur $[0\,;\pi/2[$. Par convergence dominée, on obtient

$$u_n\to 0.$$

(b) Par l'absurde, si $\sum u_n$ converge alors, on peut appliquer un théorème d'intégration terme à terme à la série de fonctions $\sum f_n$. En effet, les fonctions f_n sont continues par morceaux, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0\,;\pi/2[$ vers la fonction

$$f\colon x\mapsto\frac{1}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)}$$

elle-même continue par morceaux. Enfin les fonctions f_n sont intégrables sur $[0\,;\pi/2[$ et l'hypothèse de travail absurde signifie la convergence de la série $\sum\int_{[0;\pi/2[}|f_n|$.

Par théorème d'intégration terme à terme, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)}\,\mathrm{d}x$$

avec convergence de l'intégrale. Or, quand $x\to 0^+$

$$\frac{1}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)}\sim\frac{8}{\pi^2x^2}$$

et donc l'intégrale introduite diverge. C'est absurde.
On en déduit que la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice 51 : [énoncé]
On a $u_n\ge v_n=\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-t}\cos^{2n}t\,\mathrm{d}t$.
Si la série numérique $\sum u_n$ converge alors, par comparaison de série à termes positifs, la série $\sum v_n$ converge aussi. Par le théorème d'intégration terme à terme de Fubini, il y a alors intégrabilité sur $]0\,;\pi/2]$ de la fonction

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\cos^{2n}t=\frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\cos^2 t}=\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sin^2 t}.$$

Or quand $t\to 0^+$

$$\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sin^2 t}\sim\frac{1}{t^2}$$

qui n'est pas intégrable sur $]0\,;\pi/2]$.
C'est absurde, on en conclut que la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice 52 : [énoncé]

(a) La fonction $t\mapsto\frac{1}{(1+t^x)^n}$ est définie et continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$.
Cas $x<0$:
$\frac{1}{(1+t^x)^n}\xrightarrow[t\to+\infty]{}1$ donc la fonction n'est pas intégrable.
Cas $x=0$:
$\frac{1}{(1+t^x)^n}\xrightarrow[t\to+\infty]{}\frac{1}{2}$. Même conclusion.
Cas $x>0$:
Quand $t\to 0^+$, $\frac{1}{(1+t^x)^n}\to 1$ et quand $t\to+\infty$, $\frac{1}{(1+t^x)^n}\sim\frac{1}{t^{nx}}$ donc la fonction est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ si, et seulement si, $nx>1$.

(b) Pour $t > 0$, on remarque que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^x)^n} = \frac{1}{t^x}.$$

Par l'absurde, si $\sum I_n(x)$ converge, on peut appliquer un théorème d'interversion somme et intégrale assurant que $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$. C'est absurde.
On conclut que $\sum I_n(x)$ diverge.
Par intégration par parties avec deux convergences

$$I_n(2) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n} = \left[\frac{t}{(1+t^2)^n}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2nt^2}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t = 2n\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t.$$

Or

$$I_n(2) - I_{n+1}(2) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{n+1}}$$

donc

$$I_{n+1}(2) = \frac{2n-1}{2n} I_n(2).$$

On en déduit

$$I_{n+1}(2) = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2}$$

car $I_1(2) = \pi/2$.
Notons que par le changement de variable $t = \tan u$, on pouvait aussi transformer $I_n(2)$ en une intégrale de Wallis.

Exercice 53 : [énoncé]

(a) Posons $u_n(t) = 1/(1+t^3)^n$ définie sur $]0\,;+\infty[$.
Les fonctions u_n sont continues par morceaux et la suite (u_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $]0\,;+\infty[$, elle-même continue par morceaux. De plus

$$\forall n \geq 1, \forall t \in\,]0\,;+\infty[, \left|u_n(t)\right| \leq \varphi(t)$$

avec $\varphi\colon t \mapsto 1/(1+t^3)$ intégrable sur $[0\,;+\infty[$ et donc aussi sur $]0\,;+\infty[$.
Par application du théorème de convergence dominée sur $]0\,;1]$ et sur $[1\,;+\infty[$, on obtient

$$U_n \to 0 \text{ et } V_n \to 0.$$

(b) Les fonctions u_n sont continues par morceaux et la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0\,;1]$ vers la fonction U continue par morceaux donnée par

$$U(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^3)^n} = \frac{1}{1+t^3}\frac{1}{1-\frac{1}{1+t^3}} = \frac{1}{t^3}.$$

Si, par l'absurde, la série $\sum U_n$ converge, on est dans la situation où la série de terme général $\int_{]0;1]}\left|u_n(t)\right|\mathrm{d}t$ converge et l'on peut appliquer un théorème d'intégration terme à terme affirmant :

$$U \text{ est intégrable sur }]0\,;1] \text{ et } \int_{]0;1]} U(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 u_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or ceci est absurde car la fonction U n'est pas intégrable sur $]0\,;1]$!
On en déduit que la série $\sum U_n$ diverge.
En revanche, la série $\sum V_n$ est à termes positifs et

$$\sum_{k=1}^{n} V_k \leq \int_1^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+t^3)^n}\,\mathrm{d}t \leq \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^3} = \frac{1}{2}.$$

Les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum V_n$ étant majorées, on peut affirmer que la série $\sum V_n$ converge.

Exercice 54 : [énoncé]

(a) Quand $x \to 0^+$, $f_n(x) \sim \frac{2x}{nx} \to \frac{2}{n}$ donc $\alpha = \frac{2}{n}$ est l'unique valeur pour laquelle f est continue en 0.

(b) f_n est continue sur $[0\,;+\infty[$ et quand $x \to +\infty$, $f_n(x) \sim \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{nx}} \to 0$ donc f_n est bornée sur $\mathbb{R}_+$.
On peut envisager une argumentation plus détaillée :
- puisque f converge en $+\infty$, il existe $A \geq 0$ tel que f est bornée sur $[A\,;+\infty[$;
- puisque f est continue, f est bornée sur $[0\,;A]$;
- et finalement f est bornée sur la réunion de ces deux intervalles par la plus grande des deux bornes.

(c) f_n est définie et continue sur $[0\,;+\infty[$ et quand $x \to +\infty$, $x^2 f_n(x) \sim x^2\mathrm{e}^{-(n-1)x} \to 0$ donc $f_n(x) = \mathrm{o}\big(1/x^2\big)$ et donc f est intégrable sur $[0\,;+\infty[$.

(d) Pour $x > 0$,

$$\frac{2\operatorname{sh} x}{\mathrm{e}^{nx}-1} = 2\operatorname{sh} x\sum_{k=1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-nkx} = \sum_{k=1}^{+\infty}\big(\mathrm{e}^{-(nk-1)x} - \mathrm{e}^{-(nk+1)x}\big).$$

$$\int_0^{+\infty} \left|\mathrm{e}^{-(nk-1)x} - \mathrm{e}^{-(nk+1)x}\right| \mathrm{d}x = \frac{1}{nk-1} - \frac{1}{nk+1} = \frac{2}{n^2k^2-1} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Par convergence de la série des intégrales des valeurs absolues, on peut sommer terme à terme et affirmer

$$\int_0^{+\infty} \frac{2\operatorname{sh} x}{\mathrm{e}^{nx}-1} \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-(nk-1)x} - \mathrm{e}^{-(nk+1)x}\right) \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{nk-1} - \frac{1}{nk+1}.$$

Pour $n = 2$, la somme est facile à calculer.

Exercice 55 : [énoncé]

(a) Par convergence dominée $I_n \to 0$.

(b) Par intégration par parties avec convergence du crochet

$$I_n = \left[\frac{t}{(1+t^3)^n}\right]_0^{+\infty} + 3n \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{(1+t^3)^{n+1}} \mathrm{d}t$$

avec

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{(1+t^3)^{n+1}} \mathrm{d}t = I_n - I_{n+1}.$$

On en déduit la relation demandée.

(c) La suite (u_n) a la nature de la série de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$.
Or

$$v_n = \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{3n}\right) = \frac{\alpha - 1/3}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série de terme général v_n converge si, et seulement si, $\alpha = 1/3$.

(d) Puisque $\ln\left(n^{1/3} I_n\right) \to \ell$, on obtient

$$I_n \sim \frac{\mathrm{e}^\ell}{\sqrt[3]{n}}$$

et donc

$$\frac{1}{n} I_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right).$$

Par suite $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} I_n$ converge.
On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} I_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) \, \mathrm{d}t \text{ avec } f_n(t) = \frac{1}{n} \frac{1}{(1+t^3)^n}.$$

Les fonctions f_n sont continues par morceaux sur $]0\,;+\infty[$, la série $\sum f_n$ converge simplement sur $]0\,;+\infty[$ et sa somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{(1+t^3)^n} = -\ln\left(1 - \frac{1}{1+t^3}\right)$$

est continue par morceaux.
Enfin, la série de terme général $\int_0^{+\infty} |f_n|$ converge.
On peut donc permuter somme et intégrale pour obtenir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} I_n = -\int_0^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{1+t^3}\right) \mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{3}}\pi$$

la dernière intégrale étant calculer par intégration par parties puis

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Exercice 56 : [énoncé]

(a) La fonction définissant l'intégrale I_k est intégrable sur $]0\,;1]$ car

$$\sqrt{t} \times t^{k-1} \ln(t) \xrightarrow[t \to 0^+]{} 0.$$

Par une intégration par parties avec convergence du crochet, on obtient

$$I_k = \left[\frac{t^k \ln(t)}{k}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{k-1}}{k} \mathrm{d}t = -\frac{1}{k^2}.$$

(b) Le terme R_n est bien définie car c'est le reste d'une série convergeant absolument. Ce qui précède, nous encourage à écrire

$$R_n = -\sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_0^1 (-t)^{k-1} \ln(t) \, \mathrm{d}t.$$

Pour intégrer terme à terme, on introduit $u_k \colon]0\,;1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$u_k(t) = (-t)^{k-1} \ln(t).$$

Par sommation géométrique, la série des fonctions u_k converge simplement sur $]0\,;1[$ (et même sur $]0\,;1]$). Les fonctions u_k sont toutes continues par morceaux et la fonction somme

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \colon t \mapsto \frac{(-1)^n t^n \ln(t)}{1+t}$$

l'est aussi. Les fonctions u_k sont intégrables sur $]0\,;1]$ et il y a convergence de la série

$$\sum \int_0^1 |u_k| = \sum \frac{1}{k^2}.$$

Les hypothèses du théoème d'intégration terme à terme sont réunies et donc

$$R_n = -\sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_0^1 (-t)^{k-1} \ln(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{(-1)^n t^n \ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

(c) On opère encore une intégration terme à terme en considérant cette fois-ci les fonctions v_n déterminées par

$$v_n(t) = \frac{(-1)^n t^n \ln(t)}{1+t} \text{ avec } t \in\,]0\,;1] \text{ et } n \in \mathbb{N}.$$

Encore une fois les hypothèses d'usages sont réunies, notamment parce que

$$\int_0^1 \left|v_n(t)\right| \mathrm{d}t \le \int_0^1 t^n \left|\ln(t)\right| \mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}.$$

On en déduit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = -\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Par une intégration par parties généralisée où l'on choisit $1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t}$ comme primitive de $\frac{1}{(1+t)^2}$ on obtient

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t\ln(t)}{1+t}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = -\ln 2.$$

On peut conclure

$$\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = \ln 2.$$

Exercice 57 : [énoncé]
On a

$$\frac{1}{1+t^a} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{na} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$$

avec $f_n(t) = (-1)^n t^{na}$ sur $]0\,;1[$.

$$\int_0^1 \left|f_n(t)\right| \mathrm{d}t = \frac{1}{na+1}$$

et $\sum \frac{1}{na+1}$ diverge, le théorème d'intégration terme à terme de Fubini ne s'applique pas.
De plus la série de fonctions ne converge par uniformément sur $[0\,;1]$ car elle ne converge pas simplement en 1...
Transitons alors par les sommes partielles et le théorème de convergence dominée.
Posons

$$S_n : t \mapsto \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{ka} = \frac{1-(-1)^{n+1} t^{(n+1)a}}{1+t^a}.$$

Les fonctions S_n sont continues par morceaux et la suite (S_n) converge simplement sur $[0\,;1[$ vers la fonction

$$S : t \mapsto \frac{1}{1+t^a}$$

elle-même continue par morceaux.
De plus

$$\left|S_n(t)\right| \le \frac{2}{1+t^a} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $[0\,;1[$.
Par le théorème de convergence dominée, on obtient

$$\int_0^1 S_n(t)\,\mathrm{d}t \to \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^a}.$$

Or

$$\int_0^1 S_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-1)^k t^{ka}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{ka+1}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{na+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^a}$$

avec, en substance, la convergence de la série introduite.

Exercice 58 : [énoncé]
Notons que l'intégrale étudiée est bien définie.

Pour tout $x \in]0\,;1[$,
$$\frac{x^{\alpha-1}}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{n+\alpha-1}.$$
Le théorème d'intégration terme à terme ne pourra pas s'appliquer car ici
$$\sum \int_{]0;1[} |f_n| = \sum \frac{1}{n+\alpha} \text{ diverge.}$$
Nous allons alors intégrer terme à terme en exploitant les sommes partielles.
Posons
$$S_n\colon x \mapsto \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{k+\alpha-1} = x^{\alpha-1}\frac{1-(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}.$$
Les fonctions S_n sont continues par morceaux et convergent simplement sur $]0\,;1[$ vers la fonction
$$S\colon x \mapsto \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$$
elle-même continue par morceaux.
De plus
$$\left|S_n(x)\right| \leq \frac{2x^{\alpha-1}}{1+x} = \varphi(x)$$
avec φ fonction intégrable sur $]0\,;1[$.
Par le théorème de convergence dominée, on obtient
$$\int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x \to \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$
Or
$$\int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-1)^k x^{k+\alpha-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+\alpha}$$
et on peut donc conclure
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha} = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$$
avec en substance la convergence de la série introduite.

Exercice 59 : [énoncé]

(a) Pour $t \in]0\,;1[$, on peut écrire
$$\frac{t^{a-1}}{1+t^b} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{a+nb-1}.$$
Posons
$$S_n\colon t \mapsto \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{a+kb-1} = t^{a-1}\frac{1-(-1)^{n+1}t^{(n+1)b}}{1+t^b}.$$
Les fonctions S_n sont continues par morceaux et la suite (S_n) converge simplement sur $]0\,;1[$ vers la fonction
$$S\colon t \mapsto \frac{t^{a-1}}{1+t^b}$$
elle-même continue par morceaux.
De plus
$$\left|S_n(t)\right| \leq \frac{2t^{a-1}}{1+t^b} = \varphi(t)$$
avec φ intégrable sur $]0\,;1[$.
Par convergence dominée, on obtient
$$\int_0^1 S_n(t)\,\mathrm{d}t \to \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t$$
avec convergence de l'intégrale introduite.
Or
$$\int_0^1 S_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-1)^k t^{a+kb-1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{a+kb}$$
donc
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb} = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t$$
avec convergence de la série introduite..

(b) Après calculs
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} = \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Exercice 60 : [énoncé]
Soit $f_n\colon [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f_n(t) = \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2}.$$

On observe $\|f_n\|_\infty = 1/n^2$ et donc la série des fonctions f_n converge normalement, donc uniformément sur $[0\,;+\infty[$. Puisque chaque f_n est continue, on peut affirmer que la fonction

$$S\colon t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2}$$

est définie et continue sur $[0\,;+\infty[$.
Les fonctions f_n sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\int_0^{+\infty} \left|f_n(t)\right| \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{n^2+t^2} = \frac{\pi}{2n}.$$

Puisque la série $\sum \int |f_n|$ diverge, on ne peut intégrer terme à terme par le théorème de Fubini.
Raisonnons alors par les sommes partielles en exploitant le théorème de convergence dominée.
Posons

$$S_n\colon t \mapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2+t^2}.$$

Les fonctions S_n sont continues par morceaux sur $[0\,;+\infty[$ et converge simplement vers la fonction S elle-même continue par morceaux.
De plus, le critère spécial des séries alternées s'appliquant, on a

$$0 \le S_n(t) \le \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $[0\,;+\infty[$.
Par le théorème de convergence dominée, on obtient

$$\int_0^{+\infty} S_n(t)\,\mathrm{d}t \to \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Or

$$\int_0^{+\infty} S_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n}\int_0^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

donc

$$\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2}\,\mathrm{d}t$$

avec convergence de la série introduite.

Exercice 61 : [énoncé]

(a) La fonction définissant l'intégrale est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$, se prolonge par continuité en 0 et est négligeable devant $t \mapsto 1/t^2$ en $+\infty$: elle est intégrable.

(b) Par intégration par parties généralisée justifiée par la convergence du crochet

$$T(a,b) = \left[\frac{t^a \mathrm{e}^{-bt}}{-b}\right]_0^{+\infty} + \frac{a}{b}\int_0^{+\infty} t^{a-1}\mathrm{e}^{-bt}\,\mathrm{d}t = \frac{a}{b}T(a-1,b).$$

On en déduit

$$T(a,b) = \frac{a!}{b^{a+1}}.$$

(c) On peut simplifier $S_{n-1} - S_n$

$$S_{n-1} - S_n = \int_0^{+\infty} t^p \mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t = \frac{p!}{n^{p+1}}.$$

Par télescopage

$$S_0 = \sum_{k=1}^{n} (S_{k-1} - S_k) + S_n = p!\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{p+1}} + S_n.$$

(d) Par convergence dominée sachant

$$\left|\frac{t^p}{\mathrm{e}^t - 1}\mathrm{e}^{-nt}\right| \le \frac{t^p}{\mathrm{e}^t - 1} = \varphi(t) \text{ avec } \varphi \text{ intégrable}$$

on obtient que la suite (S_n) converge vers 0.

(e) Il suffit de passer à la limite quand n tend vers l'infini.

Exercice 62 : [énoncé]

(a) La fonction $t \mapsto \frac{t^{x-1}}{1+t}$ est définie et continue par morceaux sur $]0\,;1]$.
Quand $t \to 0^+$,

$$\frac{t^{x-1}}{1+t} \sim t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$$

avec $1-x<1$ et donc $t \mapsto \frac{t^{x-1}}{1+t}$ est intégrable sur $]0\,;1]$.

(b) Posons $g(x,t) = \frac{t^{x-1}}{1+t}$ sur $]0\,;+\infty[\times]0\,;1]$.
$t \mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;1]$,
$x \mapsto g(x,t)$ est continue sur $]0\,;+\infty[$.
Soit $[a\,;b] \subset \mathbb{R}_+^*$,

$$\forall (x,t) \in [a\,;b] \times]0\,;1], \left|g(x,t)\right| \le \frac{t^{a-1}}{1+t} \le t^{a-1} = \varphi_a(t)$$

avec φ_a intégrable sur $]0\,;1]$.
Par domination sur tout segment de $]0\,;+\infty[$, on peut affirmer que f est continue sur $]0\,;+\infty[$.

(c) Pour $x>0$

$$f(x) + f(x+1) = \int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}.$$

(d) Quand $x \to 0^+$, $f(x+1) \to f(1)$ par continuité. On a donc $f(x+1) = \mathrm{o}(1/x)$ puis

$$f(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}.$$

Quand $x \to +\infty$,

$$0 \le f(x) \le \int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x} \to 0$$

donc

$$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$

Exercice 63 : [énoncé]

(a) Posons $f\colon [0\,;+\infty[\times[0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+tx}.$$

Pour chaque $x \in [0\,;+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$ et intégrable car

$$t^2 f(x,t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0.$$

On en déduit la convergence de l'intégrale généralisée définissant $F(x)$.

(b) Pour chaque $t \in [0\,;+\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est indéfiniment dérivable et

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t) = \frac{(-1)^n n!}{(1+tx)^{n+1}} t^n \mathrm{e}^{-t}.$$

La fonction $x \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)$ est continue, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)$ est continue par morceaux et

$$\forall (x,t) \in [0\,;+\infty[\times[0\,;+\infty[, \left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right| \le n! t^n \mathrm{e}^{-t} = \varphi_n(t)$$

avec $\varphi_n\colon [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable.
Par domination, on peut alors affirmer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0\,;+\infty[$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0\,;+\infty[, F^{(n)}(x) = (-1)^n n! \int_0^{+\infty} \frac{t^n \mathrm{e}^{-t}}{(1+tx)^{n+1}}\,\mathrm{d}t.$$

(c) En particulier

$$F^{(n)}(0) = (-1)^n (n!)^2.$$

Exercice 64 : [énoncé]

Considérons $f\colon (x,t) \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}$ définie sur $]0\,;+\infty[\times[0\,;+\infty[$
Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$ et intégrable car

$$\left|f(x,t)\right| \le \frac{1}{1+t^2}.$$

Pour$t \in [0\,;+\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0\,;+\infty[$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -t\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = t^2 \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}.$$

Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, la fonctions $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable.
La fonction $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ est continue en x, continue par morceaux en t.
Soit $[a\,;b] \subset]0\,;+\infty[$. Sur$[a\,;+\infty[\times[0\,;+\infty[$, on a

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| \le \mathrm{e}^{-at}$$

avec $\varphi\colon t \mapsto \mathrm{e}^{-at}$ continue par morceaux et intégrable sur $[0\,;+\infty[$.
Par domination sur tout compact, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$F''(x) + F(x) = \int_0^{+\infty} t^2 \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}.$$

Enfin $F \xrightarrow[+\infty]{} 0$ car

$$\left|f(x)\right| \leq \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Exercice 65 : [énoncé]

(a) $g\colon (x,t) \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2}$ est définie continue en x et continue par morceaux en t sur $\mathbb{R}_+ \times [0\,;+\infty[$ avec

$$\left|g(x,t)\right| \leq \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$$

et φ intégrable sur $[0\,;+\infty[$.
Par domination, on peut affirmer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

(b) $\frac{\partial g}{\partial x}$ existe et est continue en x et continue par morceaux en t sur $\mathbb{R}_+^* \times [0\,;+\infty[$.
Pour $x \in [a\,;b] \subset \mathbb{R}_+^*$ on a

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \left|-\frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{e}^{-xt^2}\right| \leq \mathrm{e}^{-at^2} = \psi(t)$$

avec ψ intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
Par domination sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$, on peut affirmer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$ avec

$$f'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t^2\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Enfin,

$$f(x) - f'(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt^2}\,\mathrm{d}t \underset{u=\sqrt{x}t}{=} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}.$$

Exercice 66 : [énoncé]

(a) $t \mapsto \frac{1}{1+t^3}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc $g(0)$ existe.
$u \mapsto 1/u$ est une bijection $\mathcal{C}^1$ entre $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_+^*$.
On peut réaliser le changement de variable $t = 1/u$ qui donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} = \int_0^{+\infty} \frac{u\,\mathrm{d}u}{1+u^3}.$$

Donc

$$2g(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2-t+1} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right]_0^{+\infty} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

puis

$$g(0) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

(b) La fonction g est paire. Pour $0 \leq x \leq x'$, on a pour tout $t \geq 0$, $\mathrm{e}^{-tx^2} \geq \mathrm{e}^{-tx'^2}$ donc g est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

(c) Pour $x > 0$,

$$0 \leq g(x) \leq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x^2} \to 0$$

donc $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Exercice 67 : [énoncé]

(a) Posons

$$g(x,t) = \frac{1}{1+x^3+t^3}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est définie, continue sur $\mathbb{R}_+$ et $g(x,t) \underset{+\infty}{\sim} 1/t^3$ donc $f(x)$ existe.

(b) $u \mapsto 1/u$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme entre $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_+^*$.
On peut réaliser le changement de variable $t = 1/u$ qui donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} = \int_0^{+\infty} \frac{u\,\mathrm{d}u}{1+u^3}.$$

Donc

$$2f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2-t+1} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right]_0^{+\infty} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

puis

$$f(0) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

(c) $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$ avec

$$\left|g(x,t)\right| \leq \frac{1}{1+t^3} = \varphi(t)$$

et φ intégrable sur $[0\,;+\infty[$ donc f est continue.
Si $x \leq y$ alors $\forall t \in [0\,;+\infty[, g(y,t) \leq g(x,t)$ donc $f(y) \leq f(x)$. Ainsi f est décroissante.
Rq : On peut aussi montrer f de classe $\mathcal{C}^1$ mais cela alourdit la démonstration

(d) f tend vers 0 en $+\infty$ car

$$0 \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x^3+t^3} \underset{t=xu}{=} \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^3} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Exercice 68 : [énoncé]

(a) Introduisons $g(x,t) = \frac{\cos t}{t+x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^* \times [0\,;\pi/2]$.
La fonction g est continue et x et continue par morceaux en t.
Pour $[a\,;b] \subset \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\forall (x,t) \in [a\,;b] \times [0\,;\pi/2], \left|g(x,t)\right| \leq \frac{1}{t+a} = \varphi(t).$$

La fonction φ est intégrable sur $[0\,;\pi/2]$.
Par domination sur tout segment, on peut affirmer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Aussi, pour $0 < x \leq x'$, on a

$$\forall t \in [0\,;\pi/2], g(x',t) \leq g(x,t).$$

En intégrant, on obtient $f(x') \leq f(x)$. La fonction f est donc décroissante.
On aurait pu aussi établir que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et étudier le signe de sa dérivée.

(b) Quand $x \to +\infty$,

$$0 \leq f(x) \leq \int_0^{\pi/2} \frac{1}{x+t}\,\mathrm{d}t \to 0.$$

Quand $x \to 0^+$

$$f(x) \geq \int_0^{\pi/4} \frac{\cos t}{t+x}\,\mathrm{d}t \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\ln(t+x)\right]_0^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\frac{x+\pi/4}{x} \to +\infty.$$

(c)

$$\frac{1}{x+\pi/2}\int_0^{\pi/2}\cos t\,\mathrm{d}t \leq f(x) \leq \frac{1}{x}\int_0^{\pi/2}\cos t\,\mathrm{d}t$$

donc

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}.$$

On sait :

$$\forall 0 \leq t \leq \pi/2, 1 - \frac{1}{2}t^2 \leq \cos t \leq 1$$

donc

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}t}{t+x} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{t^2\,\mathrm{d}t}{t+x} \leq f(x) \leq \int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}t}{t+x}.$$

Or

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}t}{t+x} = \ln\frac{x+\pi/2}{x} \underset{0}{\sim} -\ln x$$

et

$$0 \leq \int_0^{\pi/2}\frac{t^2\,\mathrm{d}t}{t+x} \leq \int_0^{\pi/2} t\,\mathrm{d}t = C = \mathrm{o}(\ln x)$$

donc

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln x.$$

Exercice 69 : [énoncé]

(a) La fonction $t \mapsto (\sin t)^x$ est définie, continue et positive sur $]0\,;\pi/2]$.
Quand $t \to 0^+$, $(\sin t)^x \sim t^x$ avec $x > -1$ donc $t \mapsto (\sin t)^x$ est intégrable sur $]0\,;\pi/2]$.
Ainsi f est définie et positive sur $]-1\,;+\infty[$

(b) La fonction

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \ln(\sin t)(\sin t)^x$$

est définie, continue en x et continue par morceaux en t.
Soit $[a\,;b] \subset\,]-1\,;+\infty[$. Sur $[a\,;b] \times\,]0\,;\pi/2]$

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq \left|\ln(\sin t)(\sin t)^a\right| = \varphi(t)$$

avec φ est intégrable sur $]0\,;\pi/2]$ car pour α tel que $-a < \alpha < 1$,

$$t^\alpha\varphi(t) \sim t^{a+\alpha}\left|\ln(t)\right| \to 0.$$

Par domination sur tout segment, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1\,;+\infty[$ et

$$f'(x) = \int_0^{\pi/2}\ln(\sin t)(\sin t)^x\,\mathrm{d}t \leq 0.$$

Ainsi la fonction f est décroissante.

(c) En intégrant par parties

$$f(x+2) = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^x (1-\cos^2 t)\,\mathrm{d}t = f(x) - \left[\frac{(\sin t)^{x+1}}{x+1}\cos t\right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{x+1} f(x+2)$$

et donc

$$f(x+2) = \frac{x+1}{x+2} f(x).$$

(d) On a

$$\varphi(x+1) = (x+1)f(x+1)f(x) = xf(x-1)f(x) = \varphi(x)$$

et

$$\varphi(1) = f(0)f(1) = \pi/2$$

donc par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \varphi(n) = \pi/2.$$

(e) φ est continue et quand $x \to 0$,

$$\varphi(x) = \varphi(1+x) \to \varphi(1) = \pi/2.$$

Or quand $x \to 0$,

$$f(x) \to f(0) = \pi/2$$

donc quand $x \to -1$,

$$f(x) = \frac{\varphi(x+1)}{(x+1)f(x+1)} \sim \frac{1}{x+1}.$$

Rq : En fait on peut montrer que φ est une fonction constante.

Exercice 70 : [énoncé]
Étudions la fonction donnée par

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x/t)}{1+t^2}.$$

Notons $u(x,t) = \frac{\arctan(x/t)}{1+t^2}$ définie sur $\mathbb{R}_+ \times]0\,;+\infty[$
$t \mapsto u(x,t)$ est continue par morceaux sur$]0\,;+\infty[$ pour chaque $x \in \mathbb{R}_+$
$x \mapsto u(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ pour chaque $t \in]0\,;+\infty[$ et

$$\left|u(x,t)\right| \leq \frac{\pi/2}{1+t^2} = \varphi(t)$$

avec φ fonction intégrable sur $]0\,;+\infty[$.
On en déduit que la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
$x \mapsto u(x,t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ pour chaque $t \in]0\,;+\infty[$ et

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \frac{t}{(t^2+x^2)(1+t^2)}$$

$x \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ pour chaque $t \in]0\,;+\infty[$
$t \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$ pour chaque $x \in \mathbb{R}_+^*$ et

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{1}{2x}\frac{1}{(1+t^2)}$$

car $2tx \leq x^2+t^2$.
Soit $[a\,;b] \subset]0\,;+\infty[$

$$\forall (x,t) \in [a\,;b] \times]0\,;+\infty[, \left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{1}{2a}\frac{1}{(1+t^2)} = \psi(t)$$

avec ψ fonction intégrable.
Par domination sur tout segment, on obtient f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$ avec

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(t^2+x^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t.$$

Pour $x \neq 1$, on peut décomposer la fraction rationnelle définissant l'intégrande

$$\frac{t}{(1+t^2)(x^2+t^2)} = \frac{t}{(x^2-1)(1+t^2)} - \frac{t}{(x^2-1)(x^2+t^2)}$$

et on obtient alors

$$f'(x) = \frac{1}{x^2-1}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t^2}{x^2+t^2}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\ln x}{(x^2-1)}.$$

Cette identité se prolonge en $x=1$ par un argument de continuité.
On a alors

$$\int_0^x \frac{\ln t}{(t^2-1)}\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon \to 0}\int_\varepsilon^x \frac{\ln t}{(t^2-1)}\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon \to 0} f(x) - f(\varepsilon).$$

Or $f(0) = 0$ et par continuité on parvient à

$$\int_0^x \frac{\ln t}{(t^2-1)}\,\mathrm{d}t = f(x).$$

Exercice 71 : [énoncé]

(a) Pour $a > -1$, on note $\Omega_a = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \geq a\}$.
$t \mapsto \frac{t^z}{1+t}$ est continue par morceaux sur $]0;1]$, $z \mapsto \frac{t^z}{1+t}$ est continue sur Ω et pour $z \in \Omega_a$,

$$\left|\frac{t^z}{1+t}\right| \leq \frac{t^a}{1+t} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $]0;1]$ car $\varphi(t) \sim t^a$ quand $t \to 0^+$.
Par domination, on peut affirmer que f est définie et continue sur Ω_a.
Ceci valant pour tout $a > -1$, on peut encore affirmer que f est définie et continue sur Ω.

(b) On observe

$$f(x) + f(x+1) = \int_0^1 t^x \,\mathrm{d}t = \frac{1}{x+1}$$

et par continuité

$$f(x+1) \xrightarrow[x \to -1]{} f(0)$$

donc

$$f(x) \underset{x \to -1}{\sim} \frac{1}{x+1}.$$

(c) Par intégration par parties

$$(z+1)f(z) = \frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{t^{z+1}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Or

$$\left|\int_0^1 \frac{t^{z+1}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^1 \left|t^{z+1}\right|\mathrm{d}t$$

avec

$$\left|t^{z+1}\right| = \left|\exp((z+1)\ln t\right| = \exp\big((\operatorname{Re}(z)+1)\ln t\big) = t^{\operatorname{Re}(z)+1}$$

car les exponentielles imaginaires sont de module 1.
On a alors

$$\left|\int_0^1 \frac{t^{z+1}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^1 t^{\operatorname{Re}(z)+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\operatorname{Re}(z)+2} \xrightarrow[\operatorname{Re}(z)\to+\infty]{} 0.$$

Ainsi

$$(z+1)f(z) \xrightarrow[\operatorname{Re}(z)\to+\infty]{} \frac{1}{2}$$

puis

$$f(z) \underset{\operatorname{Re}(z)\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2z}.$$

Exercice 72 : [énoncé]

(a) Pour $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\sin(xt)}{\mathrm{e}^t-1}$ est continue par morceaux sur $]0;+\infty[$,

$$\frac{\sin(xt)}{\mathrm{e}^t-1} \underset{t\to0}{=} \mathrm{O}(1) \text{ et } \frac{\sin(xt)}{\mathrm{e}^t-1} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

donc $f(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(b) Posons $g(x,t) = \frac{\sin(xt)}{\mathrm{e}^t-1}$.
g admet une dérivée partielle $\frac{\partial g}{\partial x}$ avec

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \frac{t}{\mathrm{e}^t-1}\cos(xt)$$

$x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0;+\infty[$.
Enfin $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{t}{\mathrm{e}^t-1} = \varphi(t)$ avec φ intégrable sur $]0;+\infty[$.
Par domination, on peut affirmer que f est de classe $\mathcal{C}^1$, *a fortiori* continue et dérivable.

(c) La décomposition

$$\frac{1}{\mathrm{e}^t-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt}$$

permet d'écrire

$$f(1) = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(t)\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t.$$

Par la majoration $\left|\sin(u)\right| \leq |u|$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \left|\sin(t)\mathrm{e}^{-nt}\right| \leq \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}.$$

La série $\sum \int_{[0;+\infty[} \left|\sin(t)\mathrm{e}^{-nt}\right|\mathrm{d}t$ converge, on peut intégrer terme à terme

$$f(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sin(t)\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t.$$

On calcule l'intégrale sommée en considérant la partie imaginaire de

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t.$$

On obtient à terme

$$f(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$

Exercice 73 : [énoncé]

La fonction f est bien définie sur $]0\,;+\infty[$ et

$$xf(x) = \frac{\pi}{2} - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Posons

$$u(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}$$

définie sur $]0\,;+\infty[\times [0\,;+\infty[$.

u admet deux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -\frac{t}{1+t^2}\mathrm{e}^{-tx} \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{e}^{-tx}.$$

Pour chaque $x > 0$, les fonctions u et $\frac{\partial u}{\partial x}$ sont intégrables et pour tout $[a\,;b] \subset]0\,;+\infty[$, on a la domination

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right| \le \mathrm{e}^{-at} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable. On en déduit que la fonction

$$x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0\,;+\infty[$. Il en est de même pour f par opérations sur de telles fonctions.

Quand $x \to +\infty$,

$$0 \le \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \le \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$

donc $xf(x) \to \frac{\pi}{2}$ puis

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x}.$$

Étudions maintenant $f(x)$ quand $x \to 0^+$.

Par le changement de variable $u = tx$,

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{u}{x^2+u^2}\frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$$

avec

$$\varphi\colon u \mapsto \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u}.$$

Par intégration par parties,

$$f(x) = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+u^2)\varphi(u)\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \ln(x^2+u^2)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

Pour $x \in]0\,;1]$,

$$\left|\ln(x^2+u^2)\right| \le \left|\ln(u^2)\right| + \left|\ln(1+u^2)\right|$$

et la fonction

$$u \mapsto \Big(\left|\ln(u^2)\right| + \left|\ln(1+u^2)\right|\Big)\varphi'(u)$$

est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ car φ' peut être prolongée par continuité en 0 et

$$\varphi'(u) \underset{u\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}.$$

On en déduit

$$f(x) = -\ln x + \mathrm{O}(1) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln x.$$

Exercice 74 : [énoncé]

(a) Par le changement de variable $t = ux$ (bijection de classe $\mathcal{C}^1$) on obtient

$$f(x) = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+x^2u^2}\sqrt{1-u^2}}.$$

Posons $g\colon]0\,;+\infty[\times]-1\,;1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x,u) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2u^2}\sqrt{1-u^2}}.$$

La fonction g est continue sur $]0\,;+\infty[\times]-1\,;1[$ et

$$\left|g(x,u)\right| \le \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = \varphi(u)$$

avec φ intégrable sur $]-1\,;1[$.

On en déduit que f est définie et continue sur $]0\,;+\infty[$.

(b) Quand $x \to 0^+$

$$g(x,u) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2u^2}\sqrt{1-u^2}} \to \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Par la domination précédente

$$f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = \Big[\arcsin u\Big]_{-1}^{1} = \pi.$$

De même, on obtient

$$f(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} \int_{-1}^{1} 0\,\mathrm{d}u = 0.$$

Exercice 75 : [énoncé]

(a) Puisque

$$\frac{\cos^2 t}{t} \sim \frac{1}{t} \text{ quand } t \to 0^+$$

on peut affirmer, par équivalence de fonctions positives, que l'intégrale diverge en 0.
On peut alors conclure que f est définie sur $]0\,;+\infty[$ (car l'intégrale sur un segment d'une fonction continue converge) mais ne peut pas être définie sur un domaine plus grand.

(b) Posons

$$g(x) = \int_1^x \frac{\sin^2 t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Cette fois-ci

$$\frac{\sin^2 t}{t} \sim t \text{ quand } t \to 0^+$$

et donc la fonction g est définie et continue en 0.
Puisque

$$f(x) + g(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln x$$

on peut conclure

$$f(x) \sim \ln x \text{ quand } x \to 0^+.$$

Aussi

$$f(x) = \int_1^x \frac{1+\cos(2t)}{2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln x + \int_1^x \frac{\cos(2t)}{2t}\,\mathrm{d}t.$$

Comme la nouvelle intégrale converge en $+\infty$ (cela s'obtient par une intégration par parties) on conclut

$$f(x) \sim \frac{1}{2}\ln x \text{ quand } x \to +\infty.$$

Exercice 76 : [énoncé]

(a) Pour que la racine carrée soit définie pour $t \in]0\,;1[$, il est nécessaire que $x \in [-1\,;1]$.
Pour $x \in]-1\,;1[$, l'intégrale définissant f converge par les arguments d'intégrabilité suivant

$$\frac{1}{\sqrt{t(1-t)(1-x^2t)}} \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}} \text{ et } \frac{1}{\sqrt{t(1-t)(1-x^2t)}} \underset{t\to 1^-}{\sim} \frac{C^{te}}{\sqrt{1-t}}.$$

Pour $x = \pm 1$, l'intégrale définissant f diverge car

$$\frac{1}{\sqrt{t(1-t)(1-t)}} \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{1-t} \geq 0.$$

L'ensemble de définition de f est donc $]-1\,;1[$.

(b) Sur $[0\,;1[$, la fonction f est croissante et admet donc une limite en 1^-.
Par l'absurde, si celle-ci est finie égale à $\ell \in \mathbb{R}$ alors

$$\forall a \in [0\,;1[, \int_0^a \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)(1-x^2t)}} \leq \ell.$$

Par intégration sur un segment, la fonction de x déterminée par le premier membre est continue en $x = 1$, on en déduit

$$\int_0^a \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(1-t)} \leq \ell.$$

Or ceci est absurde car par non intégrabilité d'une fonction positive

$$\int_0^a \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(1-t)} \xrightarrow[a\to 1^-]{} +\infty.$$

Exercice 77 : [énoncé]

(a) La fonction $x \mapsto 1/x^\alpha(1+x)$ est définie et continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$ avec

$$\frac{1}{x^\alpha(1+x)} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x^\alpha} \text{ et } \frac{1}{x^\alpha(1+x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{\alpha+1}}.$$

Cette fonction est donc intégrable si, et seulement si, $\alpha \in\,]0\,;1[$.
La fonction intégrée étant de surcroît positive, l'intégrale définissant $f(\alpha)$ converge si, et seulement si, $\alpha \in\,]0\,;1[$.

(b) On a

$$f(\alpha) - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha+1}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+x)} - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha+1}(1+x)}.$$

Or

$$\left|\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha+1}(1+x)}\right| \le \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x)} = C$$

et pour $\alpha \le 1/2$

$$\left|\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+x)}\right| \le \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)} = C'.$$

On a donc

$$f(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha+1}} + \mathrm{O}(1) = \frac{1}{\alpha} + \mathrm{O}(1) \sim \frac{1}{\alpha}.$$

On peut aussi obtenir cet équivalent en commençant par opérer le changement de variable $u = x^\alpha$.

(c) Par le changement de variable $\mathcal{C}^1$ bijectif $x = 1/t$, on obtient $f(\alpha) = f(1-\alpha)$ d'où la symétrie affirmée.

(d) Posons

$$u(\alpha, x) = \frac{1}{x^\alpha(1+x)}.$$

Pour chaque $x \in\,]0\,;+\infty[$, la fonction $\alpha \mapsto u(\alpha,x)$ est continue et pour chaque $\alpha \in\,]0\,;1[$ la fonction $x \mapsto u(\alpha,x)$ est continue par morceaux. Enfin pour $\alpha \in [a\,;b] \in\,]0\,;1[$ (avec $a > 0$), on a

$$\left|u(x,\alpha)\right| \le \frac{1}{x^a(1+x)} \text{ si } x \in [1\,;+\infty[$$

et

$$\left|u(x,\alpha)\right| \le \frac{1}{x^b(1+x)} \text{ si } x \in\,]0\,;1].$$

Ainsi

$$\left|u(x,\alpha)\right| \le \varphi_{a,b}(x) \text{ pour } x \in\,]0\,;+\infty[$$

en posant $\varphi_a(x) = u(a,x) + u(b,x)$ qui est intégrable.
Par domination sur tout segment, on peut affirmer que f est continue sur $]0\,;1[$.

(e) Par le changement de variable $x = 1/t$, on peut écrire

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+x)} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{1-\alpha}(1+t)}$$

et alors

$$f(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{x^{1-\alpha} + x^\alpha}{x(1+x)}\,\mathrm{d}x.$$

On vérifie que pour $x \ge 1$, la fonction $\alpha \mapsto x^{1-\alpha} + x^\alpha$ est décroissante sur $]0\,;1/2]$ puis croissante sur $[1/2\,;1[$. La fonction f a donc la même monotonie et son minimum est donc

$$f(1/2) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(1+t)} = \pi$$

via le changement de variable $u = \sqrt{t}$.

Exercice 78 : [énoncé]

(a) Posons $f(x,t) = \frac{\ln t}{t+x}$.
f est définie et continue sur $]0\,;+\infty[\, \times\,]0\,;1]$.
Pour $x > 0$, $f(x,t) \underset{t\to0^+}{\sim} \frac{1}{x}\ln t$ donc $\sqrt{t}f(x,t) \xrightarrow[t\to0^+]{} 0$ puis $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0\,;1]$.
Ainsi F est définie sur $]0\,;+\infty[$.
f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ continue avec $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\frac{\ln t}{(t+x)^2}$.
Soit $[a\,;b] \subset\,]0\,;+\infty[$. Pour $x \in [a\,;b]$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \le \frac{|\ln t|}{a^2} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $]0\,;1]$.
Par domination sur tout segment, on peut affirmer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$F'(x) = \int_0^1 -\frac{\ln t}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}t.$$

(b) Par intégration par parties,

$$F'(x) = \left[\ln t\left(\frac{1}{t+x} - \frac{1}{x}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{t}\left(\frac{1}{t+x} - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}t$$

où la primitive de $t \mapsto \frac{1}{t+x}$ est choisie de sorte de s'annuler en 0 pour que l'intégration par parties présente deux convergences.
Ainsi

$$F'(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{x(t+x)} = \frac{\ln(x+1) - \ln x}{x}.$$

Par opérations

$$G'(x) = \frac{\ln(x+1) - \ln x}{x} - \frac{\ln(1+1/x) + \ln x}{x} = -\frac{1}{x}\ln x$$

puis

$$G(x) = G(1) - \frac{1}{2}(\ln x)^2.$$

Or $G(1) = 2F(1)$ avec

$$F(1) = \int_0^1 \frac{\ln t}{t+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k t^k \ln(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or $\int_0^1 t^k \ln(t)\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{(k+1)^2}$ donc par convergence de la série des intégrales des valeurs absolues, $F(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$. Sachant $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, on obtient $F(1) = -\frac{\pi^2}{12}$ puis

$$G(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 - \frac{\pi^2}{6}.$$

(c) Par décomposition en éléments simples

$$\frac{t-1}{(t+1)(t^2+2t\operatorname{ch}\theta+1)} = \frac{\frac{1}{\operatorname{ch}\theta-1}}{t+1} - \frac{\frac{1}{\operatorname{ch}\theta-1}(t+\operatorname{ch}\theta)}{t^2+2t\operatorname{ch}\theta+1}.$$

Donc

$$\int_0^1 \frac{t-1}{t+1}\frac{\ln t}{t^2+2t\operatorname{ch}(\theta)+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\operatorname{ch}\theta-1}\left(F(1) - \frac{1}{2}G(\mathrm{e}^\theta)\right) = \frac{\theta^2}{4(\operatorname{ch}(\theta)-1)}.$$

Exercice 79 : [énoncé]
Considérons $f\colon (x,t) \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}$ définie sur $]0\,;+\infty[\times [0\,;+\infty[$
Pour $t \in [0\,;+\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$ f admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -t\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}.$$

Pour tout $x \in\,]0\,;+\infty[$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0\,;+\infty[$ car

$$t^2 f(x,t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$

De plus
$\forall x \in\,]0\,;+\infty[$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux.
$\forall t \in [0\,;+\infty[$, $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue.
Enfin, pour $[a\,;b] \subset [0\,;+\infty[$. On a

$$\forall (x,t) \in [a\,;b] \times [0\,;+\infty[, \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \le \mathrm{e}^{-at}$$

avec $\varphi\colon t \mapsto \mathrm{e}^{-at}$ continue par morceaux et intégrable sur $[0\,;+\infty[$.
Par domination sur tout segment, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$-g'(x) + g(x) = \int_0^{+\infty} t\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}.$$

On peut aussi constater le résultat plus directement en procédant aux changements de variable $u = 1+t$ puis $v = ux$ ce qui ramène l'expression étudiée à une primitive

$$g(x) = \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-v}}{v}\,\mathrm{d}v$$

et on peut alors vérifier la satisfaction de l'équation différentielle.

Exercice 80 : [énoncé]
Posons

$$u(x,t) = \frac{t-1}{\ln t}t^x$$

définie et continue par morceaux sur $\mathbb{R} \times]0\,;1[$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto u(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;1[$.
Puisque

$$u(x,t) \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{t^x}{\ln t} \text{ et } u(x,t) \xrightarrow[t\to1^-]{} 1$$

la fonction $t \mapsto u(x,t)$ est intégrable sur $]0\,;1[$ si, et seulement si, $x > -1$.

De plus, cette fonction est positive et donc la convergence de l'intégrale équivaut à l'intégrabilité de la fonction intégrande.
On en déduit que la fonction f est définie sur $]-1\,;+\infty[$.
La fonction u admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)=(t-1)t^x.$$

Cette dérivée partielle est continue en x et continue par morceaux en t.
Pour $[a\,;b]\subset\,]-1\,;+\infty[$, on a

$$\forall (x,t)\in[a\,;b]\times\,]0\,;1[,\ \left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right|\leq(1-t)t^a.$$

Par domination sur tout segment, on peut affirmer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1\,;+\infty[$ avec

$$f'(x)=\int_0^1(t-1)t^x\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+1}.$$

On en déduit

$$f(x)=\ln\frac{x+2}{x+1}+C.$$

La fonction

$$t\mapsto\frac{t-1}{\ln t}$$

est continue sur $]0\,;1[$ et se prolonge par continuité en 0 et 1, elle est donc bornée par un certain $M\in\mathbb{R}_+$ et alors

$$\left|f(x)\right|\leq\int_0^1Mt^x\,\mathrm{d}t=\frac{M}{x+1}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0.$$

On en déduit $C=0$ puis finalement

$$f(x)=\ln\frac{x+2}{x+1}.$$

Exercice 81 : [énoncé]

(a) Considérons $f\colon(x,t)\mapsto\frac{t^x-1}{\ln t}$ définie sur $]-1\,;+\infty[\times]0\,;1[$.
Soit $x>-1$. La fonction $t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;1[$.
Quand $t\to1^-$.
$t=1-h$ avec $h\to0^+$.

$$f(x,t)=\frac{(1+h)^x-1}{\ln(1+h)}\to x$$

et donc f est intégrable sur $[1/2\,;1[$.
Quand $t\to0^+$.
On a

$$t^x\xrightarrow[t\to0^+]{}\begin{cases}0&\text{si } x>0\\1&\text{si } x=0\\+\infty&\text{si } x\in\,]-1\,;0[.\end{cases}$$

Si $x\geq0$, on obtient $f(x,t)\to0$ ce qui permet un prolongement par continuité.
Si $x<0$, on a $f(x,t)=\mathrm{o}\big(t^x\big)=\mathrm{o}\big(1/t^{-x}\big)$ avec $-x<1$.
Dans les deux cas, $t\mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0\,;1/2]$.
Finalement $t\mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0\,;1[$ et donc g est définie sur $]-1\,;+\infty[$.

(b) La fonction $x\mapsto f(x,t)=\frac{t^x-1}{\ln t}$ est dérivable donc f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=t^x$$

$\forall x\in\,]-1\,;+\infty[$, $t\mapsto\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;1[$
$\forall t\in\,]0\,;1[$, $x\mapsto\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $]-1\,;+\infty[$.
Soit $[a\,;b]\subset\,]-1\,;+\infty[$. Pour $x\in[a\,;b]$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\leq t^a=\varphi(t)$$

avec $\varphi\colon\,]0\,;1[\,\to\mathbb{R}_+$ continue par morceaux et intégrable sur $]0\,;1[$.
Par domination sur tout segment, g est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$g(x)=\int_0^1t^x\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x+1}.$$

On en déduit

$$g(x)=g(0)+\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t}=\ln(1+x).$$

Exercice 82 : [énoncé]

(a) Posons $g(x,t)=\frac{\sin xt}{t}\mathrm{e}^{-t}$ définie sur $\mathbb{R}\times\,]0\,;+\infty[$.
$t\mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$, se prolonge par continuité en 0 et est négligeable devant $t\mapsto1/t^2$ en $+\infty$ donc la fonction F est bien définie sur $\mathbb{R}$.

$\frac{\partial g}{\partial x}$ est définie sur $\mathbb{R} \times]0\,;+\infty[$, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$, $x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x > 0$,

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\cos(xt)\mathrm{e}^{-t}\right| = \mathrm{e}^{-t} = \psi(t)$$

avec ψ intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Par domination F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

(b) $\cos(xt)\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i}x)t})$ donc

$$\int_0^{+\infty} \cos(xt)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i}x)t}\,\mathrm{d}t\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-\mathrm{i}.x}\right) = \frac{1}{1+x^2}.$$

(c) Sachant $F(0) = 0$, on obtient $F(x) = \arctan(x)$.

Exercice 83 : [énoncé]
La fonction $u(x,t) = \mathrm{e}^{(\mathrm{i}x-1)t}/\sqrt{t}$ définie sur $\mathbb{R} \times]0\,;+\infty[$.
$t \mapsto u(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$ pour chaque $x \in \mathbb{R}$ et

$$u(x,t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}} \text{ et } t^2 u(x,t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$

On en déduit que la fonction donnée par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{(\mathrm{i}x-1)t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = f(x) + \mathrm{i}g(x)$$

est définie sur $\mathbb{R}$.
La fonction $x \mapsto u(x,t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ pour chaque $t \in]0\,;+\infty[$ et

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \mathrm{i}\sqrt{t}\mathrm{e}^{(\mathrm{i}x-1)t}$$

$x \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour chaque $t \in]0\,;+\infty[$,
$t \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$ pour chaque $x \in \mathbb{R}$ et

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right| = \sqrt{t}\mathrm{e}^{-t} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $]0\,;+\infty[$ car prolongeable par continuité en 0 et vérifiant $t^2\varphi(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.
Par domination, on peut affirmer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \sqrt{t}\mathrm{e}^{(\mathrm{i}x-1)t}\,\mathrm{d}t.$$

À l'aide d'une intégration par parties, on obtient

$$F'(x) = -\frac{1}{2(x+\mathrm{i})}F(x).$$

La résolution de cette équation différentielle donne

$$F(x) = F(0)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\arctan x)/2}}{(x^2+1)^{1/4}}.$$

Enfin, sachant

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

on parvient à

$$F(x) = \frac{\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\arctan x)/2}}{(x^2+1)^{1/4}}$$

d'où les expressions de $f(x)$ et de $g(x)$.

$$f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{(x^2+1)^{1/4}}\cos\left(\frac{\arctan x}{2}\right) \text{ et } g(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{(x^2+1)^{1/4}}\sin\left(\frac{\arctan x}{2}\right).$$

On peut encore éventuellement « simplifier » en exploitant

$$\cos x = \sqrt{\frac{1+\cos(2x)}{2}} \text{ pour } x \in [-\pi/2\,;\pi/2]$$

ce qui donne

$$\cos\left(\frac{\arctan x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{2}}$$

et aussi

$$\sin\left(\frac{\arctan x}{2}\right) = \mathrm{signe}(x)\sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{2}}.$$

Exercice 84 : [énoncé]
$f\colon (x,t) \to \frac{e^{-xt}-e^{-yt}}{t}$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -e^{-xt}$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
$t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ car prolongeable par continuité en 0 et négligeable devant $1/t^2$ en $+\infty$.
Pour $a > 0$,

$$\forall x \in [a\,;+\infty[\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \le e^{-at} = \varphi_a(t)$$

avec φ_a intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Par domination $x \mapsto F(x,y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \int_0^{+\infty} -e^{-xt}\,dt = -\frac{1}{x}.$$

Donc $F(x,y) = -\ln x + C^{te}$ et puisque pour $x = y$, on a $F(x,y) = 0$ on obtient

$$F(x,y) = \ln y - \ln x.$$

Exercice 85 : [énoncé]

(a) Posons

$$\varphi\colon t \mapsto \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}.$$

La fonction φ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ car prolongeable par continuité en 0 et vérifiant $t^2\varphi(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$. Par domination, on obtient que F est définie sur $I = \mathbb{R}$.

(b) Posons $f(x,t) = \varphi(t)\cos(xt)$.
f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -(e^{-t}-e^{-2t})\sin(xt)$$

$x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$ et $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \le e^{-t}+e^{-2t} = \psi(t)$ avec ψ intégrable sur $]0\,;+\infty[$.
On en déduit que F est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} -(e^{-t}-e^{-2t})\sin(xt)\,dt.$$

Or

$$\int_0^{+\infty} e^{-at}\sin(xt)\,dt = \operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-a+ix)t}\,dt\right) = \frac{x}{a^2+x^2}$$

donc

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4+x^2}{1+x^2}\right) + C^{te}.$$

Montrons que $F(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ quand $x \to +\infty$.
Par intégration par parties

$$F(x) = \left[\varphi(t)\frac{\sin(xt)}{x}\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \varphi'(t)\sin(xt)\,dt.$$

On en déduit

$$\left|F(x)\right| \le \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \left|\varphi'(t)\right|dt \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Par suite $C^{te} = 0$ puis

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{4+x^2}{1+x^2}.$$

Exercice 86 : [énoncé]
On définit $f\colon \mathbb{R}\times]0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$f(x,t) = \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\cos(xt).$$

(a) Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est définie et continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$.
Quand $t \to +\infty$, $t^2 f(x,t) \to 0$ et quand $t \to 0^+$, $f(x,t) \to b-a$ donc $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.

(b) Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est dérivable et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (e^{-bt}-e^{-at})\sin(xt).$$

La fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}\times]0\,;+\infty[$ et

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \le e^{-at}+e^{-bt} = \varphi(t)$$

avec φ fonction intégrable.
On en déduit que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} (e^{-bt}-e^{-at})\sin(xt)\,dt.$$

Or
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ct}\sin(xt)\,\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(-c+\mathrm{i}x)t}\,\mathrm{d}t\right) = \frac{x}{c^2+x^2}$$
donc
$$F'(x) = \frac{x}{x^2+b^2} - \frac{x}{x^2+a^2}.$$

(c) On en déduit
$$F(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2+b^2}{x^2+a^2}\right) + C^{te}.$$
Pour déterminer la constante, on étudie la limite de F en $+\infty$. Posons
$$\psi(t) = \frac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}}{t}$$
ce qui définit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ intégrable ainsi que sa dérivée sur $]0\,;+\infty[$.
Par intégration par parties généralisée justifiée par deux convergences
$$\int_0^{+\infty} \psi(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\left[\psi(t)\sin(xt)\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \psi'(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t$$
et donc
$$\left|\int_0^{+\infty} \psi(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t\right| \le \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \left|\psi'(t)\right|\mathrm{d}t \to 0.$$
On peut conclure
$$F(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2+b^2}{x^2+a^2}\right).$$

Exercice 87 : [énoncé]

(a) On réalise le changement de variable $u=\sqrt{t}$. On obtient $z(0)=\sqrt{\pi}$.

(b) $t\mapsto g(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i}x)t}}{\sqrt{t}}$ est définie, continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$ et intégrable.
g admet une dérivée partielle
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \mathrm{i}\sqrt{t}\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i}x)t}$$
$t\mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est définie et continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$,
$x\mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$,
$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \le \sqrt{t}\mathrm{e}^{-t} = \varphi(t)$$
avec φ intégrable sur $]0\,;+\infty[$.
La fonction z est donc définie et de classe $\mathcal{C}^1$ avec
$$z'(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{i}.\sqrt{t}\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i}x)t}\,\mathrm{d}t \underset{\text{ipp}}{=} \frac{\mathrm{i}}{2(1-\mathrm{i}x)}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i}x)t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2(x+\mathrm{i})}z(x).$$

(c)
$$\frac{-1}{2(x+\mathrm{i})} = \frac{-x+\mathrm{i}}{2(x^2+1)} = -\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{\mathrm{i}}{2(x^2+1)}$$
donc
$$z(x) = C\exp\left(\mathrm{i}\frac{\arctan x}{2} - \frac{1}{4}\ln(x^2+1)\right) = \frac{C\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\arctan x)/2}}{(x^2+1)^{1/4}}.$$
Puisque $z(0)=\sqrt{\pi}$, on conclut
$$z(x) = \frac{\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\arctan x)/2}}{(x^2+1)^{1/4}}.$$

Exercice 88 : [énoncé]

Posons
$$f(x,t) = \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{tx}.$$
La fonction $t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$ car
$$t^2 f(x,t) \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} 0$$
et donc la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$.
La fonction $x\mapsto f(x,t)$ est dérivable et
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{tx}.$$
La fonction $t\mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ est continue par morceaux, la fonction $x\mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue.
Pour $a\in\mathbb{R}_+$, on a
$$\forall (x,t)\in[-a\,;a]\times\mathbb{R}, \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \le |t|\,\mathrm{e}^{a|t|}\mathrm{e}^{-t^2} = \varphi_a(t)$$
avec φ_a intégrable sur $\mathbb{R}$ indépendant de x.
On en déduit que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ et par une intégration par parties
$$g'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{tx}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{tx}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{tx}\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit que g est solution de l'équation différentielle

$$g'(x) - \frac{1}{2}xg(x) = 0.$$

Après résolution de cette équation différentielle

$$g(x) = \lambda e^{x^2/4}.$$

Enfin $g(0) = \sqrt{\pi}$ donne $\lambda = \sqrt{\pi}$.

Exercice 89 : [énoncé]

(a) Posons

$$f(x,t) = e^{-t^2}\operatorname{ch}(2xt).$$

La fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$ car

$$t^2 f(x,t) \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} 0$$

et donc la fonction F est définie sur $\mathbb{R}$.

(b) La fonction $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = 2te^{-t^2}\operatorname{sh}(2xt).$$

La fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ est continue par morceaux, la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue.

Soit $a \in \mathbb{R}_+$.

$$\forall (x,t) \in [-a\,;a] \times \mathbb{R}, \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \le 2a\operatorname{sh}(2a\,|t|)e^{-t^2} = \varphi_a(t)$$

avec φ_a intégrable sur $\mathbb{R}$ indépendant de x.

On en déduit que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ et par une intégration par parties

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} 2te^{-t^2}\operatorname{sh}(2xt)\,dt = \Big[-e^{-t^2}\operatorname{sh}(2xt)\Big]_0^{+\infty} + 2x\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\operatorname{ch}(2xt)\,dt.$$

On en déduit que F est solution de l'équation différentielle

$$F'(x) - 2xF(x) = 0.$$

Après résolution de cette équation différentielle

$$F(x) = \lambda e^{x^2}$$

avec $F(0) = \sqrt{\pi}/2$.

(c) On sait

$$\forall x,t \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(2xt) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{(2n)!}(xt)^{2n}.$$

Posons $u_n \colon [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$

$$u_n(t) = \frac{2^{2n}}{(2n)!}(xt)^{2n}e^{-t^2}.$$

Les fonctions u_n sont continues par morceaux et la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0\,;+\infty[$ vers la fonction $t \mapsto e^{-t^2}\operatorname{ch}(2xt)$ elle-même continue par morceaux.

Chaque fonction u_n est intégrable et

$$\int_0^{+\infty} \left|u_n(t)\right| dt = \frac{2^{2n}\,|x|^{2n}}{(2n)!}\int_0^{+\infty} t^{2n}e^{-t^2}\,dt.$$

Par intégration par parties

$$\int_0^{+\infty} t^{2n}e^{-t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} t^{2n-1} \times te^{-t^2}\,dt = \frac{2n-1}{2}\int_0^{+\infty} t^{2(n-1)}e^{-t^2}\,dt$$

et donc

$$\int_0^{+\infty} t^{2n}e^{-t^2}\,dt = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

puis

$$\int_0^{+\infty} \left|u_n(t)\right| dt = \frac{|x|^{2n}}{n!}\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Il y a alors convergence de la série $\sum \int |u_n|$ et donc on peut intégrer terme à terme ce qui fournit

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} u_n(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{x^2}.$$

Exercice 90 : [énoncé]

Posons $g(x,t) = \frac{\ln(1+x^2t^2)}{1+t^2}$.

$x \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$,

$t \mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$,

$\left|g(x,t)\right| \le \frac{\ln(1+a^2t^2)}{1+t^2}$ sur $[-a\,;a]$ avec $t \mapsto \frac{\ln(1+a^2t^2)}{1+t^2}$ intégrable.

Par domination sur tout segment, on peut donc affirmer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Il est évident que f est paire. Nous poursuivons son étude sur $\mathbb{R}_+$.
$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{2xt^2}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$ est bien définie.
$x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$,
$t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$.
Enfin $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{2bt^2}{(1+a^2t^2)(1+t^2)}$ sur $[a\,;b] \subset \mathbb{R}_+^*$ avec $t \mapsto \frac{2bt^2}{(1+a^2t^2)(1+t^2)}$ intégrable.
Par domination sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$, on peut affirmer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2xt^2}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$
En réalisant la décomposition en éléments simples (pour $x \neq 1$),
$f'(x) = \frac{\pi}{x+1}$ et cette relation est aussi valable pour $x = 1$ par continuité.
Sachant que $f(0) = 0$ et que f est paire, on obtient $f(x) = \pi\ln(1+|x|)$.

Exercice 91 : [énoncé]

(a) Posons $f(x,t) = \ln(\cos^2(t) + x^2\sin^2(t))$ définie sur $]0\,;+\infty[\times[0\,;\pi/2]$.
Pour chaque $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ étant continue par morceaux sur $[0\,;\pi/2]$, l'intégrale définissant $F(x)$ est bien définie.
Pour chaque $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{2x\sin^2(t)}{\cos^2(t)+x^2\sin^2(t)}.$$

Soit $[a\,;b] \subset\,]0\,;+\infty[$.

$$\forall (x,t) \in [a\,;b]\times[0\,;\pi/2], \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{2b}{\cos^2(t)+a^2\sin^2(t)} = \varphi_{a,b}(t)$$

avec la fonction $\varphi_{a,b}\colon [0\,;\pi/2] \to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et intégrable.
Par domination sur tout segment, F est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$F'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{2x\sin^2(t)}{\cos^2(t)+x^2\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Par le changement de variable $\mathcal{C}^1$ bijectif $u = \tan t$

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2u^2x}{(1+x^2u^2)(1+u^2)}\,\mathrm{d}u.$$

Par décomposition en éléments simples (si $x \neq 1$)

$$\frac{2xX}{(1+x^2X)(1+X)} = \frac{2x/(x^2-1)}{1+X} - \frac{2x/(x^2-1)}{1+x^2X}$$

et donc

$$F'(x) = \frac{2x}{x^2-1}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} - \frac{1}{1+x^2u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{x+1}$$

et la relation vaut aussi pour $x = 1$ par argument de continuité.
On en déduit

$$F(x) = \pi\ln(x+1) + C^{te}.$$

Sachant $F(1) = 0$, on conclut

$$F(x) = \pi\ln\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

Exercice 92 : [énoncé]

Posons

$$f(x) = \int_0^{2\pi} \frac{\ln(1+x\cos t)}{\cos t}\,\mathrm{d}t.$$

Pour $|x| > 1$, l'intégrale ne peut pas être définie.
Pour $|x| \leq 1$
En $t = \pi/2$ et $t = 3\pi/2$, il est possible de prolonger par continuité la fonction intégrée.
Pour $x = -1$:
Quand $t \to 0^+$, $\ln(1-\cos t) \sim 2\ln t$
Quand $t \to 2\pi^-$, $t = 2\pi - h$, $\ln(1-\cos t) = \ln(1-\cos h) \sim 2\ln h$
Pour $x = 1$, quand $t \to \pi$,$t = \pi + h$, $\ln(1+\cos t) = \ln(1-\cos h) \sim 2\ln h$.
Finalement f est définie sur $[-1\,;1]$.
Pour des raisons de symétrie,

$$f(x) = 2\int_0^{\pi} \frac{\ln(1+x\cos t)}{\cos t}\,\mathrm{d}t.$$

Par domination sur $[-a\,;a]$ avec $a < 1$, f est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1\,;1[$ et

$$f'(x) = 2\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+x\cos t}.$$

Par le changement de variable $u = \tan\frac{t}{2}$,

$$f'(x) = 4\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)+x(1-u^2)} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Puisque $f(0) = 0$, on en déduit $f(x) = 2\pi\arcsin x$.

Exercice 93 : [énoncé]

(a) $f(x,t)=\ln(1+x\sin^2 t)$ est définie et continue sur $[0\,;+\infty[\times[0\,;\pi/2]$.
Soit $[a\,;b]\subset[0\,;+\infty[$,

$$\forall(x,t)\in[a\,;b]\times[0\,;\pi/2],\left|f(x,t)\right|\leq\ln(1+b)=\varphi(t).$$

La fonction φ est intégrable sur $[0\,;\pi/2]$
Par domination sur tout segment, on obtient F est définie et continue sur $[0\,;+\infty[$.

(b) f admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=\frac{\sin^2 t}{1+x\sin^2 t}.$$

Celle-ci est continue en x et continue par morceaux en t.

$$\forall(x,t)\in[0\,;+\infty[\times[0\,;\pi/2],\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\leq 1=\varphi(t).$$

La fonction φ est intégrable sur $[0\,;\pi/2]$ et donc, par domination, F est de classe $\mathcal{C}^1$ avec

$$F'(x)=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 t}{1+x\sin^2 t}\,\mathrm{d}t.$$

Par le changement de variable $u=\tan t$ $\mathcal{C}^1$ strictement croissant

$$F'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{u^2}{(1+u^2)(1+(x+1)u^2)}.$$

Après décomposition en éléments simples et calcul,

$$F'(x)=\frac{\pi}{2}\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)=\frac{\pi}{2}\frac{1}{(1+\sqrt{x+1})\sqrt{x+1}}.$$

(c) On remarque que

$$\ln(1+\sqrt{1+x})'=\frac{1}{2}\frac{1}{(1+\sqrt{x+1})\sqrt{x+1}}$$

donc

$$F(x)=\pi\ln(1+\sqrt{1+x})+C^{te}$$

sur $\mathbb{R}_+$.
Par continuité en 0 et sachant $F(0)=0$, on parvient à conclure.

Exercice 94 : [énoncé]

$t\mapsto\frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}$ est continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$,
$x\mapsto\frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et pour $x\in[-a\,;a]$

$$\left|\frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\right|\leq\frac{\left|\ln(a^2+t^2)\right|+\left|\ln(t^2)\right|}{1+t^2}=\varphi(t)$$

avec φ intégrable. Par suite f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Il est immédiat que f est paire. Poursuivons, en étudiant f sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\right)=\frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}$$

$t\mapsto\frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}$ est continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$,
$x\mapsto t\mapsto\frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et pour $x\in[a\,;b]\subset\mathbb{R}_+^*$,

$$\left|\frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}\right|\leq\frac{2b}{(a^2+t^2)(1+t^2)}=\psi(t)$$

avec ψ intégrable. Par suite f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour $x\neq 1$,

$$\frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}=\frac{2x}{x^2-1}\left(\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{x^2+t^2}\right)$$

donc

$$f'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{x+1}$$

et cette relation vaut aussi pour $x=1$ par continuité.
En procédant au changement de variable $u=1/t$, on obtient $f(0)=0$ et donc on peut conclure

$$f(x)=\pi\ln(x+1)$$

pour $x\in\mathbb{R}_+$ en exploitant un argument de continuité.

Exercice 95 : [énoncé]

(a) Posons

$$g(x,t)=\frac{\ln\left(1+2t\cos x+t^2\right)}{t}.$$

Puisque $\cos x\geq 0$,

$$1+2t\cos x+t^2\geq 1+t^2$$

donc $t \mapsto g(x,t)$ est définie et continue par morceaux sur $]0\,;1]$.
De plus
$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln\bigl(1+2t\cos x + t^2\bigr)}{t} = \cos x$$
on peut donc prolonger $t \mapsto g(x,t)$ par continuité en 0. Par suite $F(x)$ est bien définie.
La dérivée partielle $\frac{\partial g}{\partial x}$ existe sur $[0\,;\pi/2] \times]0\,;1]$ et
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -\frac{2\sin x}{1+2t\cos x+t^2}$$
$t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;1]$,
$x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[0\,;\pi/2]$ et
$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq 2 = \varphi(t)$$
avec φ est intégrable. Par domination F est de classe $\mathcal{C}^1$.

(b) Pour $x = 0$, $F'(0) = 0$.
Pour $x \neq 0$,
$$F'(x) = -\int_0^1 \frac{2\sin x}{1+2t\cos x+t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{2\sin x}{(t+\cos x)^2+\sin^2 x}\,\mathrm{d}t = -\left[2\arctan\frac{t+\cos x}{\sin x}\right]_0^1.$$
Or
$$\arctan\frac{\cos x}{\sin x} = \arctan(\tan(\pi/2 - x))$$
avec $\pi/2 - x \in]-\pi/2\,;\pi/2[$ donc
$$\arctan\frac{\cos x}{\sin x} = \pi/2 - x$$
et
$$\arctan\frac{1+\cos x}{\sin x} = \arctan\frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)} = \pi/2 - x/2.$$
Finalement,
$$F'(x) = 2((\pi/2 - x) - (\pi/2 - x/2)) = -x.$$

(c)
$$F(0) = \int_0^1 \frac{2\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} t^n\,\mathrm{d}t$$
or la série de fonctions $\sum \frac{(-1)^n}{n+1} t^n$ converge uniformément sur $[0\,;1]$ puisque la série numérique satisfait au critère spécial ce qui permet d'écrire
$$\bigl|R_N(t)\bigr| \leq \frac{t^{n+1}}{n+2} \leq \frac{1}{n+2}$$
d'où $\|R_N\|_\infty \to 0$.
Par suite
$$F(0) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$$
puis
$$F(x) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{x^2}{2}.$$

Exercice 96 : [énoncé]

(a) Posons
$$g_n(x,t) = \frac{1}{(x^2+t^2)^n}$$
$t \to g_n(x,t)$ est définie continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et $g_n(x,t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2n}}$ donc l'intégrale définissant $I_n(x)$ existe.

(b)
$$I_1(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x^2+t^2} = \left[\frac{1}{x}\arctan\frac{t}{x}\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2x}.$$

(c) $\frac{\partial g_n}{\partial x}(x,t) = \frac{-2nx}{(x^2+t^2)^{n+1}}$ existe sur $]0\,;+\infty[\times [0\,;+\infty[$.
$t \mapsto \frac{\partial g_n}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$, $x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout $0 < a < b$,
$$\forall x \in [a\,;b], \left|\frac{\partial g_n}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{2nb}{(a^2+t^2)^{n+1}} = \varphi_{a,b}(t)$$
avec $\varphi_{a,b}$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Par domination sur tout segment, I_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a\,;b]$ puis sur $\mathbb{R}_+^*$ et
$$I_n'(x) = -2nxI_{n+1}(x).$$

(d) $I_n(x) = \frac{\lambda_n}{x^{2n+1}}$ avec $\lambda_1 = \frac{\pi}{2}$ et $\lambda_{n+1} = \frac{2n+1}{2n}\lambda_n$ d'où
$$\lambda_n = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\pi.$$

Exercice 97 : [énoncé]

(a) Posons
$$f(x,t)=\frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}$$
est définie sur $[0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$,
$t\mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ car prolongeable par continuité en 0 et égale à un $\mathrm{O}(1/t^3)$ en $+\infty$. Ainsi F est définie sur $\mathbb{R}_+$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$$
est définie sur $[0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$,
$t\mapsto\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$ et $x\mapsto\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[0\,;+\infty[$.
$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\leq\frac{1}{1+t^2}=\varphi(t)$$
avec φ continue par morceaux et intégrable sur $]0\,;+\infty[$,
donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ avec
$$F'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}.$$

(b) Pour $x\neq 1$
$$\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}=\frac{1}{x^2-1}\left(\frac{x^2}{1+x^2t^2}-\frac{1}{1+t^2}\right)$$
d'où
$$F'(x)=\frac{x-1}{x^2-1}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2(x+1)}$$
ce qui est encore valable en 1 par continuité.
Par suite
$$F(x)=\frac{\pi}{2}\ln(x+1)+C$$
avec $C=0$ puisque $F(0)=0$.

Exercice 98 : [énoncé]

(a) Posons
$$f(x,t)=\frac{\mathrm{e}^{-xt}\sin t}{t}$$
définie sur $]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$.
Pour tout $x>0$, la fonction $t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$ et intégrable car
$$f(x,t)\xrightarrow[t\to0^+]{}1\quad\text{et}\quad t^2f(x,t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}0.$$
La fonction f admet une dérivée partielle
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=-\mathrm{e}^{-xt}\sin(t).$$
Celle-ci est continue en x et continue par morceaux en t.
Soit $[a\,;b]\subset]0\,;+\infty[$. On a
$$\forall(x,t)\in[a\,;b]\times]0\,;+\infty[,\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\leq\mathrm{e}^{-at}=\varphi(t).$$
La fonction φ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$. Par domination sur tout segment, on obtient F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$ et
$$F'(x)=-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}\sin(t)\,\mathrm{d}t.$$
En exploitant
$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}\sin(t)\,\mathrm{d}t=\operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t\right)$$
on obtient
$$F'(x)=-\frac{1}{1+x^2}.$$

(b) On en déduit
$$F(x)=-\arctan x+C^{te}\text{ sur }]0\,;+\infty[.$$
Montrons $\lim_{x\to+\infty}F(x)=0$. On a $|\sin t|\leq t$ pour tout $t>0$ et donc
$$\left|F(x)\right|\leq\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0.$$
On conclut
$$F(x)=\frac{\pi}{2}-\arctan x.$$

(c)

Exercice 99 : [énoncé]
$S \times [a\,;b]$ est compact et toute fonction continue sur un compact y est uniformément continue.
Étudions la continuité de F en $\alpha \in \mathbb{R}$ et considérons $S = [\alpha - 1\,;\alpha + 1]$.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x,t),(x',t') \in S\times[a\,;b], \left\|(x,t)-(x',t')\right\|_\infty \le \eta \implies \left|f(x,t)-f(x',t')\right| \le \varepsilon.$$

Donc pour $|x-\alpha| \le \eta$, on a

$$\left|F(x) - F(\alpha)\right| \le \int_a^b \varepsilon \,\mathrm{d}t = \varepsilon(b-a).$$

Ainsi F est continue en α.
$(x,t) \mapsto \mathrm{e}^{xt}$ est continue par opérations donc g l'est aussi par intégration sur un segment.
Pour $x \neq 0$, $g(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$ et $g(0) = 1$.
Sans difficultés, on vérifie g est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 100 : [énoncé]
Réalisons le changement de variable $t = u(x) + \theta\big(v(x) - u(x)\big)$

$$\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t = \big(v(x) - u(x)\big)\int_0^1 f\big(x, u(x) + \theta(v(x) - u(x))\big)\,\mathrm{d}\theta.$$

Considérons la fonction

$$g\colon (x,\theta) \mapsto f(x, u(x) + \theta(v(x) - u(x))).$$

Pour $[a\,;b] \subset I$, la fonction g est continue sur le compact $[a\,;b] \times [0\,;1]$ et donc bornée. Par conséquent, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ vérifiant

$$\forall (x,\theta) \in [a\,;b] \times [0\,;1], \left|g(x,\theta)\right| \le M = \varphi(\theta).$$

La fonction φ est intégrable sur $[0\,;1]$ et donc, par domination sur tout segment, on peut affirmer la continuité de la fonction

$$x \mapsto \int_0^1 g(x,\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

On en déduit la continuité de la fonction étudiée par produit.

Exercice 101 : [énoncé]
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut écrire

$$f(x) = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t \underset{t=xu}{=} x\int_0^1 f'(xu)\,\mathrm{d}u.$$

On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, g(x) = \int_0^1 f'(xu)\,\mathrm{d}u.$$

Posons $h(x,u) = f'(xu)$ définie sur $\mathbb{R} \times [0\,;1]$.
La fonction h admet des dérivées partielles $\frac{\partial^n h}{\partial x^n}$ à tout ordre n avec

$$\frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,u) = u^n f^{(n+1)}(xu).$$

Celles-ci sont continues en x et continues par morceaux en u.
Soit $[-a\,;a] \subset \mathbb{R}$. Puisque la fonction $f^{(n+1)}$ est continue sur le segment $[-a\,;a]$, elle y est bornée et donc il existe $M \in \mathbb{R}_+$ vérifiant

$$\forall (x,u) \in [-a\,;a] \times [0\,;1], \left|\frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,u)\right| \le M = \varphi(u).$$

Puisque la fonction φ est intégrable, on peut affirmer par domination sur tout segment, que la fonction

$$x \mapsto \int_0^1 f'(xu)\,\mathrm{d}u$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\int_0^1 f'(xu)\,\mathrm{d}u\right) = \int_0^1 u^n f^{(n+1)}(xu)\,\mathrm{d}u.$$

On en déduit que la fonction g se prolonge en une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, g^{(n)}(0) = \int_0^1 u^n f^{(n+1)}(0)\,\mathrm{d}u = \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}.$$

Exercice 102 : [énoncé]

(a) On applique la formule de Taylor reste-intégrale à f en a.

(b) On réalise le changement de variable $t = a + \theta(x-a)$ et l'on obtient

$$f(x) = (x-a)^\alpha \int_0^1 \frac{(1-\theta)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} f^{(\alpha)}(a + \theta(x-a))\,\mathrm{d}\theta.$$

Posons
$$h(x,\theta)=\frac{(1-\theta)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}f^{(\alpha)}(a+\theta(x-a)).$$
La fonction h admet des dérivées partielles
$$\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,\theta)=\frac{(1-\theta)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}(x-a)^k f^{(\alpha+k)}(a+\theta(x-a)).$$
Celles-ci sont continues en x et continues par morceaux en θ.
Soit $[a-b\,;a+b]\subset\mathbb{R}$. La fonction $f^{(\alpha+k)}$ est continue sur ce segment et y est donc bornée par un certain M.
Puisque
$$\forall x\in[a-b\,;a+b],\forall\theta\in[0\,;1],a+\theta(x-a)\in[a-b\,;a+b]$$
on a
$$\forall(x,\theta)\in[a-b\,;a+b]\times[0\,;1],\left|\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,\theta)\right|\leq M=\varphi(\theta)$$
avec φ fonction intégrable sur $[0\,;1]$.
Par domination sur tout segment, on peut affirmer que la fonction
$$g\colon x\mapsto\int_0^1\frac{(1-\theta)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}f^{(\alpha)}(a+\theta(x-a))\,\mathrm{d}\theta$$
est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 103 : [énoncé]
Pour $x\neq 0$, on écrit
$$f(x)=\frac{1}{x}\int_0^x\cos t\,\mathrm{d}t\underset{t=xs}{=}\int_0^1\cos(xs)\,\mathrm{d}s.$$
La relation obtenue vaut aussi pour $x=0$.
Introduisons la fonction $u\colon\mathbb{R}\times[0\,;1]\to\mathbb{R}$ définie par
$$u(x,s)=\cos(xs).$$
Cette fonction est indéfiniment dérivable en x avec
$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,s)=s^n\cos\bigl(xs+\frac{n\pi}{2}\bigr).$$
Cette dérivée partielle est dominée par 1 qui est intégrable.
Par théorème de domination, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec
$$f^{(n)}(x)=\int_0^1 s^n\cos\bigl(xs+\frac{n\pi}{2}\bigr)\,\mathrm{d}s$$
et donc
$$\bigl|f^{(n)}(x)\bigr|\leq\int_0^1 s^n\,\mathrm{d}s=\frac{1}{n+1}.$$

Exercice 104 : [énoncé]

(a) $t\mapsto g(x,t)=\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i}x)t^2}$ est définie et continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$.
Puisque $t\mapsto\bigl|g(x,t)\bigr|=\mathrm{e}^{-t^2}$ est intégrable sur $[0\,;+\infty[$, la fonction z est bien définie.
$t\mapsto\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)=\mathrm{i}t^2\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i}x)t^2}$ est définie et continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$,
$x\mapsto\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$,
$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|\leq t^2\mathrm{e}^{-t^2}=\varphi(t)$$
avec φ intégrable sur $[0\,;+\infty[$.
La fonction z est donc définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec
$$z'(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{i}t^2\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i}x)t^2}\,\mathrm{d}t\underset{\text{ipp}}{=}-\frac{1}{2(x+\mathrm{i})}z(x).$$

(b) En multipliant par la quantité conjuguée
$$\frac{-1}{2(x+\mathrm{i})}=\frac{-x+\mathrm{i}}{2(x^2+1)}=-\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{\mathrm{i}}{2(x^2+1)}$$
donc
$$z(x)=C\exp\left(\mathrm{i}\frac{\arctan x}{2}-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)\right)=\frac{C\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\arctan x)/2}}{(x^2+1)^{1/4}}.$$
Puisque $z(0)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, on conclut
$$z(x)=\frac{\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\arctan x)/2}}{2(x^2+1)^{1/4}}.$$

Exercice 105 : [énoncé]

(a) Posons $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,t)=\frac{\mathrm{e}^{itx}}{1+t^2}.$$

La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}^2$.
Pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}^2$, on a

$$\left|f(x,t)\right|\leq\frac{1}{1+t^2}=\psi(t)$$

avec ψ intégrable sur $[0\,;+\infty[$.
On en déduit que φ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Par intégration par parties

$$\varphi(x)=-\frac{1}{\mathrm{i}x}+\frac{1}{\mathrm{i}x}\int_0^{+\infty}\frac{2t\mathrm{e}^{itx}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t.$$

La fonction

$$x\mapsto\int_0^{+\infty}\frac{2t\mathrm{e}^{itx}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en vertu de la domination

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2t\mathrm{e}^{itx}}{(1+t^2)^2}\right)\right|=\frac{2t^2}{(1+t^2)^2}\leq\frac{2}{1+t^2}.$$

On en déduit que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ avec

$$\varphi'(x)=\frac{1}{\mathrm{i}x^2}-\frac{1}{\mathrm{i}x^2}\int_0^{+\infty}\frac{2t\mathrm{e}^{itx}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t+\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\frac{2t^2\mathrm{e}^{itx}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Or par intégration par parties

$$\int_0^{+\infty}\frac{2t\mathrm{e}^{itx}}{(1+t^2)^2}=\left[-\frac{\mathrm{e}^{itx}}{1+t^2}\right]_0^{+\infty}+\mathrm{i}x\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{itx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\varphi'(x)=-\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{itx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t+\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\frac{2t^2\mathrm{e}^{itx}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\frac{t^2-1}{(1+t^2)^2}\mathrm{e}^{itx}\,\mathrm{d}t.$$

Enfin, une dernière intégration par parties donne

$$\varphi'(x)=\frac{1}{x}\left[-\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{e}^{itx}\right]_0^{+\infty}+\mathrm{i}\int_0^{+\infty}\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{e}^{itx}\,\mathrm{d}t$$

et la relation voulue...

(c) Par le changement de variable $u=tx$, on obtient l'expression proposée.
On peut décomposer

$$\varphi'(x)=\mathrm{i}\int_0^1\frac{u\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u+\int_1^{+\infty}\frac{u\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u.$$

D'une part, par intégration par parties

$$\int_1^{+\infty}\frac{u\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u=\left[\frac{u\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{x^2+u^2}\right]_1^{+\infty}-\int_1^{+\infty}\frac{x^2-u^2}{(x^2+u^2)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}\,\mathrm{d}u$$

avec

$$\left[\frac{u\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{x^2+u^2}\right]_1^{+\infty}=-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}{x^2+1}\xrightarrow[x\to0^+]{}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}}$$

et

$$\left|\int_1^{+\infty}\frac{x^2-u^2}{(x^2+u^2)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}\,\mathrm{d}u\right|\leq\int_1^{+\infty}\frac{u^2-x^2}{(x^2+u^2)^2}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{x^2+1}\xrightarrow[x\to0^+]{}1.$$

D'autre part

$$\int_0^1\frac{u\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u=\int_0^1\frac{u}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u+\int_0^1\frac{u(\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}-1)}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u$$

avec

$$\int_0^1\frac{u}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u=\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+u^2)\right]_0^1\underset{x\to0^+}{\sim}\ln x$$

et

$$\left|\int_0^1\frac{u(\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}-1)}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u\right|\leq\int_0^1\frac{\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}-1\right|}{u}\,\mathrm{d}u<+\infty.$$

Au final

$$\varphi'(x)=\mathrm{i}\ln x+\mathrm{o}(\ln x)+\mathrm{o}(1)\underset{x\to0^+}{\sim}\mathrm{i}\ln x.$$

(d) En vertu de ce qui précède

$$\operatorname{Im}(\varphi'(x))\underset{x\to0^+}{\sim}\ln x\to-\infty.$$

On en déduit que la fonction réelle $\operatorname{Im}\varphi$ n'est pas dérivable en 0, il en est a *fortiori* de même de φ.

Exercice 106 : [énoncé]
Posons $u(x,t)=\mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)$.

(a) Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto u(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$ et négligeable devant $1/t^2$ en $+\infty$ donc intégrable sur $[0\,;+\infty[$. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

(b) La fonction $t \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et $x \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
Pour $x \in [0\,;+\infty[$,
$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right| \leq t\mathrm{e}^{-t^2}$$
avec $t \mapsto t\mathrm{e}^{-t^2}$ intégrable sur $[0\,;+\infty[$, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ et
$$f'(x) = \int_0^{+\infty} -t\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)\,\mathrm{d}t.$$
Par intégration par parties généralisée justifiée par deux convergences,
$$f'(x) = \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}xf(x)$$
f est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et $f(0) = \sqrt{\pi}/2$ on conclut
$$f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^2}.$$

(c) On peut écrire
$$f(x) = \int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}t^{2n}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$
Posons $u_n(t) = \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}t^{2n}\mathrm{e}^{-t^2}$.
Les fonctions u_n sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
La série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)$ elle aussi continue par morceaux.
Les fonctions u_n sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$ et
$$\int_0^{+\infty}\left|u_n(t)\right|\mathrm{d}t = \frac{x^{2n}}{(2n)!}\int_0^{+\infty} t^{2n}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$
Par intégration par parties généralisée justifiée par deux convergences
$$\int_0^{+\infty} t^{2n}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2n-1}{2}\int_0^{+\infty} t^{2(n-1)}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$
et donc
$$\int_0^{+\infty} t^{2n}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$
Ainsi
$$\int_0^{+\infty}\left|u_n(t)\right|\mathrm{d}t = \frac{x^{2n}}{2^{2n}n!}\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$
Cette quantité étant sommable, on peut intégrer terme à terme et on retrouve
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}n!}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-x^2/4}.$$

Exercice 107 : [énoncé]
Posons $u(x,t) = \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)$.
La fonction u est définie sur $\mathbb{R}\times[0\,;+\infty[$ et admet une dérivée partielle
$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -t\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)$$
$\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto u(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0\,;+\infty[$ car négligeable devant $1/t^2$ en $+\infty$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$.
$\forall t \in [0\,;+\infty[$, $x \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
Enfin
$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times[0\,;+\infty[,\ \left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right| \leq t\mathrm{e}^{-t^2} = \varphi(t)$$
avec $\varphi\colon [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable sur $[0\,;+\infty[$.
Par domination, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ et
$$g'(x) = \int_0^{+\infty} -t\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)\,\mathrm{d}t.$$
Procédons à une intégration par parties avec les fonctions $\mathcal{C}^1$
$$u(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2} \text{ et } v(t) = \sin(xt).$$
Puisque le produit uv converge en 0 et $+\infty$, l'intégration par parties généralisée est possible et
$$g'(x) = \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t.$$
Ainsi on obtient
$$g'(x) = -\frac{1}{2}xg(x)$$

g est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et $g(0)=\sqrt{\pi}/2$ on conclut

$$\varphi(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^2}.$$

Exercice 108 : [énoncé]

Posons $f(x,t)=t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*\times]0\,;+\infty[$.
Pour tout $x>0$, la fonction $t\mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ car

$$t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\underset{t\to0^+}{\sim}t^{x-1}\text{ avec }x-1>-1\text{ et }t^2f(x,t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}0.$$

La fonction f admet des dérivées partielles

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)=(\ln t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}.$$

Pour tout $x>0$, la fonction $t\mapsto\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0\,;+\infty[$ car

$$t^a(\ln t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\xrightarrow[x\to0^+]{}0\text{ pour }a\in]1-x\,;1[\text{ et }t^2\times(\ln t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0.$$

Pour $[a\,;b]\subset]0\,;+\infty[$,

$$\forall(x,t)\in[a\,;b]\times]0\,;+\infty[,\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right|\le(\ln t)^k(t^{a-1}+t^{b-1})\mathrm{e}^{-t}=\varphi(t)$$

car

$$t^{x-1}\le t^{a-1}+t^{b-1}\text{ que }t\le1\text{ ou }t\ge1.$$

La fonction φ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ et donc, par domination sur tout segment, Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0\,;+\infty[$

Exercice 109 : [énoncé]

(a) Posons $f(x,t)=t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*\times]0\,;+\infty[$.
Pour tout $x>0$, la fonction $t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$ et intégrable car

$$t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\underset{t\to0^+}{\sim}t^{x-1}\text{ avec }x-1>-1\text{ et }t^2f(x,t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}0.$$

La fonction Γ est donc définie sur $]0\,;+\infty[$.
Pour tout $t\in]0\,;+\infty[$, la fonction $x\mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$
Pour $x\in[a\,;b]\subset]0\,;+\infty[$, on a $t^{x-1}\le t^{a-1}$ ou $t^{x-1}\le t^{b-1}$ selon que $t\le1$ ou $t\ge1$ et donc

$$\forall(x,t)\in[a\,;b]\times]0\,;+\infty[,\left|f(x,t)\right|\le f(a,t)+f(b,t)=\varphi(t).$$

La fonction φ est intégrable et donc, par domination sur tout segment, Γ est continue sur $]0\,;+\infty[$.
car

$$t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\underset{t\to0^+}{\sim}t^{x-1}\text{ avec }x-1>-1\text{ et }t^2f(x,t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}0.$$

(b) Pour $k=1$ ou 2.

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}\text{ existe et }\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)=(\ln t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}.$$

Pour tout $x>0$: $t\mapsto\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0\,;+\infty[$ car

$$t^a\ln(t)t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\xrightarrow[x\to0^+]{}0\text{ pour }a\in]1-x\,;1[\text{ et }t^2\times\ln(t)t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ est continue en x et continue par morceaux en t.
Pour tout $[a\,;b]\subset]0\,;+\infty[$

$$\forall(x,t)\in[a\,;b]\times]0\,;+\infty[,\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right|\le(\ln t)^2(t^{a-1}+t^{b-1})\mathrm{e}^{-t}=\varphi(t).$$

Par des arguments analogues aux précédents, on obtient que φ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ et donc, par domination sur tout segment, Γ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0\,;+\infty[$ avec

$$\Gamma'(x)=\int_0^{+\infty}\ln(t)t^{x-1}\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}t\text{ et }\Gamma''(x)=\int_0^{+\infty}(\ln t)^2t^{x-1}\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}t.$$

(c) La dérivée seconde de $\ln\Gamma(x)$ est du signe de

$$\Gamma''(x)\Gamma(x)-\Gamma'(x)^2.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\int_0^{+\infty}\sqrt{t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}}\sqrt{(\ln t)^2t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}}\right)\mathrm{d}t\le\left(\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^{+\infty}(\ln t)^2t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right).$$

Ainsi

$$\Gamma'(x)^2\le\Gamma(x)\Gamma''(x)$$

et donc

$$(\ln\Gamma(x))''\ge0.$$

Finalement $x\mapsto\ln\Gamma(x)$ est convexe.

Exercice 110 : [énoncé]

(a) Puisque $\ln(1+u) \leq u$, on a

$$0 \leq \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1} = \exp\left((n-1)\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)\right) \leq \exp\left(-(n-1)\frac{t}{n}\right) = \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{t/n} \leq \mathrm{e}.\mathrm{e}^{-t}.$$

(b) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\ln(t)\mathrm{e}^{-t}$ est limite simple de la suite de fonction (u_n) définie par $u_n(t) = \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}$ si $t \in \left]0\,;n\right[$ et $u_n(t) = 0$ sinon.

Puisque $\left|\ln(t)u_n(t)\right| \leq \mathrm{e}.\ln(t)\mathrm{e}^{-t}$, par convergence dominée :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \ln(t)\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\ln(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

(c) Par le changement de variable $u = nt$

$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\ln(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 n(1-u)^{n-1}\ln(nu)\,\mathrm{d}u$$

avec

$$\int_0^1 n(1-u)^{n-1}\ln(nu)\,\mathrm{d}u = \ln n + \int_0^1 n\ln(u)(1-u)^{n-1}\,\mathrm{d}u$$

et

$$\int_\varepsilon^1 n\ln(u)(1-u)^{n-1}\,\mathrm{d}u = \Big[\ln(u)(1-(1-u)^n)\Big]_\varepsilon^1 + \int_\varepsilon^1 \frac{(1-u)^n-1}{u}\,\mathrm{d}u.$$

On notera que la fonction $u \mapsto n(1-u)^{n-1}$ est primitivée en $(1-(1-u)^n)$ qui s'annule en 0 de sorte que l'intégration par parties donne à la limite quand $\varepsilon \to 0^+$

$$\int_0^1 n\ln(u)(1-u)^{n-1}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{(1-u)^n-1}{u}\,\mathrm{d}u.$$

(d) Par le changement de variable $u = 1-v$

$$\int_0^1 \frac{(1-u)^n-1}{u}\,\mathrm{d}u = -\int_0^1 \frac{v^n-1}{v-1}\,\mathrm{d}v = -\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} v^k\,\mathrm{d}v$$

puis

$$\int_0^1 \frac{(1-u)^n-1}{u}\,\mathrm{d}u = -\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = -\ln n - \gamma + \mathrm{o}(1).$$

Finalement

$$\int_0^{+\infty}\ln(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -\gamma.$$

Exercice 111 : [énoncé]

(a) Posons $f(x,t) = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \left]0\,;+\infty\right[$.
Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\left]0\,;+\infty\right[$ car

$$t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to0^+}{\sim} t^{x-1} \text{ avec } x-1 > -1 \text{ et } t^2 f(x,t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$

La fonction f admet des dérivées partielles

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = (\ln t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}.$$

Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\left]0\,;+\infty\right[$ car

$$t^a(\ln t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[x\to0^+]{} 0 \text{ pour } a \in \left]1-x\,;1\right[\text{ et } t^2 \times (\ln t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$

Pour $[a\,;b] \subset \left]0\,;+\infty\right[$,

$$\forall (x,t) \in [a\,;b] \times \left]0\,;+\infty\right[, \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq (\ln t)^k(t^{a-1}+t^{b-1})\mathrm{e}^{-t} = \varphi(t)$$

car

$$t^{x-1} \leq t^{a-1} + t^{b-1} \text{ que } t \leq 1 \text{ ou } t \geq 1.$$

La fonction φ est intégrable sur $\left]0\,;+\infty\right[$ et donc, par domination sur tout segment, Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]0\,;+\infty\right[$

(b) Par intégration par parties avec $u'(t) = \mathrm{e}^{-t}$ et $v(t) = t^x$, on obtient

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Sachant $\Gamma(1) = 1$, on obtient par récurrence $\Gamma(n+1) = n!$.

(c) Par le changement de variable proposé

$$\Gamma(n+1) = \frac{n^n}{\mathrm{e}^n}\sqrt{n}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(y)\,\mathrm{d}y$$

avec

$$f_n(y) = 0 \text{ sur } \left]-\infty\,;-\sqrt{n}\right], f_n(y) = \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}}\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \text{ sur } \left]-\sqrt{n}\,;+\infty\right[.$$

Sur $\left]-\sqrt{n}\,;0\right]$, une étude fonctionnelle montre $n\ln\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right) - y\sqrt{n} \leq -\frac{y^2}{2}$ qui donne $0 \leq f_n(y) \leq \mathrm{e}^{-y^2/2}$.
Sur $\left[0\,;+\infty\right[$, une étude fonctionnelle montre $n\ln\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right) - y\sqrt{n} \leq -y + \ln(1+y)$ pour $t \geq 1$. Cela donne $0 \leq f_n(y) \leq (1+y)\mathrm{e}^{-y}$.

(d) La fonction

$$\varphi\colon y \to \begin{cases} e^{-y^2/2} & \text{si } y \le 0 \\ (1+y)e^{-y} & \text{sinon} \end{cases}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$.
Quand $n \to +\infty$, en réalisant un développement limité du contenu de l'exponentielle

$$f_n(y) = e^{-y\sqrt{n}+n\ln(1+\frac{y}{\sqrt{n}})} \to e^{-y^2/2}.$$

Par convergence dominée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(y)\,dy \to \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2}\,dy = \sqrt{2\pi}$$

d'où

$$\Gamma(n+1) = n! \sim \sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{e^n}.$$

Exercice 112 : [énoncé]

(a) La fonction Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
En effet, pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f\colon t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est définie et continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$.
Puisque $t^2 f(t) = t^{x+1}e^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, la fonction f est assurément intégrable sur $[1\,;+\infty[$.
De plus, $f(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1}$ est intégrable sur $]0\,;1]$ si, et seulement si, $x-1>-1$ *i.e.* $x>0$.
Ainsi f est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ si, et seulement si, $x>0$.
Enfin, la fonction f étant positive, l'intégrabilité équivaut à l'existence de l'intégrale.

(b) Par intégration par parties

$$I_n(x) = \left[\frac{t^x}{x}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]_0^n + \int_0^n \frac{t^x}{x}\frac{n}{n}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1} dt.$$

En répétant l'opération

$$I_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n-1)n^n}\int_0^n t^{x+n-1}\,dx$$

et finalement

$$I_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

(c) Quand $n \to +\infty$

$$\left(1-\frac{t}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln(1-\frac{t}{n})\right) = \exp\left(n\left(-\frac{t}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \to e^{-t}.$$

Considérons la suite des fonctions

$$f_n\colon t \mapsto \begin{cases} t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n & \text{si } t \in]0\,;n[\\ 0 & \text{si } t \in [n\,;+\infty[. \end{cases}$$

Soit $t>0$ fixé. Pour n assez grand $t \in]0\,;n[$ et

$$f_n(t) = t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \to t^{x-1}e^{-t}.$$

La suite (f_n) converge simplement vers la fonction f introduite dans la première question.
Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux.
Enfin, pour $t \in]0\,;n[$, on a

$$\left|f_n(t)\right| = t^{x-1}\exp\bigl(n\ln(1-t/n)\bigr) \le t^{x-1}e^{-t} = f(t)$$

car il est connu $\ln(1+u) \le u$ pour tout $u>-1$. On a aussi $\left|f_n(t)\right| \le f(t)$ pour $t \in [n\,;+\infty[$ et donc

$$\forall t \in]0\,;n[, \left|f_n(t)\right| \le f(t).$$

La fonction f étant intégrable, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et affirmer

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt.$$

Puisque

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$$

on peut conclure

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

Exercice 113 : [énoncé]

Notons que $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt$ est bien définie.

Pour tout $t \in \left]0\,;1\right]$,

$$t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{n+x-1}}{n!}$$

donc

$$\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_{]0;1]} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n.$$

Les fonctions f_n sont continues par morceaux, $\sum f_n$ converge simplement sur $\left]0\,;1\right]$ et est de somme $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ continue par morceaux.
Les fonctions f_n sont intégrables sur $\left]0\,;1\right]$ et

$$\int_{]0;1]} \left|f_n(t)\right|\mathrm{d}t = \frac{1}{n!(x+n)}.$$

La série $\sum \int_{]0;1]} |f_n|$ converge donc on peut intégrer terme à terme

$$\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}.$$

Exercice 114 : [énoncé]

(a) Posons

$$f(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}$$

définie sur $\left[0\,;+\infty\right[\times \left]0\,;+\infty\right[$.
Soit $x \geq 0$. L'application $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $\left]0\,;+\infty\right[$ et

$$0 \leq f(x,t) \leq \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)}$$

avec

$$\frac{1}{\sqrt{t}(1+t)} \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}} \text{ et } \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{3/2}}$$

donc $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\left]0\,;+\infty\right[$ et l'intégrale généralisée définissant $F(x)$ est bien convergente.

(b) Pour chaque $t \in \left]0\,;+\infty\right[$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\frac{t\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}.$$

Pour tout $x \in \left]0\,;+\infty\right[$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $\left]0\,;+\infty\right[$
Pour tout $t \in \left]0\,;+\infty\right[$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\left]0\,;+\infty\right[$
Soit $[a\,;b] \subset \left]0\,;+\infty\right[$. Pour $(x,t) \in \left[a\,;+\infty\right[\times \left]0\,;+\infty\right[$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \sqrt{t}\mathrm{e}^{-at} = \varphi(t)$$

avec $\varphi\colon \left]0\,;+\infty\right[\to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et intégrable.
Par domination sur tout segment, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]0\,;+\infty\right[$ et

$$F'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(1+t)}.$$

On constate alors

$$F(x) - F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \underset{xt=u}{=} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \frac{I}{\sqrt{x}}.$$

(c) On a

$$F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(1+t)} \underset{t=u^2}{=} \int_0^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}u}{1+u^2} = \pi$$

et

$$0 \leq F(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \frac{I}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

donc, par encadrement, $F \xrightarrow[+\infty]{} 0$.

(d) Après résolution (avec méthode de variation de la constante) de l'équation

$$y - y' = \frac{I}{\sqrt{x}}$$

avec la condition initiale $y(0) = \pi$, on obtient

$$\forall x \geq 0, F(x) = \mathrm{e}^x\left(\pi - I\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\right).$$

La nullité de la limite de F en $+\infty$ impose alors

$$I\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} \pi$$

et donc

$$I = \sqrt{\pi}.$$

Exercice 115 : [énoncé]

(a) La fonction

$$\varphi\colon t \mapsto \frac{1-\cos t}{t^2}$$

est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ car

$$\varphi(t) = \mathrm{O}(1/t^2) \text{ quand } t \to +\infty \text{ et } \varphi(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 1/2.$$

La fonction $g\colon (x,t) \mapsto \mathrm{e}^{-xt}\frac{1-\cos t}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+ \times]0\,;+\infty[$ et dominée par φ donc F est continue.
De plus la fonction φ est bornée donc, pour $x > 0$

$$\left|F(x)\right| \leq \|\varphi\|_\infty \int_0^x \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{\|\varphi\|_\infty}{x}$$

et on en déduit que F tend vers 0 en $+\infty$.

(b) Les dérivées partielles $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ existent et sont continues sur $\mathbb{R}_+^* \times]0\,;+\infty[$.
$t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0\,;+\infty[$.
Soit $[a\,;b] \subset \mathbb{R}_+^*$

$$\forall (x,t) \in [a\,;b] \times]0\,;+\infty[, \left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq 2\mathrm{e}^{-at} = \psi(t).$$

La fonction ψ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.
Par domination sur tout segment, F est de classe $\mathcal{C}^2$ et

$$F''(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}(1-\cos t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}.$$

(c) On a

$$F'(x) = \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

car $F'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et

$$F(x) = x\ln x - x\ln\sqrt{x^2+1} - \arctan x + \frac{\pi}{2}$$

car $F(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
Par continuité, on obtient $F(0) = \pi/2$.
Par intégrations par parties

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{2\sin^2(t/2)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{2\sin^2(t/2)}{t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

d'où

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 116 : [énoncé]

(a) Posons $u(t) = 1-\cos(t)$ et $v(t) = 1/t$.
Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$ et le produit uv converge en 0 et $+\infty$:

$$u(t)v(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t}{2} \to 0 \text{ et } u(t)v(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}(1/t) \to 0.$$

Par intégration par parties généralisée, les intégrales

$$\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

sont de même nature. Or

$$\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

converge car

$$\frac{1-\cos t}{t^2} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{2} \text{ et } \frac{1-\cos t}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Cela permet de conclure à la convergence de

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

(b) Posons

$$f(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{-xt}\sin t}{t}$$

définie sur $]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$.
Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$ et intégrable car

$$f(x,t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} 1 \quad \text{et} \quad t^2 f(x,t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$

De plus, puisque $|\sin t| \leq t$ pour tout $t > 0$, on a

$$\left|F(x)\right| \leq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

(c) f admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\mathrm{e}^{-xt}\sin(t).$$

Celle-ci est continue en x et continue par morceaux en t.
Soit $[a\,;b] \subset]0\,;+\infty[$. On a

$$\forall (x,t) \in [a\,;b] \times]0\,;+\infty[, \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \mathrm{e}^{-at} = \varphi(t).$$

La fonction φ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$. Par domination sur tout segment, on obtient F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$ et

$$F'(x) = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\sin(t)\,\mathrm{d}t.$$

En exploitant

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\sin(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t\right)$$

on obtient

$$F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

(d) On en déduit

$$F(x) = -\arctan x + C^{te} \text{ sur }]0\,;+\infty[$$

et puisque $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$,

$$F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x.$$

Par continuité en 0,

$$I = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 117 : [énoncé]

(a) On réalise le changement de variable $t = u + n\pi$:

$$u_n(x) = (-1)^n \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-x(u+n\pi)} \frac{\sin u}{u+n\pi}\,\mathrm{d}u.$$

Ici

$$g_n(x,u) = \mathrm{e}^{-x(u+n\pi)} \frac{\sin u}{u+n\pi}.$$

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $u \in [0\,;\pi]$, $g_n(x,u) \geq 0$ et $g_{n+1}(x,u) \leq g_n(x,u)$ donc $u_n(x) = (-1)^n\left|u_n(x)\right|$ avec $\left(\left|u_n(x)\right|\right)_{n\geq 0}$ décroissante. De plus

$$\left|u_n(x)\right| \leq \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}u}{n\pi} = \frac{1}{n} \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*$$

donc $\left|u_n(x)\right| \xrightarrow[n\infty]{} 0$. Par application du critère spécial, la série $\sum_{n\geq 0} u_n(x)$ converge et

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leq \left|u_{n+1}(x)\right| \leq \frac{1}{n+1} \to 0$$

ce qui donne la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$.

(c) La fonction g_n est continue en x, continue par morceaux en u et

$$\forall x \in [0\,;+\infty[\times [0\,;\pi], \left|g_n(x,u)\right| \leq |\mathrm{sinc}\, u| \leq 1.$$

Par domination, les fonctions u_n sont continues.
Comme somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$, la fonction U est continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus, par sommation d'intégrales contiguës

$$U(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

avec cette intégrale qui est définie quand $x > 0$ et connue convergente quand $x = 0$.

(d) Posons

$$h(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{-xt}\sin t}{t}$$

définie sur $]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$.
Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$ et intégrable car

$$f(x,t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} 1 \text{ et } t^2 f(x,t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

h admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \mathrm{e}^{-xt}\sin(t).$$

Celle-ci est continue en x et continue par morceaux en t.
Soit $[a\,;b] \subset]0\,;+\infty[$. On a

$$\forall (x,t) \in [a\,;b] \times]0\,;+\infty[, \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leq \mathrm{e}^{-at} = \varphi(t).$$

La fonction φ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$. Par domination sur tout segment, on obtient U de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$ et

$$U'(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\sin(t)\,\mathrm{d}t.$$

En exploitant

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\sin(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t\right)$$

on obtient

$$U'(x) = \frac{-1}{1+x^2}.$$

(e) En intégrant

$$U(x) = C - \arctan x \quad \text{sur }]0\,;+\infty[.$$

Or

$$\left|U(x)\right| \le \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

donc $C = \pi/2$.
Par continuité en 0,

$$U(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 118 : [énoncé]

(a) Pour $x > 0$, $t^2\frac{\sin t}{t}\mathrm{e}^{-tx} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donne l'intégrabilité de $t \mapsto \frac{\sin t}{t}\mathrm{e}^{-tx}$.
Pour $x = 0$, il est connu que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente bien que $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ ne soit pas intégrable.

(b) Pour $x \in [a\,;b] \subset]0\,;+\infty[$,

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\sin t}{t}\mathrm{e}^{-tx}\right)\right| \le \mathrm{e}^{-ax} = \varphi(x)$$

avec φ intégrable. Par domination sur tout segment f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$.

(c) Pour $x > 0$,

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} -\sin(t)\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\left(-\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(-x+i)t}\,\mathrm{d}t\right) = -\frac{1}{x^2+1}$$

donc $f(x) = C - \arctan x$.
Or

$$\left|f(x)\right| \le \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

donc

$$C = \frac{\pi}{2}.$$

(d) En découpant l'intégrale, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t.$$

Posons

$$u_n(t) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t.$$

Par application du critère spécial des séries alternées, on établir que la série de fonctions continues $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0\,;1]$, on en déduit que sa somme, à savoir la fonction f, est continue en 0. On peut conclure que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 119 : [énoncé]

(a) Posons

$$f(x,t) = \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}$$

est définie sur $[0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$,
$t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ car prolongeable par continuité en 0 et égale à un $\mathrm{O}(1/t^3)$ en $+\infty$. Ainsi F est définie sur $\mathbb{R}_+$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$$

est définie sur $[0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$,
$t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$ et $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[0\,;+\infty[$.

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \le \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$$

avec φ continue par morceaux et intégrable sur $]0\,;+\infty[$, donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ avec

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}.$$

(b) Pour $x \neq 1$

$$\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \frac{1}{x^2-1}\left(\frac{x^2}{1+x^2t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right)$$

d'où

$$F'(x) = \frac{x-1}{x^2-1}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2(x+1)}$$

ce qui est encore valable en 1 par continuité.
Par suite

$$F(x) = \frac{\pi}{2}\ln(x+1) + C$$

avec $C = 0$ puisque $F(0) = 0$.

(c) En intégrant par parties, on obtient $\pi \ln 2$.

Exercice 120 : [énoncé]

(a) Posons

$$f(x,t) = \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2}.$$

La fonction f est définie et continue sur $]-1\,;+\infty[\times [0\,;1]$.
Pour $t \in [0\,;1]$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{t}{(1+xt)(1+t^2)}.$$

La fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $]-1\,;+\infty[\times [0\,;1]$.
Par intégration sur un segment, on peut affirmer que la fonction

$$F\colon x \mapsto \int_0^1 f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

est définie, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1\,;+\infty[$ et

$$F'(x) = \int_0^1 \frac{t}{(1+xt)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t.$$

Par décomposition en éléments simples (en la variable t)

$$\frac{t}{(1+xt)(1+t^2)} = \frac{-x}{(x^2+1)(1+xt)} + \frac{x+t}{(x^2+1)(1+t^2)}$$

donc

$$F'(x) = -\frac{\ln(1+x)}{x^2+1} + \frac{\pi}{4}\frac{x}{x^2+1} + \frac{\ln 2}{2}\frac{1}{1+x^2}.$$

Puisque $F(0) = 0$, on peut écrire

$$F(x) = \int_0^x F'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t^2+1}\,\mathrm{d}t + \frac{\pi}{8}\ln(x^2+1) + \frac{\ln 2}{2}\arctan x.$$

(b) Pour $x = 1$, la relation précédente donne

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi \ln 2}{8}.$$

Exercice 121 : [énoncé]

(a) Posons

$$f(x,\theta) = \frac{\arctan(x\tan\theta)}{\tan\theta}.$$

La fonction arctan étant définie sur $\mathbb{R}$, la fonction f est définie pour tout couple (x,θ) de $\mathbb{R} \times]0\,;\pi/2[$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\theta \mapsto f(x,\theta)$ est continue par morceaux sur $]0\,;\pi/2[$ et

$$f(x,\theta) \xrightarrow[x\to 0^+]{} x \quad\text{et}\quad f(x,\theta) \xrightarrow[x\to(\pi/2)^-]{} 0.$$

L'intégrale est faussement généralisée en ses deux bornes et donc converge.
Finalement, F est définie sur $\mathbb{R}$.

(b) La fonction f admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,\theta) = \frac{1}{1+x^2\tan^2\theta}.$$

Cette dérivée partielle est continue en x, continue par morceaux en θ et, pour tout $(x,\theta) \in \mathbb{R} \times]0\,;\pi/2[$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \theta}(x,\theta)\right| \leq 1 = \varphi(\theta)$$

avec φ intégrable. Par domination, F est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$F'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{1 + x^2 \tan^2 \theta} \,\mathrm{d}\theta.$$

On poursuit le calcul à l'aide du changement de variable $\mathcal{C}^1$ bijectif $t = \tan\theta$

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1 + x^2t^2)(1 + t^2)}.$$

Pour $x^2 \neq 0$ et $x^2 \neq 1$, on décompose en éléments simples la fraction

$$\frac{1}{(1 + x^2X)(1 + X)}$$

et on en déduit en prenant t^2 au lieu de X

$$\frac{1}{(1 + x^2t^2)(1 + t^2)} = \frac{\frac{x^2}{x^2-1}}{1 + x^2t^2} + \frac{\frac{1}{1-x^2}}{1 + t^2}.$$

On peut alors poursuivre le calcul de $F'(x)$. Pour $x > 0$ et $x \neq 1$,

$$F'(x) = \frac{x}{x^2 - 1} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{1 - x^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{x + 1} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

La fonction F' étant continue et paire, on obtient l'expression sur $\mathbb{R}$

$$F'(x) = \frac{1}{|x| + 1} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Enfin, sachant $F(0) = 0$, on conclut

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\ln(1 + x) & \text{si } x \geq 0 \\ -\frac{\pi}{2}\ln(1 - x) & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

(c) Pour $x = 1$, on obtient

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\theta}{\tan\theta} \,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}\ln 2.$$

Par intégration par parties généralisée

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\theta}{\tan\theta} \,\mathrm{d}\theta = \underbrace{\Big[-\theta\ln(\sin\theta)\Big]_0^{\pi/2}}_{=0} + \int_0^{\pi/2} \ln(\sin\theta) \,\mathrm{d}\theta$$

et donc

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin\theta) \,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}\ln 2.$$