Topologie des espaces normés

Ouverts et fermés

Exercice 1 [01103] [Correction]
Montrer que tout fermé peut s'écrire comme intersection d'une suite décroissante d'ouverts.

Exercice 2 [01104] [Correction]
On désigne par p_1 et p_2 les applications coordonnées de $\mathbb{R}^2$ définies par $p_i(x_1, x_2) = x_i$.

(a) Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^2$, montrer que $p_1(O)$ et $p_2(O)$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$.

(b) Soit $H = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\right\}$. Montrer que H est un fermé de $\mathbb{R}^2$ et que $p_1(H)$ et $p_2(H)$ ne sont pas des fermés de $\mathbb{R}$.

(c) Montrer que si F est fermé et que $p_2(F)$ est borné, alors $p_1(F)$ est fermé.

Exercice 3 [01105] [Correction]
Montrer que si un sous-espace vectoriel F d'un espace normé E est ouvert alors $F = E$.

Exercice 4 [04076] [Correction]
Soient F une partie fermée non vide d'un espace normé E et $x \in E$. Montrer

$$d(x, F) = 0 \iff x \in F.$$

Exercice 5 [01107] [Correction]
Soit E une espace vectoriel normé.

(a) Soient F une partie fermée non vide de E et $x \in E$. Montrer

$$d(x, F) = 0 \iff x \in F.$$

(b) Soient F et G deux fermés non vides et disjoints de E.
Montrer qu'il existe deux ouverts U et V tels que

$$F \subset U, G \subset V \text{ et } U \cap V = \emptyset.$$

Exercice 6 [01106] [Correction]
Soient A, B deux parties non vides d'un espace vectoriel normé E telles que

$$d(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y) > 0.$$

Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

Exercice 7 [01108] [Correction]
On munit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles bornées de la norme

$$\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|.$$

Déterminer si les sous-ensembles suivants sont fermés ou non :
$A = \{\text{suites croissantes}\}$, $B = \{\text{suites convergeant vers } 0\}$,
$C = \{\text{suites convergentes}\}$,
$D = \{\text{suites admettant 0 pour valeur d'adhérence}\}$ et $E = \{\text{suites périodiques}\}$.

Exercice 8 [01110] [Correction]
On note $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang.

(a) Montrer que $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ des suites réelles bornées.

(b) $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ étant normé par $\|\cdot\|_\infty$. Le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est-il une partie ouverte ? une partie fermée ?

Exercice 9 [02415] [Correction]
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ telle que pour tout x réel il existe un et un seul $y \in A$ tel que $|x - y| = d(x, A)$. Montrer que A est un intervalle fermé.

Exercice 10 [02770] [Correction]
On munit l'espace des suites bornées réelles $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ de la norme $\|u\|_\infty = \sup_n(|u_n|)$.

(a) Montrer que l'ensemble des suites convergentes est un fermé de $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

(b) Montrer que l'ensemble des suites (a_n) qui sont terme général d'une série absolument convergente n'est pas un fermé de $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

Exercice 11 [02771] [Correction]
Soit E l'ensemble des suites $(a_n)_{n\geq 0}$ de $\mathbb{C}$ telles que la série $\sum |a_n|$ converge. Si $a = (a_n)_{n\geq 0}$ appartient à E, on pose

$$\|a\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|.$$

(a) Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur E.

(b) Soit

$$F = \left\{ a \in E \,\middle|\, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1 \right\}.$$

L'ensemble F est-il ouvert ? fermé ? borné ?

Exercice 12 [03021] [Correction]
Soient E un espace vectoriel normé, F un sous-espace fermé de E et G un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Montrer que $F + G$ est fermé

Exercice 13 [03037] [Correction]
Caractériser dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ les matrices dont la classe de similitude est fermée.
Même question avec $\mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{C}$

Exercice 14 [02507] [Correction]
Soient $E = \mathcal{C}([0\,;1], \mathbb{R})$ normé par $\|\cdot\|_\infty$ et la partie

$$A = \left\{ f \in E \,\middle|\, f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \geq 1 \right\}.$$

(a) Montrer que A est une partie fermée.

(b) Vérifier que

$$\forall f \in A, \|f\|_\infty > 1.$$

Exercice 15 [03289] [Correction]

(a) Montrer que les parties

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, xy = 1 \right\} \quad \text{et} \quad B = \{0\} \times \mathbb{R}$$

sont fermées.

(b) Observer que $A + B$ n'est pas une partie fermée.

Exercice 16 [03290] [Correction]
Montrer que $\mathbb{Z}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$:

(a) en observant que son complémentaire est ouvert ;

(b) par la caractérisation séquentielle des parties fermées ;

(c) en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.

Exercice 17 [03306] [Correction]
Dans $E = \mathbb{R}[X]$, on considère les normes

$$N_1(P) = \sup_{t\in[0;1]} |P(t)| \text{ et } N_2(P) = \sup_{t\in[1;2]} |P(t)|.$$

L'ensemble

$$\Omega = \left\{ P \in E \,\middle|\, P(0) \neq 0 \right\}$$

est-il ouvert pour la norme N_1 ? pour la norme N_2 ?

Intérieur et adhérence

Exercice 18 [03279] [Correction]
Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. Établir

$$\mathrm{Vect}(\overline{A}) \subset \overline{\mathrm{Vect}\,A}.$$

Exercice 19 [01116] [Correction]
Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. Établir que sa frontière $\mathrm{Fr}(A)$ est une partie fermée.

Exercice 20 [01117] [Correction]
Soit F une partie fermée d'un espace vectoriel normé E. Établir

$$\mathrm{Fr}(\mathrm{Fr}(F)) = \mathrm{Fr}(F).$$

Exercice 21 [01118] [Correction]
Soient A un ouvert et B une partie d'un espace vectoriel normé E.

(a) Montrer que $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$

(b) Montrer que $A \cap B = \emptyset \implies A \cap \overline{B} = \emptyset$.

Exercice 22 [01119] [Correction]
On suppose que A est une partie convexe d'un espace vectoriel normé E.

(a) Montrer que $\overline{A}$ est convexe.

(b) La partie A° est-elle convexe ?

Exercice 23 [01120] [Correction]
Soient A et B deux parties non vides d'un espace vectoriel normé E.
Établir
$$d(\overline{A}, \overline{B}) = d(A, B)$$
(en notant $d(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y)$)

Exercice 24 [01121] [Correction]
Soient $A_1, \dots, A_n$ des parties d'un espace vectoriel normé E.

(a) Établir $\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}$.

(b) Comparer $\overline{\bigcap_{i=1}^n A_i}$ et $\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}$.

Exercice 25 [01122] [Correction]
Soient $f : E \to F$ continue bornée et $A \subset E$, A non vide. Montrer
$$\|f\|_{\infty, A} = \|f\|_{\infty, \overline{A}}.$$

Exercice 26 [03026] [Correction]
Soit A une partie d'un espace normé E.

(a) Montrer que la partie A est fermée si, et seulement si, $\operatorname{Fr} A \subset A$.

(b) Montrer que la partie A est ouverte si, et seulement si, $A \cap \operatorname{Fr} A = \emptyset$

Exercice 27 [03470] [Correction]
Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, on introduit
$$\mathcal{U} = \left\{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \;\middle|\; \forall \lambda \in \operatorname{Sp} M, |\lambda| = 1 \right\} \text{ et}$$
$$\mathcal{R} = \left\{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \;\middle|\; \exists n \in \mathbb{N}^*, M^n = I_2 \right\}.$$

(a) Comparer les ensembles $\mathcal{R}$ et $\mathcal{U}$.

(b) Montrer que $\mathcal{U}$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

(c) Montrer que $\mathcal{U}$ est inclus dans l'adhérence de $\mathcal{R}$.

(d) Qu'en déduire ?

Continuité et topologie

Exercice 28 [01126] [Correction]
Pour $p \in \{0, 1, \dots, n\}$, on note R_p l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang supérieur à p.
Montrer que R_p est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 29 [01128] [Correction]
Montrer qu'un endomorphisme u d'un espace vectoriel normé E est continu si, et seulement si, la partie $\left\{ x \in E \;\middle|\; \|u(x)\| = 1 \right\}$ est fermée.

Exercice 30 [03393] [Correction]
Soit $f : [0\,; 1] \to [0\,; 1]$ une application continue vérifiant
$$f \circ f = f.$$

(a) Montrer que l'ensemble
$$\left\{ x \in [0\,; 1] \;\middle|\; f(x) = x \right\}$$
est un intervalle fermé et non vide.

(b) Donner l'allure d'une fonction f non triviale vérifiant les conditions précédentes.

(c) On suppose de plus que f est dérivable. Montrer que f est constante ou égale à l'identité.

Exercice 31 [02774] [Correction]

(a) Chercher les fonctions $f : [0\,; 1] \to [0\,; 1]$ continues vérifiant
$$f \circ f = f.$$

(b) Même question avec les fonctions dérivables.

Exercice 32 [03285] [Correction]
Soient E un espace normé de dimension quelconque et u un endomorphisme de E vérifiant
$$\forall x \in E, \|u(x)\| \leq \|x\|.$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u^k.$$

(a) Simplifier $v_n \circ (u - \mathrm{Id})$.

(b) Montrer que
$$\operatorname{Im}(u - \mathrm{Id}) \cap \operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}) = \{0\}.$$

(c) On suppose E de dimension finie, établir
$$\operatorname{Im}(u - \mathrm{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}) = E.$$

(d) On suppose de nouveau E de dimension quelconque.
Montrer que si
$$\operatorname{Im}(u - \mathrm{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}) = E$$
alors la suite (v_n) converge simplement et l'espace $\operatorname{Im}(u - \mathrm{Id})$ est une partie fermée de E.

(e) Étudier la réciproque.

Exercice 33 [02773] [Correction]
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, O_n désigne l'ensemble des polynômes réels de degré n scindés à racines simples et F_n l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ scindés à racines simples. Ces ensemble sont-ils ouverts dans $\mathbb{R}_n[X]$?

Exercice 34 [03726] [Correction]
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant
1) $\forall [a\,;b] \subset \mathbb{R}, f([a\,;b])$ est un segment ;
2) $y \in \mathbb{R}, f^{-1}(\{y\})$ est une partie fermée.
Montrer que f est continue.

Exercice 35 [03859] [Correction]
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie.
Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}$ des projecteurs de E est une partie fermée de $\mathcal{L}(E)$.

Densité

Exercice 36 [01130] [Correction]
Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On pourra considérer, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les matrices de la forme $A - \lambda I_n$.

Exercice 37 [01131] [Correction]
Soient E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E.

(a) Montrer que $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.

(b) Montrer qu'un hyperplan est soit fermé, soit dense.

Exercice 38 [01132] [Correction]
Soient U et V deux ouverts denses d'un espace vectoriel normé E.

(a) Établir que $U \cap V$ est encore un ouvert dense de E.

(b) En déduire que la réunion de deux fermés d'intérieurs vides est aussi d'intérieur vide.

Exercice 39 [03058] [Correction]
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que
$$u_n \to +\infty, v_n \to +\infty \text{ et } u_{n+1} - u_n \to 0.$$

(a) Soient $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon$.
Montrer que pour tout $a \geq u_{n_0}$, il existe $n \geq n_0$ tel que $|u_n - a| \leq \varepsilon$.

(b) En déduire que $\{u_n - v_p \mid n, p \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

(c) Montrer que l'ensemble $\left\{\cos(\ln n) \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est dense dans $[-1\,;1]$.

Exercice 40 [03017] [Correction]
Montrer que $\left\{m - \ln n \,\middle|\, (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 41 [01133] [Correction]
Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$.

(a) Justifier l'existence de $a = \inf\left\{x \in H \,\middle|\, x > 0\right\}$.

(b) On suppose $a > 0$. Établir $a \in H$ puis $H = a\mathbb{Z}$.

(c) On suppose $a = 0$. Établir que H est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 42 [00023] [Correction]

(a) Montrer que $\left\{\cos(n) \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$ est dense dans $[-1\,;1]$.

(b) Montrer que $\left\{\cos(\ln n) \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est dense dans $[-1\,;1]$.

Exercice 43 [01135] [Correction]
Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 44 [01134] [Correction]
On note $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang.

(a) Montrer que $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est une partie dense de l'espace des suites sommables normé par

$$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

(b) $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est-il une partie dense de l'espace des suites bornées normé par

$$\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|\,?.$$

Exercice 45 [02780] [Correction]
On note E l'ensemble des fonctions réelles définies et continues sur $[0\,;+\infty[$ et dont le carré est intégrable. On admet que E est un espace vectoriel réel. On le munit de la norme

$$\|\,\|_2 \colon f \mapsto \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t}.$$

On note E_0 l'ensemble des $f \in E$ telles que f est nulle hors d'un certain segment. On note F l'ensemble des fonctions de E du type $x \mapsto P(\mathrm{e}^{-x})\mathrm{e}^{-x^2/2}$ où P parcourt $\mathbb{R}[X]$. Montrer que E_0 est dense dans E puis que F est dense dans E.

Exercice 46 [02944] [Correction]
Soit A une partie convexe et partout dense d'un espace euclidien E.
Montrer que $A = E$.

Exercice 47 [03018] [Correction]
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall a, b \in A, \frac{a+b}{2} \in A.$$

Montrer que A est dense dans l'intervalle $]\inf A\,;\sup A[$.

Exercice 48 [03020] [Correction]
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant

$$\forall (a,b) \in A^2, \sqrt{ab} \in A.$$

Montrer que $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ est dense dans $]\inf A\,;\sup A[$.

Exercice 49 [03059] [Correction]
Soient $E = \mathcal{C}([0\,;1], \mathbb{R})$ et $\varphi \in E$. On note $N_\varphi \colon E \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$N_\varphi(f) = \|f\varphi\|_\infty.$$

Montrer que N_φ est une norme sur E si, et seulement si, $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est dense dans $[0\,;1]$.

Exercice 50 [03402] [Correction]
Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose

$$(u_n) \text{ strictement croissante, } u_n \to +\infty \text{ et } \frac{u_{n+1}}{u_n} \to 1.$$

Montrer que l'ensemble

$$A = \left\{ \frac{u_m}{u_n} \;\middle|\; m > n \right\}$$

est une partie dense dans l'intervalle $[1\,;+\infty[$

Exercice 51 [03649] [Correction]
Soient A et B deux parties denses d'un espace normé E.
On suppose la partie A ouverte, montrer que $A \cap B$ est une partie dense.

Continuité et densité

Exercice 52 [01136] [Correction]
Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Déterminer f.

Exercice 53 [01139] [Correction]
Soit $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{1}{2}\big(f(x)+f(y)\big).$$

(a) Montrer que $\mathcal{D}=\left\{p/2^n \,\middle|\, p\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
(b) Montrer que si f s'annule en 0 et en 1 alors $f=0$.
(c) Conclure que f est une fonction affine.

Exercice 54 [01137] [Correction]
Montrer que pour tout $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\chi_{AB}=\chi_{BA}$.

Exercice 55 [01138] [Correction]
Soit $n\geq 2$. Calculer $\det\big(\mathrm{Com}(A)\big)$ pour $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 56 [03128] [Correction]
Soit $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geq 2$.
(a) Soient $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
Exprimer la comatrice de $P^{-1}AP$ en fonction de P, P^{-1} et de la comatrice de A.
(b) En déduire que les comatrices de deux matrices semblables sont elle-même semblables.

Exercice 57 [00750] [Correction]
Pour $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\widetilde{A}$ la transposée de la comatrice de A.
(a) Calculer $\det\widetilde{A}$.
(b) Étudier le rang de $\widetilde{A}$.
(c) Montrer que si A et B sont semblables alors $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ le sont aussi.
(d) Calculer $\widetilde{\widetilde{A}}$.

Exercice 58 [03275] [Correction]
Montrer

$$\forall A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{Com}(AB)=\mathrm{Com}(A)\,\mathrm{Com}(B).$$

Exercice 59 [04170] [Correction]
Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_{n+1}-u_n\to 0$ et $u_n\to+\infty$. Soit (v_p) une suite réelle telle que $v_p\to+\infty$.
(a) On fixe deux réels a et b tels que $a<b$. Pour p et q dans $\mathbb{N}$, on pose $(w_n)=(u_{n+p}-v_q)$. Montrer que l'on peut choisir p et q de telle sorte que l'on ait $w_0\leq a$ et, pour $n\in\mathbb{N}$, $|w_{n+1}-w_n|\leq(b-a)/2$.
(b) Montrer que $\left\{u_n-v_p \,\middle|\, (n,p)\in\mathbb{N}^2\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
(c) Déterminer l'adhérence de $\left\{\sin(u_n)\,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$.
(d) Déterminer l'adhérence de $\left\{u_n-\lfloor u_n\rfloor \,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$.
(e) Quel est l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n-\lfloor u_n\rfloor)$?

Approximations uniformes

Exercice 60 [01142] [Correction]
Soit $f\colon [a\,;b]\to\mathbb{R}$ continue telle que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=0$. Montrer qu'il existe une suite (P_n) de polynômes telle que

$$\int_a^b P_n(t)\,\mathrm{d}t=0 \text{ et } \sup_{t\in[a;b]}\left|f(t)-P_n(t)\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Exercice 61 [01143] [Correction]
Soit $f\colon [a\,;b]\to\mathbb{R}$ continue telle que $f\geq 0$. Montrer qu'il existe une suite (P_n) de polynômes telle que $P_n\geq 0$ sur $[a\,;b]$ et $\sup_{t\in[a;b]}\left|f(t)-P_n(t)\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 62 [01144] [Correction]
Soit $f\colon [a\,;b]\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer qu'il existe une suite (P_n) de polynômes telle que

$$N_\infty(f-P_n)\to 0 \text{ et } N_\infty(f'-P_n')\to 0.$$

Exercice 63 [01145] [Correction]
(Théorème de Weierstrass : par les polynômes de Bernstein) Pour $n\in\mathbb{N}$ et $k\in\{0,\dots,n\}$, on pose

$$B_{n,k}(x)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

(a) Calculer
$$\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x), \sum_{k=0}^{n} kB_{n,k}(x) \text{ et } \sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k}(x).$$

(b) Soient $\alpha > 0$ et $x \in [0\,;1]$. On forme
$$A = \left\{k \in [\![0\,;n]\!] \mid |k/n - x| \geq \alpha\right\} \text{ et } B = \left\{k \in [\![0\,;n]\!] \mid |k/n - x| < \alpha\right\}.$$
Montrer que
$$\sum_{k\in A} B_{n,k}(x) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}.$$

(c) Soit $f\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ continue. On pose
$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x).$$
Montrer que (f_n) converge uniformément vers f sur $[0\,;1]$.

Exercice 64 [01146] [Correction]

(Théorème de Weierstrass : par convolution) n désigne un entier naturel.
On pose
$$a_n = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \,\mathrm{d}t$$
et on considère la fonction $\varphi_n\colon [-1\,;1] \to \mathbb{R}$ définie par
$$\varphi_n(x) = \frac{1}{a_n}(1-x^2)^n.$$

(a) Calculer $\int_0^1 t(1-t^2)^n \,\mathrm{d}t$. En déduire que
$$a_n = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \,\mathrm{d}t \geq \frac{1}{n+1}.$$

(b) Soit $\alpha \in]0\,;1]$. Montrer que (φ_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[\alpha\,;1]$.

(c) Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ nulle en dehors de $[-1/2\,;1/2]$.
Montrer que f est uniformément continue.
On pose
$$f_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x-t)\varphi_n(t) \,\mathrm{d}t$$
pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(d) Montrer que f_n est une fonction polynomiale sur $[-1/2\,;1/2]$

(e) Montrer que
$$f(x) - f_n(x) = \int_{-1}^{1} (f(x) - f(x-t))\varphi_n(t) \,\mathrm{d}t.$$

(f) En déduire que f_n converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

(g) Soit f une fonction réelle continue nulle en dehors de $[-a\,;a]$.
Montrer que f est limite uniforme d'une suite de polynômes.

(h) Soit f une fonction réelle continue sur $[a\,;b]$.
Montrer que f est limite uniforme d'une suite de polynômes.

Exercice 65 [02828] [Correction]

Soit $f \in \mathcal{C}([a\,;b], \mathbb{R})$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\int_a^b x^n f(x) \,\mathrm{d}x = 0.$$

(a) Montrer que la fonction f est nulle.

(b) Calculer
$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-(1-\mathrm{i})x} \,\mathrm{d}x.$$

(c) En déduire qu'il existe f dans $\mathcal{C}([0\,;+\infty[, \mathbb{R})$ non nulle, telle que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, on ait
$$\int_0^{+\infty} x^n f(x) \,\mathrm{d}x = 0.$$

Exercice 66 [02601] [Correction]

Soit $f\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. On désire établir
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f(x)\left|\sin(nx)\right| \,\mathrm{d}x\right) = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x.$$

(a) Vérifier le résultat pour une fonction f constante.

(b) Observer le résultat pour une fonction f en escalier.

(c) Étendre au cas où f est une fonction continue par morceaux.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Soient F un fermé et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$O_n = \bigcup_{a \in F} B(a, 1/n)$$

O_n est un ouvert (car réunion d'ouverts) contenant F. Le fermé F est donc inclus dans l'intersection des O_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
Inversement si x appartient à cette intersection, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n \in F$ tel que $x \in B(a_n, 1/n)$. La suite (a_n) converge alors vers x et donc $x \in F$ car F est fermé.
Finalement F est l'intersection des O_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2 : [énoncé]

(a) Soit $x \in p_1(O)$, il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $a = (x, y) \in O$. Comme O est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_\infty(a, \varepsilon) \subset O$ et alors $]x - \varepsilon\,; x + \varepsilon[\subset p_1(O)$. Ainsi $p_1(O)$ et de même $p_2(O)$ est ouvert.

(b) Soit $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ telle que $(x_n, y_n) \to (x, y)$. Comme $x_n y_n = 1$, à la limite $xy = 1$.
Par la caractérisation séquentielle des fermés, H est fermé. $p_1(H) = \mathbb{R}^*$, $p_2(H) = \mathbb{R}^*$ ne sont pas fermés dans $\mathbb{R}$.

(c) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (p_1(F))^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to x$. Pour $n \in \mathbb{N}$, il existe y_n tel que $(x_n, y_n) \in F$.
La suite $((x_n, y_n))$ est alors une suite bornée dont on peut extraire une suite convergente : $((x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}))$.
Notons $y = \lim y_{\varphi(n)}$. Comme F est fermé, $(x, y) = \lim(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) \in F$ puis $x = p_1((x, y)) \in p_1(F)$.

Exercice 3 : [énoncé]
$0_E \in F$ donc il existe $\alpha > 0$ tel que $B(0_E, \alpha) \subset F$.
Pour tout $x \in E$, on peut écrire

$$x = \lambda y$$

avec $y \in B(0_E, \alpha)$ et λ bien choisis
On a alors $y \in F$ puis $x \in F$ car F est un sous-espace vectoriel.
Ainsi $F = E$.

Exercice 4 : [énoncé]
Rappelons

$$d(x, F) = \inf\left\{\|x - y\| \mid y \in F\right\}$$

$(\Longleftarrow)$ Si $x \in F$ alors $0 \in \left\{\|x - y\| \mid y \in F\right\}$ et donc $d(x, F) = 0$
$(\Longrightarrow)$ Si $d(x, F) = 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $y_n \in F$ vérifiant

$$\|x - y_n\| \le \frac{1}{n+1}.$$

En faisant varier n, cela détermine $(y_n) \in F^{\mathbb{N}}$ telle que $y_n \to x$.
Or F est une partie fermée, elle contient les limites de ses suites convergentes et par conséquent $x \in F$.

Exercice 5 : [énoncé]

(a) Rappelons

$$d(x, F) = \inf\left\{\|x - y\| \mid y \in F\right\}$$

$(\Longleftarrow)$ Si $x \in F$ alors $0 \in \left\{\|x - y\| \mid y \in F\right\}$ et donc $d(x, F) = 0$
$(\Longrightarrow)$ Si $d(x, F) = 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $y_n \in F$ vérifiant

$$\|x - y_n\| \le \frac{1}{n+1}.$$

En faisant varier n, cela déterminer $(y_n) \in F^{\mathbb{N}}$ telle que $y_n \to x$.
Or F est une partie fermée, elle contient les limites de ses suites convergentes et par conséquent $x \in F$.

(b) Soient

$$U = \bigcup_{x \in F} B\left(x, \frac{1}{2} d(x, G)\right) \text{ et } V = \bigcup_{x \in G} B\left(x, \frac{1}{2} d(x, F)\right).$$

Les parties U et V sont ouvertes car réunion de boules ouvertes et il est clair que U et V contiennent respectivement F et G.
S'il existe $y \in U \cap V$ alors il existe $a \in F$ et $b \in G$ tels que

$$d(a, y) < \frac{1}{2} d(a, G) \text{ et } d(b, y) < \frac{1}{2} d(b, F).$$

Puisque

$$d(a, G), d(b, F) \le d(a, b)$$

on a donc

$$d(a, b) \le d(a, y) + d(y, b) < d(a, b).$$

C'est absurde et on peut conclure

$$U \cap V = \emptyset.$$

Exercice 6 : [énoncé]
Les ensembles
$$U = \bigcup_{a\in A} B(a, d/2) \text{ et } V = \bigcup_{b\in B} B(b, d/2)$$
avec $d = d(A, B)$ sont solutions.
En effet U et V sont des ouverts (par réunion d'ouverts) contenant A et B.
U et V sont disjoints car
$$U \cap V \neq \emptyset \implies \exists (a, b) \in A \times B, B(a, d/2) \cap B(b, d/2) \neq \emptyset \implies d(A, B) < d.$$

Exercice 7 : [énoncé]
A est fermé car si $u^p = (u_n^p)$ est une suite d'éléments de A convergeant vers une suite $u = (u_n)$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $u_n^p \leq u_{n+1}^p$ qui donne à la limite $u_n \leq u_{n+1}$ et donc $u \in A$.
B est fermé car si $u^p = (u_n^p)$ est une suite d'éléments de B convergeant vers une suite $u = (u_n)$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\left\|u - u^p\right\|_\infty \leq \varepsilon/2$ et puisque $u_n^p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geq N, \left|u_n^p\right| \leq \varepsilon/2$$
et donc
$$|u_n| \leq \left|u_n - u_n^p\right| + \left|u_n^p\right| \leq \varepsilon.$$
Ainsi $u \to 0$ et donc $u \in B$.
C est fermé. En effet si $u^p = (u_n^p)$ est une suite d'éléments de C convergeant vers une suite $u = (u_n)$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ alors en notant ℓ^p la limite de u^p, la suite (ℓ^p) est une suite de Cauchy puisque $\left|\ell^p - \ell^q\right| \leq \left\|u^p - u^q\right\|_\infty$. Posons ℓ la limite de la suite (ℓ^p) et considérons $v^p = u^p - \ell^p$. $v^p \in B$ et $v^p \to u - \ell$ donc $u - \ell \in B$ et $u \in C$.
D est fermé car si $u^p = (u_n^p)$ est une suite d'éléments de D convergeant vers une suite $u = (u_n)$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\left\|u - u^p\right\|_\infty \leq \varepsilon/2$ et puisque 0 est valeur d'adhérence de u^p, il existe une infinité de n tels que $\left|u_n^p\right| \leq \varepsilon/2$ et donc tels que
$$|u_n| \leq \left|u_n - u_n^p\right| + \left|u_n^p\right| \leq \varepsilon.$$
Ainsi 0 est valeur d'adhérence de u et donc $u \in D$.
E n'est pas fermé. Notons δ^p, la suite déterminée par $\delta_n^p = 1$ si $p \mid n$ et 0 sinon. La suite δ^p est périodique et toute combinaison linéaire de suites δ^p l'est encore.
Posons alors
$$u^p = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^k}\delta^k$$
qui est élément de E. La suite u^p converge car
$$\left\|u^{p+q} - u^p\right\|_\infty \leq \sum_{k=p+1}^{p+q} \frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2^p} \to 0$$
et la limite u de cette suite n'est pas périodique car
$$u_0 = \lim_{p\to+\infty} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^k} = 1$$
et que $u_n < 1$ pour tout n puisque pour que $u_n = 1$ il faut $k \mid n$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 8 : [énoncé]

(a) Les éléments de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ sont bornés donc $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \subset \mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.
L'appartenance de l'élément nul et la stabilité par combinaison linéaire sont immédiates.

(b) Si $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est ouvert alors puisque $0 \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ il existe $\alpha > 0$ tel que $B_\infty(0, \alpha) \subset \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$.
Or la suite constante égale à $\alpha/2$ appartient à $B_\infty(0, \alpha)$ et n'est pas nulle à partir d'un certain rang donc $B_\infty(0, \alpha) \not\subset \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ et donc $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ n'est pas ouvert.

(c) Pour $N \in \mathbb{N}$, posons u^N définie par $u_n^N = \frac{1}{n+1}$ si $n \leq N$ et $u_n^N = 0$ sinon. $(u^N) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ et $u^N \to u$ avec u donné par $u_n = \frac{1}{n+1}$. En effet
$$\left\|u^N - u\right\|_\infty = \frac{1}{N+2} \to 0.$$
Mais $u \notin \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ donc $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ n'est pas fermé.

Exercice 9 : [énoncé]
Soit $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique $y \in A$ tel que $|x - y| = d(x, A)$. Or $d(x, A) = 0$ donc $x = y \in A$. Ainsi A est fermé.
Par l'absurde supposons que A ne soit pas un intervalle. Il existe $a < c < b$ tel que $a, b \in A$ et $c \notin A$.
Posons $\alpha = \sup\{x \in A \mid x \leq c\}$ et $\beta = \inf\{x \in A \mid x \geq c\}$. On a $\alpha, \beta \in A$, $\alpha < c < \beta$ et $]\alpha\,;\beta[\subset C_{\mathbb{R}}A$.
Posons alors $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$. On a $d(\gamma, A) = \frac{\beta-\alpha}{2} = |\gamma - \alpha| = |\gamma - \beta|$ ce qui contredit l'hypothèse d'unicité. Absurde.

Exercice 10 : [énoncé]

(a) Notons C l'espace des suites convergentes de $\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})$.
Soit (u^n) une suite convergente d'éléments de C de limite u^∞.
Pour chaque n, posons $\ell^n = \lim u^n = \lim_{p\to+\infty} u_p^n$.
Par le théorème de la double limite appliquée à la suite des fonctions u^n, on peut affirmer que la suite (ℓ^n) converge et que la suite u^∞ converge vers la limite de (ℓ^n). En particulier $u^\infty \in C$.

(b) Notons A l'espace des suites dont le terme général est terme général d'une série absolument convergente.
Soit (u^n) la suite définie par

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall p\in\mathbb{N}, u_p^n = \frac{1}{(p+1)^{1+1/n}}.$$

La suite (u^n) est une suite d'éléments de A et une étude en norme $\|\cdot\|_\infty$ permet d'établir que $u^n \to u^\infty$ avec $u_p^\infty = \frac{1}{p+1}$. La suite u^∞ n'étant pas élément de A, la partie A n'est pas fermée.

Exercice 11 : [énoncé]

(a) Par définition de l'ensemble E, l'application $\|\cdot\|\colon E\to\mathbb{R}_+$ est bien définie.
Soient $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ éléments de E et $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$\|a+b\| = \sum_{n=0}^{+\infty}|a_n+b_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty}\bigl(|a_n|+|b_n|\bigr) = \|a\|+\|b\|$$

avec convergence des séries écrites, et

$$\|\lambda.a\| = \sum_{n=0}^{+\infty}|\lambda a_n| = \sum_{n=0}^{+\infty}|\lambda||a_n| = |\lambda|\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n| = |\lambda|\|a\|.$$

Enfin, si $\|a\|=0$ alors

$$\forall n\in\mathbb{N}, |a_n| \leq \|a\| = 0$$

donne $(a_n)_{n\geq 0} = (0)_{n\geq 0}$

(b) Considérons la forme linéaire

$$\varphi\colon (a_n)_{n\geq 0} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

On vérifie

$$\forall a=(a_n)_{n\geq 0}\in E, \bigl|\varphi(a)\bigr| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty}|a_n| = \|a\|.$$

La forme linéaire φ est donc continue.
Puisque $F = \varphi^{-1}(\{1\})$ avec $\{1\}$, la partie F est fermée en tant qu'image réciproque d'une partie fermée par une application continue..
Posons $e = (1,0,0,\dots)$ et un élément de F et

$$\forall \alpha>0, e+\alpha e\notin F \text{ et } \bigl\|e-(e+\alpha e)\bigr\| = \alpha.$$

On en déduit que F n'est pas un voisinage de son élément e et par conséquent la partie F n'est pas ouverte.
Posons $\alpha^p = e + p.(1,-1,0,0,\dots)$.

$$\forall p\in\mathbb{N}, \alpha^p\in F \text{ et } \bigl\|\alpha^p\bigr\| \xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty.$$

La partie F n'est donc pas bornée.

Exercice 12 : [énoncé]

Pour obtenir ce résultat, il suffit de savoir montrer $F+\mathrm{Vect}(u)$ fermé pour tout $u\notin F$.
Soit (x_n) une suite convergente d'éléments de $F+\mathrm{Vect}(u)$ de limite x.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on peut écrire $x_n = y_n + \lambda_n u$ avec $y_n\in F$ et $\lambda_n\in\mathbb{K}$.
Montrons en raisonnant par l'absurde que la suite (λ_n) est bornée.
Si la suite (λ_n) n'est pas bornée, quitte à considérer une suite extraite, on peut supposer $|\lambda_n|\to+\infty$.
Posons alors $z_n = \frac{1}{\lambda_n}x_n = \frac{1}{\lambda_n}y_n + u$.
Puisque $\|x_n\|\to\|x\|$ et $|\lambda_n|\to+\infty$, on a $\|z_n\|\to 0$ et donc $\frac{1}{\lambda_n}y_n\to -u$.
Or la suite de terme général $\frac{1}{\lambda_n}y_n$ est une suite d'éléments de l'espace fermé F, donc $-u\in F$ ce qui exclu.
Ainsi la suite (λ_n) est bornée et on peut en extraire une suite convergente $(\lambda_{\varphi(n)})$ de limite $\lambda\in\mathbb{K}$.
Par opérations, la suite $(y_{\varphi(n)})$ est alors convergente.
En notant y sa limite, on a $y\in F$ car l'espace F est fermé.
En passant la relation $x_n = y_n+\lambda_n u$ à la limite on obtient
$x = y+\lambda u\in F+\mathrm{Vect}(u)$.
Ainsi l'espace $F+\mathrm{Vect}(u)$ est fermé.

Exercice 13 : [énoncé]
Cas $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable.
Soit (A_p) une suite convergente de matrices semblables à A.
Notons A_∞ la limite de (A_p).
Si P est un polynôme annulateur de A, P est annulateur des A_p et donc P annule A_∞. Puisque A est supposée diagonalisable, il existe un polynôme scindé simple annulant A et donc A_∞ et par suite A_∞ est diagonalisable.
De plus $\chi_A = \chi_{A_p}$ donc à la limite $\chi_A = \chi_{A_\infty}$.
On en déduit que A et A_∞ ont les mêmes valeurs propres et que celles-ci ont mêmes multiplicités. On en conclut que A et A_∞ sont semblables.
Ainsi la classe de similitude de A est fermée.
Cas $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non diagonalisable.
À titre d'exemple, considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Pour $P_p = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on obtient

$$P_p^{-1}AP_p = \begin{pmatrix} \lambda & 1/p \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \to \lambda I_2$$

qui n'est pas semblable à A.
De façon plus générale, si la matrice A n'est pas diagonalisable, il existe une valeur propre λ pour laquelle

$$\operatorname{Ker}(A - \lambda I_2)^2 \neq \operatorname{Ker}(A - \lambda I_2).$$

Pour $X_2 \in \operatorname{Ker}(A - \lambda I_2)^2 \setminus \operatorname{Ker}(A - \lambda I_2)$ et $X_1 = (A - \lambda I_2)X_2$, la famille (X_1, X_2) vérifie $AX_1 = \lambda X_1$ et $AX_2 = \lambda X_2 + X_1$. En complétant la famille libre (X_1, X_2) en une base, on obtient que la matrice A est semblable à

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & (*) \\ 0 & \lambda & (*) \\ (0) & (0) & B \end{pmatrix}.$$

Pour $P_p = \operatorname{diag}(p, 1, \dots, 1)$, on obtient

$$P_p^{-1}TP_p = \begin{pmatrix} \lambda & 1/p & (*/p) \\ 0 & \lambda & (*) \\ (0) & (0) & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \lambda & 0 & (0) \\ 0 & \lambda & (*) \\ (0) & (0) & B \end{pmatrix} = A_\infty.$$

Or cette matrice n'est pas semblable à T ni à A car $\operatorname{rg}(A_\infty - \lambda I_n) \neq \operatorname{rg}(T - \lambda I_n)$.
Ainsi, il existe une suite de matrices semblables à A qui converge vers une matrice qui n'est pas semblable à A, la classe de similitude de A n'est pas fermée.
Cas $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
Si A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ alors toute limite A_∞ d'une suite de la classe de similitude de A est semblable à A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = A_\infty$. On a alors $AP = PA_\infty$. En introduisant les parties réelles et imaginaires de P, on peut écrire $P = Q + \mathrm{i}R$ avec $Q, R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
L'identité $AP = PA_\infty$ avec A et A_∞ réelles entraîne $AQ = QA_\infty$ et $AR = RA_\infty$.
Puisque la fonction polynôme $t \mapsto \det(Q + tR)$ n'est pas nulle (car non nulle en i), il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $P' = Q + tR \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et pour cette matrice $AP' = P'A_\infty$.
Ainsi les matrices A et A_∞ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Si A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{C}$.
Il existe une valeur propre complexe λ pour laquelle
$\operatorname{Ker}(A - \lambda I_2)^2 \neq \operatorname{Ker}(A - \lambda I_2)$.
Pour $X_2 \in \operatorname{Ker}(A - \lambda I_2)^2 \setminus \operatorname{Ker}(A - \lambda I_2)$ et $X_1 = (A - \lambda I_2)X_2$, la famille (X_1, X_2) vérifie $AX_1 = \lambda X_1$ et $AX_2 = \lambda X_2 + X_1$.
Si $\lambda \in \mathbb{R}$, il suffit de reprendre la démonstration qui précède.
Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on peut écrire $\lambda = a + ib$ avec $b \in \mathbb{R}^*$.
Posons $X_3 = \overline{X}_1$ et $X_4 = \overline{X}_2$.
La famille (X_1, X_2, X_3, X_4) est libre car $\lambda \neq \overline{\lambda}$.
Introduisons ensuite $Y_1 = \operatorname{Re}(X_1)$, $Y_2 = \operatorname{Re}(X_2)$, $Y_3 = \operatorname{Im}(X_1)$ et $Y_4 = \operatorname{Im}(X_2)$.
Puisque $\operatorname{Vect}_{\mathbb{C}}(Y_1, \dots, Y_4) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{C}}(X_1, \dots, X_4)$, la famille $(Y_1, \dots, Y_4)$ est libre et peut donc être complétée en une base.
On vérifie par le calcul $AY_1 = aY_1 - bY_3$, $AY_2 = aY_2 - bY_4 + Y_1$, $AY_3 = aY_3 + bY_1$ et $AY_4 = bY_2 + aY_4 + Y_3$. et on obtient que la matrice A est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la matrice

$$\begin{pmatrix} T & * \\ O & B \end{pmatrix}$$

avec

$$T = \begin{pmatrix} a & 1 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ -b & 0 & a & 1 \\ 0 & -b & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Pour $P_p = \operatorname{diag}(p, 1, p, 1, \dots 1)$, on obtient

$$P_p^{-1}TP_p \to \begin{pmatrix} T_\infty & *' \\ O & B \end{pmatrix} = A_\infty$$

avec

$$T_\infty = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ -b & 0 & a & 0 \\ 0 & -b & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Or dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la matrice A_∞ est semblable est à $\operatorname{diag}(\lambda, \lambda, \overline{\lambda}, \overline{\lambda}, B)$ qui n'est pas semblable à A pour des raisons de dimensions analogues à ce qui a déjà été vu.
Les matrices réelles A et A_∞ ne sont pas semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ni *a fortiori* dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On en déduit que la classe de similitude de A n'est pas fermée

Exercice 14 : [énoncé]

(a) Soient (f_n) une suite convergente d'éléments de A et $f_\infty \in E$ sa limite.
Puisque la convergence de la suite (f_n) a lieu pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, cette convergence correspond à la convergence uniforme. En particulier, il y a convergence simple et
$$f_n(0) \to f_\infty(0).$$
On en déduit $f_\infty(0) = 0$.
Puisqu'il y a convergence uniforme de cette suite de fonctions continues, on a aussi
$$\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t \to \int_0^1 f_\infty(t)\,\mathrm{d}t$$
et donc
$$\int_0^1 f_\infty(t)\,\mathrm{d}t \geq 1.$$
Ainsi $f_\infty \in A$ et la partie A est donc fermée en vertu de la caractérisation séquentielle des parties fermées.

(b) Par l'absurde, supposons qu'il existe $f \in A$ vérifiant $\|f\|_\infty \leq 1$. Puisque
$$\left|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^1 \left|f(t)\right|\mathrm{d}t \leq \int_0^1 \|f\|_\infty\,\mathrm{d}t \leq 1$$
on peut affirmer que
$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 1$$
et donc
$$\int_0^1 \bigl(1 - f(t)\bigr)\,\mathrm{d}t = 0.$$
Or la fonction $t \mapsto 1 - f(t)$ est continue et positive, c'est donc la fonction nulle.
Par suite f est la fonction constante égale à 1, or $f(0) = 0$, c'est absurde.

Exercice 15 : [énoncé]

(a) Soit (u_n) une suite convergente d'éléments de A de limite $u_\infty = (x_\infty, y_\infty)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire $u_n = (x_n, y_n)$ avec $x_n y_n = 1$. À la limite on obtient $x_\infty y_\infty = 1$ et donc $u_\infty = 1$.
En vertu de la caractérisation séquentielle des parties fermées, on peut affirmer que A est fermée.
La partie B, quant à elle, est fermée car produit cartésien de deux fermées.

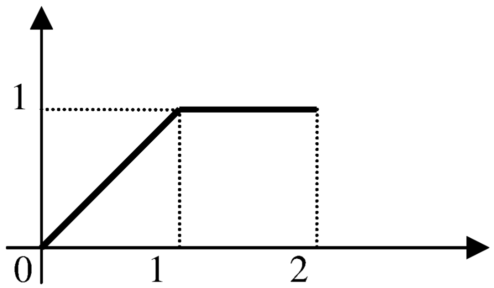
(b) Posons
$$u_n = (1/n, 0) = (1/n, n) + (0, -n) \in A + B.$$
Quand $n \to +\infty$, $u_n \to (0,0)$.
Or $(0,0) \notin A + B$ car le premier élément d'un couple appartenant à $A + B$ ne peut pas être nul.

Exercice 16 : [énoncé]

(a) On a
$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left]n\,;n+1\right[.$$
Puisque $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ est une réunion d'ouverts, c'est un ouvert.

(b) Soit (x_n) une suite convergente d'entiers de limite ℓ.
Pour $\varepsilon = 1/2$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geq N, |x_n - \ell| < 1/2$$
et alors
$$\forall m, n \geq N, |x_m - x_n| < 1.$$
Puisque les termes de la suite (x_n) sont entiers, on en déduit
$$\forall m, n \geq N, x_m = x_n.$$
La suite (x_n) est alors constante à partir du rang N et sa limite est donc un nombre entier.

(c) Considérons $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(\pi x)$.
La fonction f est continue et
$$\mathbb{Z} = f^{-1}(\{0\})$$
avec $\{0\}$ partie fermée de $\mathbb{R}$.



Exercice 17 : [énoncé]
Posons $\varphi\colon E \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi(P) = P(0)$.
L'application φ est linéaire et puisque $\left|\varphi(P)\right| \leq N_1(P)$, cette application est continue. On en déduit que $\Omega = \varphi^{-1}\left(\mathbb{R}^*\right)$ est un ouvert relatif à E *i.e.* un ouvert de E pour la norme N_1.
Pour la norme N_2, montrons que la partie Ω n'est pas ouverte en observant qu'elle n'est pas voisinage de son point $P = 1$. Pour cela considérons la fonction continue $f\colon [0\,;2] \to \mathbb{R}$ donnée par le graphe suivant : Par le théorème d'approximation de Weierstrass, il existe une suite (P_n) de polynômes vérifiant

$$\sup_{t\in[0;2]} \left|P_n(t) - f(t)\right| \to 0$$

et en particulier

$$P_n(0) \to 0 \text{ et } N_2(P_n - P) \to 0.$$

Considérons alors la suite de polynômes (Q_n) avec

$$Q_n = P_n - P_n(0).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q_n(0) = 0$ donc $Q_n \notin \Omega$ et

$$N_2(Q_n) \leq N_2(P_n - P) + \left|P_n(0)\right| \to 0$$

donc

$$Q_n \xrightarrow{N_2} P.$$

Puisque la partie Ω n'est pas voisinage de chacun de ses points, elle n'est pas ouverte pour la norme N_2.

Exercice 18 : [énoncé]
Puisque $A \subset \operatorname{Vect} A$, on a $\overline{A} \subset \overline{\operatorname{Vect} A}$.
Puisque $\operatorname{Vect} A$ est un sous-espace vectoriel, on montrer aisément que $\overline{\operatorname{Vect} A}$ l'est aussi. Puisqu'il contient $\overline{A}$, on obtient

$$\operatorname{Vect}(\overline{A}) \subset \overline{\operatorname{Vect} A}.$$

Exercice 19 : [énoncé]
On a

$$\operatorname{Fr}(A) = \overline{A} \setminus A^\circ = \overline{A} \cap \complement_E A^\circ = \overline{A} \cap \overline{\complement_E A}.$$

On en déduit que $\operatorname{Fr}(A)$ est fermée par intersection de parties fermées

Exercice 20 : [énoncé]
On sait

$$\operatorname{Fr}(F) = \overline{F} \cap \overline{\complement_E F}$$

donc

$$\operatorname{Fr}(\operatorname{Fr}(F)) = \operatorname{Fr}(F) \cap \overline{\complement_E \operatorname{Fr}(F)}.$$

Or $\operatorname{Fr}(F) \subset \overline{F} = F$ donc $\complement_E F \subset \complement_E \operatorname{Fr}(F)$ puis $\overline{\complement_E F} \subset \overline{\complement_E \operatorname{Fr} F}$.
De plus $\operatorname{Fr} F \subset \overline{\complement_E F}$ donc $\operatorname{Fr} F \subset \overline{\complement_E \operatorname{Fr} F}$ puis

$$\operatorname{Fr}(\operatorname{Fr}(F)) = \operatorname{Fr}(F).$$

Exercice 21 : [énoncé]

(a) Soit $x \in A \cap \overline{B}$. Il existe une suite $(b_n) \in B^{\mathbb{N}}$ telle que $b_n \to x$. Or $x \in A$ et A est ouvert donc à partir d'un certain rang $b_n \in A$. Ainsi pour n assez grand $b_n \in A \cap B$ et puisque $b_n \to x$, $x \in \overline{A \cap B}$.

(b) Si $A \cap B = \emptyset$ alors $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B} = \overline{\emptyset} = \emptyset$.

Exercice 22 : [énoncé]

(a) Soient $a, b \in \overline{A}$. Il existe $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ et $(b_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telles que $a_n \to a$ et $b_n \to b$. Pour tout $\lambda \in [0\,;1]$,

$$\lambda a + (1-\lambda)b = \lim_{n\to+\infty} \left(\lambda a_n + (1-\lambda)b_n\right)$$

avec $\lambda a_n + (1-\lambda)b_n \in [a_n\,;b_n] \subset A$ donc $\lambda a + (1-\lambda)b \in \overline{A}$.

(b) Soient $a, b \in A^\circ$. Il existe $\alpha_a, \alpha_b > 0$ tel que $B(a, \alpha_a), B(b, \alpha_b) \subset A$. Posons $\alpha = \min(\alpha_a, \alpha_b) > 0$.
Pour tout $\lambda \in [0\,;1]$ et tout $x \in B(\lambda a + (1-\lambda)b, \alpha)$ on a $x = (\lambda a + (1-\lambda)b) + \alpha u$ avec $u \in B(0,1)$.
$a' = a + \alpha u \in B(a, \alpha) \subset A$ et $b' = b + \alpha u \in B(b, \alpha) \subset A$ donc $[a'\,;b'] \subset A$ puisque A est convexe donc $\lambda a' + (1-\lambda)b' = x \in A$. Ainsi $B(\lambda a + (1-\lambda)b, \alpha) \subset A$ et donc $\lambda a + (1-\lambda)b \in A^\circ$. Finalement A° est convexe.

Exercice 23 : [énoncé]
$A \subset \overline{A}$, $B \subset \overline{B}$ donc $d(\overline{A}, \overline{B}) \leq d(A, B)$.
Pour tout $x \in \overline{A}$ et $y \in \overline{B}$, il existe $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ et $(b_n) \in B^{\mathbb{N}}$ telles que $a_n \to x$ et $b_n \to y$.
On a alors $d(x, y) = \lim_{n\to+\infty} d(a_n, b_n)$ or $d(a_n, b_n) \geq d(A, B)$ donc à la limite $d(x, y) \geq d(A, B)$ puis $d(\overline{A}, \overline{B}) \geq d(A, B)$ et finalement l'égalité.

Exercice 24 : [énoncé]

(a) $\bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}$ est un fermé qui contient $\bigcup_{i=1}^n A_i$ donc $\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} \subset \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}$.
Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $A_j \subset \overline{\bigcup_{i=1}^n A_i}$ et $\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i}$ est fermé donc $\overline{A_j} \subset \overline{\bigcup_{i=1}^n A_i}$ puis $\bigcup_{i=1}^n \overline{A_i} \subset \overline{\bigcup_{i=1}^n A_i}$.

(b) $\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}$ est un fermé qui contient $\bigcap_{i=1}^n A_i$ donc $\overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} \subset \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}$.
Il ne peut y avoir égalité : pour $A_1 = \mathbb{Q}$, $A_2 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ on a $\overline{A_1 \cap A_2} = \emptyset$ et $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} = \mathbb{R}$.

Exercice 25 : [énoncé]
Pour tout $x \in A$, $x \in \overline{A}$ et donc $\left|f(x)\right| \leq \|f\|_{\infty, \overline{A}}$. Ainsi

$$\|f\|_{\infty, A} \leq \|f\|_{\infty, \overline{A}}.$$

Soit $x \in \overline{A}$, il existe $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \to x$ et alors $f(u_n) \to f(x)$ par continuité de f. Or $\left|f(u_n)\right| \leq \|f\|_{\infty, A}$ donc à la limite $\left|f(x)\right| \leq \|f\|_{\infty, A}$ puis

$$\|f\|_{\infty, \overline{A}} \leq \|f\|_{\infty, A}.$$

Exercice 26 : [énoncé]

(a) Si A est fermée alors $\overline{A} = A$ donc $\operatorname{Fr} A = A \setminus A^\circ \subset A$.
Inversement, si $\operatorname{Fr}(A) = \overline{A} \setminus A^\circ \subset A$ alors puisque $A^\circ \subset A$ on a $\overline{A} \subset A$.
En effet, pour $x \in \overline{A}$, si $x \in A^\circ$ alors $x \in A$ et sinon $x \in \operatorname{Fr} A$ et donc $x \in A$.
Puisque de plus $A \subset \overline{A}$, on en déduit $A = \overline{A}$ et donc $\overline{A}$ est fermé.

(b) A est un ouvert si, et seulement si, $C_E A$ est un fermé *i.e.* si, et seulement si, $\operatorname{Fr}(C_E A) \subset C_E A$.
Or $\operatorname{Fr}(C_E A) = \operatorname{Fr} A$ donc A est un ouvert si, et seulement si, $\operatorname{Fr} A \cap A = \emptyset$.

Exercice 27 : [énoncé]

(a) Une matrice de $\mathcal{R}$ est annulée par un polynôme de la forme $X^n - 1$ dont les racines sont de module 1. Puisque les valeurs propres figurent parmi les racines des polynômes annulateurs

$$\mathcal{R} \subset \mathcal{U}.$$

(b) Une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ admet deux valeurs propres comptées avec multiplicité λ, μ. Celles-ci sont déterminées comme les solutions du système

$$\begin{cases} \lambda + \mu = \operatorname{tr} M \\ \lambda\mu = \det M. \end{cases}$$

Pour alléger les notations, posons $p = (\operatorname{tr} M)/2$ et $q = \det M$. Les valeurs propres λ et μ sont les deux racines du polynôme

$$X^2 - pX + q$$

et en posant $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = p^2 - q$, ces racines sont

$$\lambda = p + \delta \text{ et } \mu = p - \delta$$

de sorte que

$$|\lambda|^2 = |p|^2 + |\delta|^2 + 2\operatorname{Re}(\overline{p}\delta) \text{ et}$$
$$|\mu|^2 = |p|^2 + |\delta|^2 - 2\operatorname{Re}(\overline{p}\delta).$$

On en déduit que la fonction f qui à $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ associe le réel

$$\left(|\lambda|^2 - 1\right)^2 + \left(|\mu|^2 - 1\right)^2 = \left(|\lambda|^2 + |\mu|^2\right)^2 - 2(|\lambda|^2 + |\mu|^2 + |\lambda\mu|^2 - 1)$$

s'exprime par opérations à partir de $\operatorname{tr} M$ et $\det M$ sous la forme d'une fonction continue.
Puisque $\mathcal{U} = f^{-1}(\{0\})$ avec $\{0\}$ fermé, $\mathcal{U}$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

(c) Soit $M \in \mathcal{U}$. La matrice M est trigonalisable et donc il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ et $T \in \mathcal{T}_2^+(\mathbb{C})$ telle que

$$M = PTP^{-1} \text{ avec } T = \begin{pmatrix} \lambda & \nu \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, |\lambda| = |\mu| = 1.$$

On peut écrire $\lambda = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ et $\mu = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$\alpha_n = 2\pi \frac{\lfloor n\alpha/2\pi \rfloor}{n} \text{ et } \beta_n = 2\pi \frac{\lfloor n\beta/2\pi \rfloor + 1}{n}$$

et considérons la matrice

$$M_n = PT_nP^{-1} \text{ avec } T_n = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_n} & \nu \\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta_n} \end{pmatrix}.$$

Par construction,

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_n} \neq \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta_n}$$

au moins pour n assez grand et ce même lorsque $\alpha = \beta$.
On en déduit que pour ces valeurs de n la matrice T_n est diagonalisable.
De plus, puisque

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_n}\right)^n = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta_n}\right)^n = 1$$

on a alors $T_n^n = I_2$ et donc $M_n \in \mathcal{R}$.
Enfin, on a évidemment $M_n \to M$.

(d) $\mathcal{U}$ est un fermé contenant $\mathcal{R}$ donc $\overline{\mathcal{R}} \subset \mathcal{U}$ et par double inclusion $\overline{\mathcal{R}} = \mathcal{U}$.

Exercice 28 : [énoncé]
Soit $A \in R_p$. La matrice A possède un déterminant extrait non nul d'ordre p. Par continuité du déterminant, au voisinage de A, toute matrice à ce même déterminant extrait non nul et est donc de rang supérieur à p. Ainsi la matrice A est intérieure à R_p.

Exercice 29 : [énoncé]
Si u est continue alors

$$A = \left\{x \in E \mid \left\|u(x)\right\| = 1\right\} = f^{-1}(\{1\})$$

est l'image réciproque du fermé $\{1\}$ par l'application continue $f = \|\cdot\| \circ u$. La partie A est donc un fermé relatif à E, c'est donc une partie fermée.

Inversement, si u n'est pas continu alors l'application u n'est par bornée sur $\left\{x \in E \mid \|x\| = 1\right\}$. Cela permet de construire une suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\|x_n\| = 1 \text{ et } \left\|u(x_n)\right\| > n.$$

En posant

$$y_n = \frac{1}{\left\|u(x_n)\right\|} x_n$$

on obtient une suite $(y_n) \in A^{\mathbb{N}}$ vérifiant $y_n \to 0$.
Or $0 \notin A$ donc la partie A n'est pas fermée.

Exercice 30 : [énoncé]

(a) Notons

$$A = \left\{x \in [0\,;1] \mid f(x) = x\right\}.$$

On a évidemment $A \subset \operatorname{Im} f$, mais inversement, pour $x \in \operatorname{Im} f$, on peut écrire $x = f(a)$ et alors

$$f(x) = f(f(a)) = f(a) = x.$$

Ainsi $\operatorname{Im} f \subset A$, puis, par double inclusion, $A = \operatorname{Im} f$.
On en déduit que A est un segment de $\mathbb{R}$ de la forme $[\alpha\,;\beta]$ car image d'un compact par une fonction réelle continue.

(b) Une fonction f d'allure suivante convient

(c) Soit f solution dérivable.
Si $\alpha = \beta$ alors f est constante égale à cette valeur commune.
Si $\alpha < \beta$ alors $f'(\alpha) = f_d'(\alpha) = 1$ car $f(x) = x$ sur $[\alpha\,;\beta]$.
Par suite, si $\alpha > 0$, f prend des valeurs strictement inférieur à α ce qui est contradictoire avec l'étude qui précède. On en déduit $\alpha = 0$.
De même on obtient $\beta = 1$ et on conclut $f : x \in [0\,;1] \mapsto x$.

Exercice 31 : [énoncé]

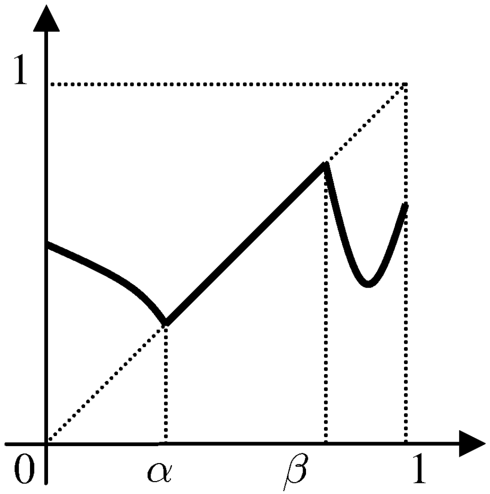
(a) Soit f solution. Formons

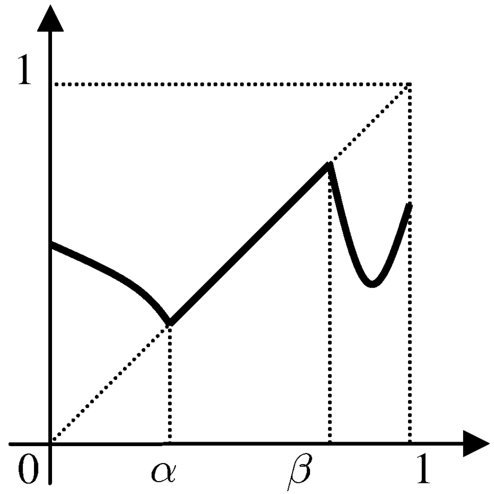
$$A = \left\{x \in [0\,;1] \mid f(x) = x\right\}.$$

On a évidemment $A \subset \operatorname{Im} f$, mais inversement, pour $x \in \operatorname{Im} f$, on peut écrire $x = f(a)$ et alors

$$f(x) = f(f(a)) = f(a) = x.$$

Ainsi $\operatorname{Im} f \subset A$, puis, par double inclusion, $A = \operatorname{Im} f$.





On en déduit que A est un segment de $\mathbb{R}$ de la forme $[\alpha\,;\beta]$ car c'est l'image d'un segment par une fonction réelle continue.
Pour tout $x \in [\alpha\,;\beta]$, $f(x) = x$ et pour tout $x \in [0\,;\alpha[\cup]\beta\,;1]$, $f(x) \in [\alpha\,;\beta]$.
Inversement, une fonction continue vérifiant les deux conditions précédente est solution.
Cela peut apparaître sous la forme d'une fonction ayant l'allure suivante

(b) Soit f solution dérivable.
Si $\alpha = \beta$ alors f est constante égale à cette valeur commune.
Si $\alpha < \beta$ alors $f'(\alpha) = f'_d(\alpha) = 1$ car $f(x) = x$ sur $[\alpha\,;\beta]$.
Par suite, si $\alpha > 0$, f prend des valeurs strictement inférieur à α ce qui est contradictoire avec l'étude qui précède. On en déduit $\alpha = 0$.
De même on obtient $\beta = 1$ et on conclut $f\colon x \in [0\,;1] \mapsto x$.

Exercice 32 : [énoncé]

(a) Par télescopage
$$\left(\sum_{k=0}^{n} u^k\right) \circ (u - \mathrm{Id}) = u^{n+1} - \mathrm{Id}$$
donc
$$v_n \circ (u - \mathrm{Id}) = \frac{1}{(n+1)}\big(u^{n+1} - \mathrm{Id}\big).$$

(b) Soit $x \in \operatorname{Im}(u - \mathrm{Id}) \cap \operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id})$. On peut écrire $x = u(a) - a$ et on a $u(x) = x$.
On en déduit
$$v_n \circ (u - \mathrm{Id})(a) = x.$$
Or
$$v_n \circ (u - \mathrm{Id})(a) = \frac{1}{n+1}\big(u^{n+1}(a) - a\big) \to 0$$
car
$$\left\|u^{n+1}(a) - a\right\| \leq \left\|u^{n+1}(a)\right\| + \|a\| \leq 2\|a\|.$$
On en déduit $x = 0$.

(c) Par la formule du rang
$$\dim \operatorname{Im}(u - \mathrm{Id}) + \dim \operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}) = \dim E$$
et puisque les deux espaces sont en somme directe, ils sont supplémentaires.

(d) Soit $z \in E$. On peut écrire $z = x + y$ avec $x \in \operatorname{Im}(u - \mathrm{Id})$ et $y \in \operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id})$.
On a alors $v_n(z) = v_n(x) + y$ avec, comme dans l'étude du b), $v_n(x) \to 0$. On en déduit $v_n(z) \to y$.
Ainsi la suite de fonctions (v_n) converge simplement vers la projection p sur $\operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id})$ parallèlement à $\operatorname{Im}(u - \mathrm{Id})$.

Puisque pour tout $x \in E$, on a

$$\left\|v_n(x)\right\| \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left\|u^k(x)\right\| \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\|x\| = \|x\|$$

on obtient à la limite $\left\|p(x)\right\| \leq \|x\|$. On en déduit que la projection p est continue puis que $\operatorname{Im}(u - \mathrm{Id}) = \operatorname{Ker} p$ est une partie fermée.

(e) Supposons la convergence simple de la suite de fonctions (v_n) et la fermeture de $\operatorname{Im}(u - \mathrm{Id})$.
Soit $z \in E$. Posons $y = \lim_{n\to+\infty} v_n(z)$ et $x = z - y$.
D'une part, puisque

$$u(v_n(z)) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u^{k+1}(z) = v_n(z) + \frac{1}{n+1}\left(u^{n+1}(z) - z\right)$$

on obtient à la limite

$$u(y) = y$$

car l'application linéaire u est continue et $\left\|u^{n+1}(z)\right\| \leq \|z\|$. On en déduit $y \in \operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id})$.
D'autre part

$$z - v_n(z) = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n}(\mathrm{Id} - u^k)(z)\right)$$

et

$$\operatorname{Im}(\mathrm{Id} - u^k) = \operatorname{Im}\left((\mathrm{Id} - u) \circ \sum_{\ell=0}^{k-1} u^{\ell-1}\right) \subset \operatorname{Im}(\mathrm{Id} - u) = \operatorname{Im}(u - \mathrm{Id})$$

donc $z - v_n(z) \in \operatorname{Im}(u - \mathrm{Id})$. On en déduit $x = \lim(z - v_n(z)) \in \operatorname{Im}(u - \mathrm{Id})$ car $\operatorname{Im}(u - \mathrm{Id})$ est fermé.
Finalement, on a écrit $z = x + y$ avec

$$x \in \operatorname{Im}(u - \mathrm{Id}) \text{ et } y \in \operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}).$$

Exercice 33 : [énoncé]
Soit $P \in O_n$. En notant $x_1 < \ldots < x_n$ ses racines, on peut écrire

$$P = \alpha(X - x_1)\ldots(X - x_n)$$

avec $\alpha \neq 0$.
Posons $y_1, \ldots, y_{n-1}$ les milieux des segments $[x_1\,;x_2], \ldots, [x_{n-1}\,;x_n]$.
Posons aussi $y_0 \in \left]-\infty\,;x_1\right[$ et $y_n \in \left]x_n\,;+\infty\right[$.
$P(y_0)$ est du signe de $(-1)^n\alpha$, $P(y_1)$ est du signe de $(-1)^{n-1}\alpha, \ldots$, $P(y_{n-1})$ est du signe de $(-1)\alpha$, $P(y_n)$ du signe de α. Pour simplifier l'exposé de ce qui suit, on va supposer $\alpha > 0$. La résolution se transposera aisément au cas $\alpha < 0$.
Considérons l'application

$$f_i \colon Q \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto Q(y_i).$$

L'application f_i est continue et donc $f_j^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ et $f_j^{-1}(\mathbb{R}_-^*)$ sont des parties ouvertes de $\mathbb{R}_n[X]$.
Considérons U l'intersection des ouverts

$$f_0^{-1}\left((-1)^n\mathbb{R}_+^*\right), f_1^{-2}\left((-1)^{n-1}\mathbb{R}_+^*\right), \ldots, f_n^{-1}(\mathbb{R}_+^*).$$

Les éléments de U sont des polynômes réels alternant de signe entre $y_0 < y_1 < \ldots < y_n$. Par application du théorème des valeurs intermédiaires, un tel polynôme admet n racines distinctes et donc est scindé à racines simples. Ainsi $U \subset O_n$. Or $P \in U$ et U est ouvert donc U est voisinage de P puis O_n est voisinage de P.
Au final O_n est ouvert car voisinage de chacun de ses éléments.
Dans le cas $n = 1$: $F_n = O_n$ et donc F_n est ouvert.
Dans le cas $n = 2$: F_n réunit les polynômes $P = aX^2 + bX + c$ avec $b^2 - 4ac > 0$ (que a soit égal à 0 ou non). L'application $P \mapsto b^2 - 4ac$ étant continue, on peut affirmer que F_n est encore ouvert car image réciproque d'un ouvert pas une application continue.
Dans le cas $n \geq 3$: $P_n = X(1 + X^2/n)$ est une suite de polynômes non scindés convergeant vers X scindé à racines simples. Par suite F_n n'est pas ouvert.

Exercice 34 : [énoncé]
Par l'absurde, supposons f discontinue en $a \in \mathbb{R}$. On peut alors construire une suite (x_n) vérifiant

$$x_n \to a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \left|f(x_n) - f(a)\right| \geq \varepsilon$$

avec $\varepsilon > 0$ fixé.
Soit $n \in \mathbb{N}$, puisque $f([a\,;x_n])$ est un segment contenant $f(a)$ et $f(x_n)$, il contient aussi l'intermédiaire $f(a) \pm \varepsilon$ (le $\pm$ étant déterminé par la position relative de $f(x_n)$ par rapport à $f(a)$). Il existe donc a_n compris entre a et x_n vérifiant

$$\left|f(a_n) - f(a)\right| = \varepsilon.$$

La suite (a_n) évolue dans le fermé $f^{-1}\left(\left\{f(a) + \varepsilon\right\}\right) \cup f^{-1}\left(\left\{f(a) - \varepsilon\right\}\right)$ et converge vers a donc $a \in f^{-1}\left(\left\{f(a) + \varepsilon\right\}\right) \cup f^{-1}\left(\left\{f(a) - \varepsilon\right\}\right)$ ce qui est absurde.

Exercice 35 : [énoncé]
Considérons l'application $\varphi\colon \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ déterminée par $\varphi(f) = f^2 - f$.
L'application φ est continue par opérations sur les fonctions continues, notamment parce que l'application $f \mapsto f \circ f$ est continue (elle s'obtient à partir du produit dans l'algèbre $\mathcal{L}(E)$).
Puisque $\{\tilde{0}\}$ est une partie fermée de $\mathcal{L}(E)$, l'ensemble $\mathcal{P} = \varphi^{-1}(\{\tilde{0}\})$ est un fermé relatif à $\mathcal{L}(E)$, donc un fermé de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 36 : [énoncé]
L'application $\lambda \mapsto \det(A - \lambda I_n)$ est polynomiale non nulle en λ donc possède un nombre fini de racine.
Par suite : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall \alpha > 0, B(A,\alpha) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$.

Exercice 37 : [énoncé]

(a) Soient $u, v \in \overline{F}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Il existe $(u_n), (v_n) \in F^{\mathbb{N}}$ telles que $u_n \to u$ et $v_n \to v$.
Comme $\lambda u_n + \mu v_n \to \lambda u + \mu v$ et $\lambda u_n + \mu v_n \in F$ on a $\lambda u + \mu v \in \overline{F}$.

(b) Soit H un hyperplan de E.
Si $\overline{H} = H$ alors H est fermé.
Sinon alors $\overline{H}$ est un sous-espace vectoriel de E, contenant H et distinct de H.
Puisque H est un hyperplan $\exists a \notin H$ tel que $H \oplus \mathrm{Vect}(a) = E$.
Soit $x \in \overline{H} \setminus H$. On peut écrire $x = h + \lambda a$ avec $h \in H$ et $\lambda \neq 0$. Par opération $a \in \overline{H}$ et puisque $H \subset \overline{H}$ on obtient $E \subset \overline{H}$. Finalement $\overline{H} = E$ et donc H est dense.

Exercice 38 : [énoncé]

(a) Pour tout $a \in E$ et tout $\varepsilon > 0$, $B(a,\varepsilon) \cap U \neq \emptyset$ car U est dense.
Soit $x \in B(a,\varepsilon) \cap U$. Puisque $B(a,\varepsilon) \cap U$ est ouvert, il existe $\alpha > 0$ tel que $B(x,\alpha) \subset B(a,\varepsilon) \cap U$ et puisque V est dense $B(x,\alpha) \cap V \neq \emptyset$. Par suite

$$B(a,\varepsilon) \cap (U \cap V) \neq \emptyset.$$

(b) Soient F et G deux fermés d'intérieurs vides.

$$C_E(F \cup G)^\circ = \overline{C_E(F \cup G)} = \overline{C_E F \cap C_E G}$$

avec $C_E F$ et $C_E G$ ouverts denses donc

$$\overline{C_E F \cap C_E G} = E$$

puis

$$(F \cup G)^\circ = \emptyset.$$

Exercice 39 : [énoncé]

(a) Posons

$$A = \{n \geq n_0 \mid a \geq u_n\}$$

A est une partie de $\mathbb{N}$, non vide car $n_0 \in A$ et majorée car $u_n \to +\infty$.
La partie A admet donc un plus grand élément $n \geq n_0$ et pour celui-ci $u_n \leq a < u_{n+1}$.
Par suite $|u_n - a| \leq |u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon$ car $n \geq n_0$.

(b) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$.
Puisque $u_{n+1} - u_n \to 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon$.
Puisque $v_n \to +\infty$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $x + v_p \geq u_{n_0}$.
Par l'étude précédente, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\left|u_n - (x + v_p)\right| \leq \varepsilon$ *i.e.* $\left|(u_n - v_p) - x\right| \leq \varepsilon$.
Par suite l'ensemble $\{u_n - v_p \mid n, p \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

(c) Remarquons que

$$A = \left\{\cos(\ln n) \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^*\right\} = \left\{\cos\big(\ln(n+1) - 2p\pi\big) \;\middle|\; n, p \in \mathbb{N}\right\}.$$

Posons $u_n = \ln(n+1)$ et $v_n = 2n\pi$. Les hypothèses précédentes sont réunies et donc

$$B = \{u_n - v_p \mid n, p \in \mathbb{N}\} = \left\{\ln(n+1) - 2p\pi \;\middle|\; n, p \in \mathbb{N}\right\}$$

est dense dans $\mathbb{R}$.
Soient $x \in [-1\,;1]$ et $\theta = \arccos x$.
Par densité, il existe une suite (θ_n) d'éléments de B convergeant vers θ et, par continuité de la fonction cosinus, la suite (x_n) de terme général $x_n = \cos(\theta_n)$ converge vers $x = \cos\theta$.
Or cette suite (x_n) est une suite d'éléments de $\cos(B) = A$ et donc A est dense dans $[-1\,;1]$.

Exercice 40 : [énoncé]
Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$.
Il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $1/n_0 \leq \varepsilon$.
Pour $a \geq \ln n_0$ et $n = E(\mathrm{e}^a) \geq n_0$, on a $\ln n \leq a \leq \ln(n+1)$.

On en déduit

$$|a - \ln n| \leq \ln(n+1) - \ln n = \ln(1+1/n) \leq 1/n \leq 1/n_0 \leq \varepsilon.$$

Puisque $m - x \xrightarrow[m \to +\infty]{} +\infty$, pour m assez grand, on a $a = m - x \geq \ln n_0$ et donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $|a - \ln n| \leq \varepsilon$ *i.e.*

$$|m - \ln n - x| \leq \varepsilon.$$

Par suite $\{m - \ln n \mid (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 41 : [énoncé]

(a) Il existe $h \in H$ tel que $h \neq 0$ car H n'est pas réduit à $\{0\}$.
Si $h > 0$ alors $h \in \{x \in H \mid x > 0\}$. Si $h < 0$ alors $-h \in \{x \in H \mid x > 0\}$.
Dans les deux cas $\{x \in H \mid x > 0\} \neq \emptyset$. De plus $\{x \in H \mid x > 0\} \subset \mathbb{R}$ et $\{x \in H \mid x > 0\}$ est minoré par 0 donc $a = \inf\{x \in H \mid x > 0\}$ existe dans $\mathbb{R}$.

(b) On suppose $a > 0$.
Si $a \notin H$ alors il existe $x, y \in H$ tel que $a < x < y < 2a$ et alors $y - x$ est élément de H et vérifie $0 < y - x < a$ ce qui contredit la définition de a. C'est absurde.
$a \in H$ donc $a\mathbb{Z} =< a > \subset H$.
Inversement, soit $x \in H$. On peut écrire $x = aq + r$ avec $q \in \mathbb{Z}$, $r \in [0\,;a[$ (en fait $q = E(x/a)$ et $r = x - aq$)
Puisque $r = x - aq$ avec $x \in H$ et $aq \in a\mathbb{Z} \subset H$ on a $r \in H$.
Si $r > 0$ alors $r \in \{x \in H \mid x > 0\}$ et $r < a$ contredit la définition de a.
Il reste $r = 0$ et donc $x = aq$. Ainsi $H \subset a\mathbb{Z}$ puis l'égalité.

(c) Puisque $\inf\{x \in H \mid x > 0\} = 0$, on peut affirmer que pour tout $\alpha > 0$, il existe $x \in H$ tel que $0 < x < \alpha$.
Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$. Montrons $H \cap B(a,\alpha) \neq \emptyset$ *i.e.* $H \cap]a - \alpha\,; a + \alpha[\neq \emptyset$
Il existe $x \in H$ tel que $0 < x < \alpha$. Posons $n = E(a/x)$. On a $a = nx + r$ avec $0 \leq r < \alpha$.
$nx \in < x > \subset H$ et $|a - nx| = r < \alpha$ donc $nx \in H \cap B(a,\alpha)$ et donc $H \cap B(a,\alpha) \neq \emptyset$.
Ainsi H est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 42 : [énoncé]

(a) On a

$$\begin{aligned}\{\cos(n) \mid n \in \mathbb{N}\} &= \{\cos(n) \mid n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\cos(n + 2k\pi) \mid n, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \cos(\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

Puisque $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ et c'est un sous-groupe dense car il n'est pas monogène puisque π n'est pas rationnel ; c'est en effet un résultat classique bien que en dehors du programme, les sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$ sont monogènes ou denses.
Pour tout $x \in [-1\,;1]$, il existe $\theta \in [0\,;\pi]$ tel que $\cos\theta = x$ et puisque $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite d'éléments $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ convergeant vers θ.
L'image de cette suite par la fonction continue cosinus détermine une suite d'élément de $\{\cos(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ convergeant vers x.

(b) En notant que les 2^p avec $p \in \mathbb{N}$ sont des naturels non nuls, on observe

$$\{\cos(p \ln 2) \mid p \in \mathbb{N}\} \subset \{\cos(\ln n) \mid n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Ainsi

$$\cos(\ln 2.\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}) \subset \{\cos(\ln n) \mid n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Si π et $\ln 2$ ne sont pas commensurables, on peut conclure en adaptant la démarche précédente. Si en revanche π et $\ln 2$ sont commensurables (ce qui est douteux...), on reprend l'idée précédente avec $\ln 3$ au lieu de $\ln 2$...
Assurément π et $\ln 3$ ne sont pas commensurables car s'ils l'étaient, $\ln 2$ et $\ln 3$ le seraient aussi ce qui signifie qu'il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $p \ln 2 = q \ln 3$ soit encore $2^p = 3^q$ ce qui est faux !

Exercice 43 : [énoncé]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La matrice A est trigonalisable donc il existe P inversible telle que $P^{-1}AP = T$ avec T triangulaire supérieure. Posons alors $T_p = T + \operatorname{diag}(1/p, 2/p, \ldots, n/p)$ et $A_p = PT_pP^{-1}$. Il est immédiat que $T_p \to T$ quand $p \to +\infty$ et donc $A_p \to A$. De plus, pour p assez grand, la matrice T_p est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux deux à deux distincts, cette matrice admet donc n valeurs propres et est donc diagonalisable. Il en est de même pour A_p qui lui est semblable. Ainsi toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est limite d'une suite de matrices diagonalisables.

Exercice 44 : [énoncé]

(a) Soit u une suite sommable. On a

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} |u_n| \to 0$$

donc pour tout $\alpha > 0$, il existe N tel que

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} |u_n| < \alpha.$$

Considérons alors v définie par $v_n = u_n$ si $n \leq N$ et $v_n = 0$ sinon.
On a $v \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ et $\|v - u\|_1 < \alpha$ donc $B(u,\alpha) \cap \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \neq \emptyset$.

(b) Non, en notant u la suite constante égale à 1, $B_\infty(u, 1/2) \cap \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \emptyset$.

Exercice 45 : [énoncé]
Soit f une fonction élément de E. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel A vérifiant

$$\int_A^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t \leq \varepsilon.$$

Considérons alors la fonction $\varphi\colon [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = 1$ pour $t \in [0\,;A]$, $\varphi(t) = 0$ pour $t \geq A+1$ et $\varphi(t) = 1 - (t - A)$ pour $t \in [A\,;A+1]$. La fonction $f\varphi$ est éléments de E_0 et

$$\|f - f\varphi\|_2 \leq \sqrt{\int_A^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t} \leq \varepsilon.$$

Ainsi E_0 est dense dans E.
Pour montrer maintenant que F est dense dans E, nous allons établir que F est dense dans E_0.
Soit f une fonction élément de E_0. Remarquons

$$\int_0^{+\infty} \left(f(t) - P(\mathrm{e}^{-t})\mathrm{e}^{-t^2/2}\right)^2 \mathrm{d}t \underset{u=\mathrm{e}^{-t}}{=} \int_0^1 \left(f(-\ln u)\mathrm{e}^{(\ln u)^2/2} - P(u)\right)^2 \frac{\mathrm{e}^{-(\ln u)^2}}{u}\,\mathrm{d}u.$$

La fonction $u \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-(\ln u)^2}}{u}$ est intégrable sur $]0\,;1]$ car $\sqrt{u}\frac{\mathrm{e}^{-(\ln u)^2}}{u} \xrightarrow[u\to 0]{} 0$.
La fonction $g\colon u \mapsto f(-\ln u)\mathrm{e}^{(\ln u)^2/2}$ peut-être prolongée par continuité en 0 car f est nulle en dehors d'un segment. Par le théorème de Weierstrass, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $\|g - P\|_{\infty,[0;1]} \leq \varepsilon$ et pour $\varphi\colon t \mapsto P(\mathrm{e}^{-t})\mathrm{e}^{-t^2/2}$ on a alors

$$\|f - \varphi\|_2 \leq \lambda\varepsilon \text{ avec } \lambda = \sqrt{\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(\ln u)^2}}{u}\,\mathrm{d}u}.$$

Cela permet de conclure à la densité proposée.

Exercice 46 : [énoncé]
Par l'absurde supposons $A \neq E$.
Il existe un élément $a \in E$ tel que $a \notin A$. Par translation du problème, on peut supposer $a = 0$.
Posons $n = \dim E$.
Si $\mathrm{Vect}(A)$ est de dimension strictement inférieure à n alors A est inclus dans un hyperplan de E et son adhérence aussi. C'est absurde car cela contredit la densité de A.
Si $\mathrm{Vect}(A)$ est de dimension n, on peut alors considérer $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E formée d'éléments de A.
Puisque $0 \notin A$, pour tout $x \in A$, on remarque : $\forall \lambda \in \mathbb{R}_-, -\lambda x \notin A$ (car sinon, par convexité, $0 \in A$).
Par convexité de A : $\forall \lambda_1,\dots,\lambda_n \geq 0, \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1 \implies \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n \in A$ et donc :
$\forall \lambda \in \mathbb{R}_-, \forall \lambda_1,\dots,\lambda_n \geq 0, \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1 \implies \lambda(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) \notin A$.
Ainsi $\forall \mu_1,\dots,\mu_n \leq 0, \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n \notin A$.
Or la partie $\{\mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n \mid \mu_i < 0\}$ est un ouvert non vide de A et donc aucun de ses éléments n'est adhérent à A. Cela contredit la densité de A.

Exercice 47 : [énoncé]
Soient $a < b \in A$.
Puisque $a, b \in A$, $\frac{a+b}{2} \in A$, puis $\frac{3a+b}{4} = \frac{a+(a+b)/2}{2} \in A$ et $\frac{a+3b}{4} \in A$ etc.
Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, montrons $\forall k \in \{0,\dots,2^n\}$, $\frac{ka+(2^n-k)b}{2^n} \in A$.
La propriété est immédiate pour $n = 0$.
Supposons la propriété vraie au rang $n \geq 0$.
Soit $k \in \{0,\dots,2^{n+1}\}$.
Cas k pair :
$k = 2k'$ avec $k' \in \{0,\dots,2^n\}$ et $\frac{ka+(2^{n+1}-k)b}{2^{n+1}} = \frac{k'a+(2^n-k')b}{2^n} \in A$ en vertu de l'hypothèse de récurrence.
Cas k impair :
$k = 2k'+1$ avec $k' \in \{0,\dots,2^n-1\}$ et

$$\frac{ka+(2^{n+1}-k)b}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{k'a+(2^n-k')b}{2^n} + \frac{(k'+1)a+(2^n-(k'+1))b}{2^n}\right) \in A$$

car par hypothèse de récurrence

$$\frac{k'a+(2^n-k')b}{2^n}, \frac{(k'+1)a+(2^n-(k'+1))b}{2^n} \in A.$$

La récurrence est établie.
Soit $x \in]\inf A\,;\sup A[$.
Il existe $a, b \in A$ tel que $x \in [a\,;b]$ ce qui permet d'écrire $x = \lambda a + (1-\lambda)b$.

Soit $k_n = E(2^n\lambda)$ et $x_n = \frac{k_n a + (2^n - k_n)b}{2^n}$.
On vérifie aisément que $x_n \to x$ car $2^n k \to \lambda$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $x_n \in A$
Ainsi A est dense dans $]\inf A\,;\sup A[$.

Exercice 48 : [énoncé]
Considérons l'ensemble $B = \ln A = \{\ln a \mid a \in A\}$.
Pour tout $x, y \in B$, $\frac{x+y}{2} = \frac{\ln a + \ln b}{2} = \ln\sqrt{ab} \in B$.
En raisonnant par récurrence, on montre que pour tout $x, y \in B$, on a la propriété

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{0, \dots, 2^n\}, \frac{kx + (2^n - k)y}{2^n} \in B.$$

Soit $x \in]\inf A\,;\sup A[$. Il existe $a, b \in A$ tels que $a < x < b$.
On a alors $\ln a < \ln x < \ln b$ avec $\ln a, \ln b \in B$.
On peut écrire $\ln x = \lambda \ln a + (1-\lambda)\ln b$ avec $\lambda \in]0\,;1[$.
Posons alors k_n la partie entière de $\lambda 2^n$ et $x_n = \exp\left(\frac{k_n}{2^n}\ln a + \left(1 - \frac{k_n}{2^n}\right)\ln b\right)$
Il est immédiat que $x_n \to x$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A$.
Si, dans cette suite, il existe une infinité d'irrationnels, alors x est limite d'une suite d'éléments de $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.
Sinon, à partir d'un certain rang, les termes de la suite x_n sont tous rationnels.
Le rapport x_{n+1}/x_n est alors aussi rationnel ; mais

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{k_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{k_n}{2^n}} \text{ avec } \frac{k_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{k_n}{2^n} = 0 \text{ ou } \frac{1}{2^{n+1}}.$$

S'il existe une infinité de n tels que $\frac{k_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{k_n}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}$ alors il existe une infinité de $n \in \mathbb{N}$ tels que

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2^n}} \in \mathbb{Q}$$

et puisque l'élévation au carré d'un rationnel est un rationnel, le nombre a/b est lui-même rationnel. Or les racines carrées itérés d'un rationnel différent de 1 sont irrationnelles à partir d'un certain rang.
Il y a absurdité et donc à parti d'un certain rang $k_{n+1} = 2k_n$.
Considérons à la suite (x'_n) définie par

$$x'_n = \exp\left(\frac{k'_n}{2^n}\ln a + \left(1 - \frac{k'_n}{2^n}\right)\ln b\right) \text{ avec } k'_n = k_n + 1.$$

On obtient une suite d'éléments de A, convergeant vers x et qui, en vertu du raisonnement précédent, est formée d'irrationnels à partir d'un certain rang.

Exercice 49 : [énoncé]
$N_\varphi\colon E \to \mathbb{R}_+$ est bien définie et on vérifie immédiatement

$$N_\varphi(\lambda f) = |\lambda| N_\varphi(f) \text{ et } N_\varphi(f+g) \le N_\varphi(f) + N_\varphi(g).$$

Il reste à étudier la véracité de l'implication

$$N_\varphi(f) = 0 \implies f = 0.$$

Supposons : $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^*)$ dense dans $[0\,;1]$.
Si $N_\varphi(f) = 0$ alors $f\varphi = 0$ et donc pour tout $x \in \varphi^{-1}(\mathbb{R}^*)$, on a $f(x) = 0$ car $\varphi(x) \neq 0$.
Puisque la fonction continue f est nulle sur la partie $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^*)$ dense dans $[0\,;1]$, cette fonction est nulle sur $[0\,;1]$.
Supposons : $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^*)$ non dense dans $[0\,;1]$.
Puisque le complémentaire de l'adhérence est l'intérieur du complémentaire, la partie $\varphi^{-1}(\{0\})$ est d'intérieur non vide et donc il existe $a < b \in [0\,;1]$ tels que $[a\,;b] \subset \varphi^{-1}(\{0\})$.
Considérons la fonction f définie sur $[0\,;1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} (x-a)(b-x) & \text{si } x \in [a\,;b] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction f est continue sur $[0\,;1]$, ce n'est pas la fonction nulle mais en revanche la fonction $f\varphi$ est la fonction nulle. Ainsi on a formé un élément f non nul de E tel que $N_\varphi(f) = 0$. On en déduit que N_φ n'est pas une norme.

Exercice 50 : [énoncé]
Soit $[a\,;b] \subset [1\,;+\infty[$ avec $a < b$. Pour établir la densité de A, montrons que $A \cap [a\,;b]$ est non vide.
Considérons $q > 1$ tel que $qa \le b$.
Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \ge N \implies \frac{u_{n+1}}{u_n} \le q.$$

Considérons alors

$$E = \left\{ m \in \mathbb{N} \,\middle|\, m > N \text{ et } \frac{u_m}{u_N} \le b \right\}$$

E est une partie de $\mathbb{N}$, non vide (car $N+1 \in E$) et majorée (car $u_n \to +\infty$). La partie E possède donc un plus grand élément M. Pour celui-ci, on a

$$\frac{u_M}{u_N} \le b \text{ et } \frac{u_{M+1}}{u_N} > b.$$

Or
$$u_{M+1} \leq q u_M$$
donc
$$\frac{u_M}{u_N} > \frac{b}{q} \geq a.$$
Ainsi u_M/u_N est un élément de $A \cap [a\,;b]$.

Exercice 51 : [énoncé]
Soient $x \in E$ et $r > 0$.
Puisque A est une partie dense, $B(a,r) \cap A \neq \emptyset$. On peut donc introduire $x \in B(a,r) \cap A$. Or par intersection d'ouverts, $B(a,r) \cap A$ est aussi une partie ouverte et donc il existe $\alpha > 0$ tel que $B(x,\alpha) \subset B(a,r) \cap A$. Puisque la partie B est dense, $B(x,\alpha) \cap B \neq \emptyset$ et finalement $B(a,r) \cap A \cap B \neq \emptyset$.
On peut donc conclure que $A \cap B$ est une partie dense de E.

Exercice 52 : [énoncé]
Soit f une fonction solution.
On a $f(0+0) = f(0) + f(0)$ donc $f(0) = 0$
Par une récurrence facile
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f(nx) = nf(x).$$
De plus, puisque $f(-x+x) = f(-x) + f(x)$, on a $f(-x) = -f(x)$.
Par suite
$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, f(nx) = nf(x).$$
Pour $x = p/q \in \mathbb{Q}$, $f(x) = pf(1/q)$ et $f(1) = qf(1/q)$ donc $f(x) = ax$ avec $a = f(1)$.
Les fonctions $x \mapsto f(x)$ et $x \mapsto ax$ sont continues et coïncident sur $\mathbb{Q}$ partie dense dans $\mathbb{R}$ donc ces deux fonctions sont égales sur $\mathbb{R}$.
Au final f est une fonction linéaire.
Inversement, une telle fonction est évidemment solution.

Exercice 53 : [énoncé]

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque
$$u_n = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n} \to x$$
avec $u_n \in \mathcal{D}$, la partie $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

(b) Supposons que f s'annule en 0 et 1.
$$\frac{1}{2}\big(f(-x) + f(x)\big) = f(0)$$
donc la fonction$f$ est impaire.
Par récurrence double, montrons $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = 0$.
Pour $n = 0$ ou $n = 1$: ok
Supposons la propriété établie aux rangs $n \geq 1$ et $n - 1 \geq 0$.
$$\frac{f(n+1) + f(n-1)}{2} = f(n)$$
donne en vertu de l'hypothèse de récurrence : $f(n+1) = 0$.
Récurrence établie.
Par l'imparité
$$\forall p \in \mathbb{Z}, f(p) = 0.$$
Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, montrons
$$\forall p \in \mathbb{Z}, f\left(\frac{p}{2^n}\right) = 0.$$
Pour $n = 0$: ok
Supposons la propriété établie au rang $n \in \mathbb{Z}$.
Soit $p \in \mathbb{Z}$,
$$f\left(\frac{p}{2^{n+1}}\right) = f\left(\frac{1}{2}\left(0 + \frac{p}{2^n}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(f(0) + f\left(\frac{p}{2^n}\right)\right) \underset{HR}{=} 0.$$
Récurrence établie.
Puisque f est continue et nulle sur une partie
$$\mathcal{D} = \left\{ \frac{p}{2^n} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$
dense dans $\mathbb{R}$, f est nulle sur $\mathbb{R}$.

(c) Posons $\beta = f(0)$ et $\alpha = f(1) - \beta$.
La fonction $g\colon x \mapsto f(x) - \alpha x + \beta$ est continue et vérifie la propriété
$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}\big(g(x) + g(y)\big)$$
donc g est nulle puis f affine.

Exercice 54 : [énoncé]
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Si A est inversible

$$\chi_{AB}(\lambda) = \det(\lambda I_n - AB) = \det(A)\det(\lambda A^{-1} - B)$$

donc

$$\chi_{AB}(\lambda) = \det(\lambda A^{-1} - B)\det A = \det(\lambda I_n - BA) = \chi_{BA}(\lambda).$$

Ainsi les applications continues $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto \chi_{AB}(\lambda)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto \chi_{BA}(\lambda)$ coïncident sur la partie $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, elles sont donc égales sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Ainsi pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\chi_{AB}(\lambda) = \chi_{BA}(\lambda)$ et donc $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Exercice 55 : [énoncé]
On sait

$${}^t\big(\mathrm{Com}(A)\big)A = \det(A)\mathrm{I}_n$$

donc

$$\det\big(\mathrm{Com}(A)\big)\det(A) = \big(\det(A)\big)^n.$$

Si A est inversible on obtient

$$\det\big(\mathrm{Com}(A)\big) = \det(A)^{n-1}.$$

Puisque l'application $A \mapsto \det\big(\mathrm{Com}(A)\big)$ est continue et qu'elle coïncide avec l'application elle aussi continue $A \mapsto \big(\det(A)\big)^{n-1}$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ qui est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on peut affirmer $\det\big(\mathrm{Com}(A)\big) = \big(\det(A)\big)^{n-1}$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 56 : [énoncé]

(a) Si A est inversible alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}{}^t(\mathrm{Com}\,A)$$

et donc

$$\mathrm{Com}\,A = \det(A)^t\big(A^{-1}\big).$$

De même

$$\mathrm{Com}(P^{-1}AP) = \det(A)^t(P^{-1}A^{-1}P)$$

ce qui donne

$$\mathrm{Com}(P^{-1}AP) = {}^tP\,\mathrm{Com}\,A^t(P^{-1}).$$

Les fonctions $A \mapsto \mathrm{Com}(P^{-1}AP)$ et $A \mapsto {}^tP\,\mathrm{Com}\,A^t(P^{-1})$ sont continues sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et coïncident sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ partie dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, c'est deux fonctions sont donc égales. Ainsi la relation

$$\mathrm{Com}(P^{-1}AP) = {}^tP\,\mathrm{Com}\,A^t(P^{-1})$$

est valable pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

(b) C'est immédiat sachant que ${}^t(P^{-1})$ est l'inverse de ${}^tP$.

Exercice 57 : [énoncé]

(a) On sait

$$\tilde{A}A = A\tilde{A} = \det A.I_n.$$

Si A est inversible alors

$$\det\tilde{A}.\det A = (\det A)^n$$

donne

$$\det\tilde{A} = (\det A)^{n-1}.$$

L'application $A \mapsto \det\tilde{A}$ étant continue et coïncidant avec l'application elle aussi continue $A \mapsto (\det A)^{n-1}$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ qui est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on peut assurer que $\det\tilde{A} = (\det A)^{n-1}$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(b) Si A est inversible alors $\tilde{A}$ aussi donc

$$\mathrm{rg}(A) = n \implies \mathrm{rg}(\tilde{A}) = n.$$

Si $\mathrm{rg}(A) \le n-2$ alors A ne possède pas de déterminant extrait non nul d'ordre $n-1$ et donc $\tilde{A} = 0$. Ainsi

$$\mathrm{rg}(A) \le n-2 \implies \mathrm{rg}(\tilde{A}) = 0.$$

Si $\mathrm{rg}(A) = n-1$ alors $\dim\mathrm{Ker}\,A = 1$ or $A\tilde{A} = \det A.I_n = 0$ donne $\mathrm{Im}\,\tilde{A} \subset \mathrm{Ker}\,A$ et donc $\mathrm{rg}(\tilde{A}) \le 1$. Or puisque $\mathrm{rg}(A) = n-1$, A possède un déterminant extrait d'ordre $n-1$ non nul et donc $\tilde{A} \ne O$. Ainsi

$$\mathrm{rg}(A) = n-1 \implies \mathrm{rg}(\tilde{A}) = 1.$$

(c) Soit P une matrice inversible. Pour tout $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$,

$$(P^{-1}\tilde{A}P)(P^{-1}AP) = \det A.I_n$$

et $P^{-1}AP$ inversible donc

$$P^{-1}\tilde{A}P = \widetilde{P^{-1}AP}.$$

Ainsi
$$\tilde{A} = P\widetilde{P^{-1}AP}P^{-1}.$$
Les applications $A \mapsto \tilde{A}$ et $A \mapsto P\widetilde{P^{-1}AP}P^{-1}$ sont continues et coïncident sur la partie dense $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ elles sont donc égales sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Si A et B sont semblables alors il existe P inversible vérifiant $P^{-1}AP = B$ et par la relation ci-dessus $P^{-1}\tilde{A}P = \widetilde{P^{-1}AP} = \tilde{B}$ donc $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ sont semblables.

(d) Si A est inversible alors $\tilde{A} = \det(A)A^{-1}$ et
$$\tilde{\tilde{A}} = \det(\tilde{A})\tilde{A}^{-1} = \det(A)^{n-2}A.$$
Par coïncidence d'applications continues sur une partie dense, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
$$\tilde{\tilde{A}} = \det(A)^{n-2}A.$$

Exercice 58 : [énoncé]
Cas $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$
On sait
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}{}^t(\mathrm{Com}\,A), B^{-1} = \frac{1}{\det B}{}^t(\mathrm{Com}\,B)$$
et
$$(AB)^{-1} = \frac{1}{\det(AB)}{}^t(\mathrm{Com}\,AB) = B^{-1}A^{-1}$$
donc
$$(AB)^{-1} = \frac{1}{\det(AB)}{}^t(\mathrm{Com}\,AB) = \frac{1}{\det A \det B}{}^t(\mathrm{Com}\,B){}^t(\mathrm{Com}\,A)$$
puis
$${}^t(\mathrm{Com}(AB)) = {}^t(\mathrm{Com}(A)\,\mathrm{Com}(B))$$
et enfin
$$\mathrm{Com}(AB) = \mathrm{Com}(A)\,\mathrm{Com}(B).$$
Cas général
Posons
$$A_p = A + \frac{1}{p}I_n \text{ et } B_p = B + \frac{1}{p}I_n.$$
Pour p assez grand $A_p, B_p \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et donc
$$\mathrm{Com}(A_pB_p) = \mathrm{Com}(A_p)\,\mathrm{Com}(B_p).$$
Or la fonction $M \to \mathrm{Com}\,M$ est continue donc par passage à la limite
$$\mathrm{Com}(AB) = \mathrm{Com}(A)\,\mathrm{Com}(B).$$

Exercice 59 : [énoncé]

(a) Sachant $(u_{n+1} - u_n)$ de limite nulle, pour $\varepsilon = (b-a)/2 > 0$, il existe un rang $p \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq p \implies \left|u_{n+1} - u_n\right| \leq \varepsilon$$
et alors
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+p+1} - u_{n+p}| \leq \varepsilon.$$
Sachant (v_p) de limite $+\infty$, le terme $u_p - v_q$ tend vers $-\infty$ lorsque q tend vers $+\infty$ et il existe donc un rang q tel que $u_p - v_q \leq a$.
Pour ces paramètres p et q, la suite de terme général $w_n = u_{n+p} - v_q$ vérifie les conditions requises.

(b) Posons
$$E = \left\{u_n - v_p \;\middle|\; (n,p) \in \mathbb{N}^2\right\}.$$
La suite (u_n) étant de limite $+\infty$, la suite (w_n) l'est aussi et l'ensemble A des $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $w_n \leq a$ est une partie de $\mathbb{N}$ non vide et majorée. On peut alors introduire le plus grand entier N vérifiant $w_N \leq a$. On vérifie
$$w_{N+1} > a \quad \text{et} \quad w_{N+1} \leq w_N + \underbrace{|w_{N+1} - w_N|}_{\leq (b-a)/2} < b.$$
On a ainsi établi :
$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, a < b \implies \exists x \in E, x \in \left]a\,;b\right[.$$
La partie E est donc dense dans $\mathbb{R}$.

(c) Introduisons $(v_p) = (2p\pi)$ de limite $+\infty$. La partie E est dense dans $\mathbb{R}$ et l'image de celle-ci par la fonction sinus est $S = \left\{\sin(u_n) \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$.
Cette partie est incluse dans le fermé $[-1\,;1]$ et donc $\overline{S}$ aussi.
Inversement, tout élément de $[-1\,;1]$ est le sinus d'un angle θ et il existe une suite d'éléments de E de limite θ. Par continuité de la fonction sinus, il existe une suite d'éléments de S de limite $\sin\theta$. Au final,
$$\overline{S} = [-1\,;1].$$

(d) Introduisons $(v_p) = (p)$ de limite $+\infty$. La partie E est dense dans $\mathbb{R}$ et l'image de celle-ci par la fonction $f\colon x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ est $F = \left\{u_n - \lfloor u_n \rfloor \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$.
Cette partie est incluse dans le fermé $[0\,;1]$ et donc $\overline{F}$ aussi.
Inversement, tout élément de $]0\,;1[$ est limite d'une suite d'éléments de E. Les termes de cette suite appartiennent à $]0\,;1[$ à partir d'un certain rang et sont donc invariants par f : ils appartiennent à F. Ainsi
$$]0\,;1[\subset \overline{F}.$$

Enfin, $\overline{F}$ étant une partie fermée, on a aussi

$$[0\,;1] \subset \overline{F}$$

puis l'égalité.

(e) L'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est

$$\mathrm{Adh}(u) = \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \overline{\{u_n \mid n \geq N\}}.$$

Par l'étude qui précède

$$\overline{\{u_n \mid n \geq N\}} = [0\,;1]$$

et l'ensemble des valeurs d'adhérence de u est exactement[1] $[0\,;1]$.

Exercice 60 : [énoncé]

Par le théorème de Weierstrass, il existe une suite (Q_n) de fonctions polynomiales telles $N_\infty(Q_n - f) \to 0$.

On a alors

$$\int_a^b Q_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Posons

$$P_n(t) = Q_n(t) - \frac{1}{b-a}\int_a^b Q_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

On vérifie alors sans peine que

$$\int_a^b P_n(t)\,\mathrm{d}t = 0 \text{ et } N_\infty(f - P_n) \to 0.$$

Exercice 61 : [énoncé]

Par le théorème de Weierstrass, il existe une suite (Q_n) de fonctions polynomiales telles $N_\infty(Q_n - f) \to 0$. Posons $m_n = \inf_{t\in[a;b]} Q_n(t) = Q_n(t_n)$ pour un certain $t_n \in [a\,;b]$. Montrons que $m_n \to m = \inf_{t\in[a;b]} f$. Notons que $\inf_{t\in[a;b]} f = f(t_\infty)$ pour un certain $t_\infty \in [a\,;b]$. Pour tout $\varepsilon > 0$, pour n assez grand, $N_\infty(Q_n - f) \leq \varepsilon$ donc $m_n = Q_n(t_n) \geq f_n(t_n) - \varepsilon \geq m - \varepsilon$ et $m = f(t_\infty) \geq Q_n(t_\infty) - \varepsilon \geq m_n - \varepsilon$ donc $|m_n - m| \leq \varepsilon$. Ainsi $m_n \to m$. Il suffit ensuite de considérer $P_n = Q_n - m_n + m$ pour obtenir une solution au problème posé.

1. L'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite n'est pas immédiatement l'adhérence de l'ensemble de ses termes, par exemple, pour $u_n = n$, la suite (u_n) n'a pas de valeurs d'adhérence !

Exercice 62 : [énoncé]

Par le théorème de Weierstrass, il existe une suite (Q_n) de fonctions polynomiales telle $N_\infty(Q_n - f') \to 0$.

Posons alors $P_n(x) = f(a) + \int_a^x Q_n(t)\,\mathrm{d}t$. L'inégalité $\left|P_n(x) - f(x)\right| \leq \int_a^x \left|f'(t) - Q_n'(t)\right|\mathrm{d}t$ permet d'établir que $N_\infty(f - P_n) \to 0$ et puisque $P_n' = Q_n$, la suite (P_n) est solution du problème posé.

Exercice 63 : [énoncé]

(a) On a

$$\sum_{k=0}^n B_{n,k}(x) = \bigl(x + (1-x)\bigr)^n = 1.$$

On a

$$\sum_{k=0}^n kB_{n,k}(x) = nx$$

via $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ et la relation précédente

De manière semblable

$$\sum_{k=0}^n k^2 B_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^n k(k-1)B_{n,k}(x) + \sum_{k=0}^n kB_{n,k}(x) = nx(1 + (n-1)x).$$

(b) On a

$$n^2\alpha^2 \sum_{k\in A} B_{n,k}(x) \leq \sum_{k\in A}(k - nx)^2 B_{n,k}(x) \leq \sum_{k\in[\![0;n]\!]} (k-nx)^2 B_{n,k}(x)$$

car les $B_{n,k}$ sont positifs sur $[0\,;1]$.

Par suite

$$n^2\alpha^2 \sum_{k\in A} B_{n,k}(x) \leq nx(1-x)$$

d'où

$$\sum_{k\in A} B_{n,k}(x) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}.$$

(c) Pour tout $\varepsilon > 0$, par l'uniforme continuité de f, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [0\,;1], |x - y| \leq \alpha \implies \left|f(x) - f(y)\right| \leq \varepsilon.$$

On a alors

$$\left|f(x) - f_n(x)\right| \leq \sum_{x\in A}\left|f(x) - f(k/n)\right|B_{n,k}(x) + \sum_{x\in B}\left|f(x) - f(k/n)\right|B_{n,k}(x)$$

donc

$$\left|f(x)-f_n(x)\right| \le 2\|f\|_\infty \sum_{x\in A} B_{n,k}(x) + \sum_{x\in B} \varepsilon B_{n,k}(x) \le \frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}+\varepsilon.$$

Pour n assez grand, on a

$$\|f\|_\infty/2n\alpha^2 \le \varepsilon$$

et donc $\left|f(x)-f_n(x)\right| \le 2\varepsilon$ uniformément en x.

Exercice 64 : [énoncé]

(a) On a

$$\int_0^1 t(1-t^2)^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2(n+1)}.$$

On en déduit

$$a_n = 2\int_0^1 (1-t^2)^n\,\mathrm{d}t \ge 2\int_0^1 t(1-t^2)^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}.$$

(b) Sur $[\alpha\,;1]$,

$$\left|\varphi_n(x)\right| \le \frac{(1-\alpha^2)^n}{a_n} \le (n+1)(1-\alpha^2)^n \to 0.$$

(c) Sur le compact $[-1\,;1]$, f est uniformément continue car f est continue. Ainsi :

$$\forall \varepsilon>0, \exists \alpha>0, \forall x,y\in[-1\,;1], |x-y|\le\alpha \implies \left|f(x)-f(y)\right|\le\varepsilon.$$

Pour $\alpha' = \min(\alpha, 1/2)$, on a pour tous $x,y\in\mathbb{R}$ tels que $|x-y|\le\alpha'$
Si $x,y\in[-1\,;1]$ alors

$$\left|f(x)-f(y)\right|\le\varepsilon.$$

Sinon $x,y\in[1/2\,;+\infty[$ ou $x,y\in\,]-\infty\,;-1/2]$ et alors

$$\left|f(x)-f(y)\right| = 0 \le \varepsilon.$$

(d) On a

$$f_n(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(u)\varphi_n(x-u)\,\mathrm{d}u.$$

Or

$$\varphi_n(x-u) = \sum_{k=0}^{2n} a_k(u)x^k$$

donc

$$f_n(t) = \sum_{k=0}^{2n}\left(\int_{x-1}^{x+1} f(u)a_k(u)\,\mathrm{d}u\right)x^k.$$

Mais

$$\int_{x-1}^{x+1} f(u)a_k(u)\,\mathrm{d}u = \int_{-1/2}^{1/2} f(u)a_k(u)\,\mathrm{d}u$$

pour $x\in[-1/2\,;1/2]$ car $x-1\le -1/2$ et $x+1\ge 1/2$ alors que f est nulle en dehors que $[-1/2\,;1/2]$. Il s'ensuit que f_n est polynomiale.

(e) On observe que

$$\int_{-1}^{1}\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

et la relation proposée est alors immédiate sur $[-1/2\,;1/2]$.

(f) On a

$$\forall\varepsilon>0,\exists\alpha>0,\forall x,y\in\mathbb{R}, |x-y|\le\alpha \implies \left|f(x)-f(y)\right|\le\varepsilon$$

et alors

$$\left|f(x)-f_n(x)\right| \le \int_{-\alpha}^{\alpha}\left|f(x)-f(x-t)\right|\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t + 4\|f\|_\infty\int_\alpha^1\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t \le \varepsilon + 4\|f\|_\infty\int_\alpha^1 \varphi_n$$

Or

$$\int_\alpha^1 \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t \to 0$$

donc pour n assez grand

$$4\|f\|_\infty\int_\alpha^1\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t\le\varepsilon$$

et alors

$$\left|f(x)-f_n(x)\right|\le 2\varepsilon.$$

(g) Il suffit de commencer par approcher la fonction $x\mapsto f(2ax)$ qui vérifie les conditions de la question précédente.

(h) Soit $A>0$ tel que $[a\,;b]\subset[-A\,;A]$. Il suffit de prolonger f par continuité de sorte qu'elle soit nulle en dehors de $[-A\,;A]$.

Exercice 65 : [énoncé]

(a) Par le théorème de Weierstrass, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\|f - P\|_\infty \leq \varepsilon$.

$$0 \leq \int_a^b f^2 = \int_a^b f(f-P) + \int_a^b fP = \int_a^b f(f-P) \leq (b-a)\|f\|_\infty \varepsilon.$$

En faisant $\varepsilon \to 0$, on obtient $\int_a^b f^2 = 0$ et donc $f = 0$.

(b) L'intégrale étudiée est bien définie. Par intégration par parties,

$$(n+1)I_n = (1-\mathrm{i})I_{n+1}.$$

Or $I_0 = \frac{1+\mathrm{i}}{2}$ donc

$$I_n = \frac{(1+\mathrm{i})^{n+1}}{2^{n+1}} n!$$

(c) $I_{4p+3} \in \mathbb{R}$ donc

$$\int_0^{+\infty} x^{4p+3} \sin(x) \mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x = 0$$

puis

$$\int_0^{+\infty} u^p \sin(u^{1/4}) \mathrm{e}^{-u^{1/4}} \,\mathrm{d}u = 0$$

pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 66 : [énoncé]

(a) Supposons f constante égale à C.

$$\int_a^b f(x)\left|\sin(nx)\right| \mathrm{d}x = C \int_a^b \left|\sin(nx)\right| \mathrm{d}x.$$

Posons $p = \left\lfloor \frac{an}{\pi} \right\rfloor + 1$ et $q = \left\lfloor \frac{bn}{\pi} \right\rfloor$.

$$\int_a^b \left|\sin(nx)\right| \mathrm{d}x = \int_a^{\frac{p\pi}{n}} \left|\sin(nx)\right| \mathrm{d}x + \sum_{k=p+1}^{q} \int_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} \left|\sin(nx)\right| \mathrm{d}x + \int_{\frac{q\pi}{n}}^b \left|\sin(nx)\right| \mathrm{d}x.$$

On a

$$\left|\int_a^{\frac{p\pi}{n}} \left|\sin(nx)\right| \mathrm{d}x\right| \leq \frac{\pi}{n}$$

donc

$$\int_a^{\frac{p\pi}{n}} \left|\sin(nx)\right| \mathrm{d}x \to 0$$

et aussi

$$\int_{\frac{q\pi}{n}}^b \left|\sin(nx)\right| \mathrm{d}x \to 0.$$

De plus

$$\sum_{k=p+1}^{q} \int_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} \left|\sin(nx)\right| \mathrm{d}x = \frac{(q-p)}{n} \int_0^\pi \sin t \,\mathrm{d}t = \frac{2(q-p)}{n} \to \frac{2(b-a)}{\pi}.$$

Ainsi

$$\int_a^b \left|\sin(nx)\right| \mathrm{d}x \to \frac{2}{\pi}(b-a)$$

puis

$$\int_a^b f(x)\left|\sin(nx)\right| \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x.$$

(b) Supposons f en escalier.
Soit $a_0, \dots, a_n$ une subdivision adaptée à f.
Par l'étude qui précède,

$$\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\left|\sin(nx)\right| \mathrm{d}x \to \frac{2}{\pi} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f.$$

Puis en sommant par la relation de Chasles

$$\int_a^b f(x)\left|\sin(nx)\right| \mathrm{d}x \to \frac{2}{\pi} \int_a^b f.$$

(c) Supposons enfin f continue par morceaux.
Pour $\varepsilon > 0$, il existe φ en escalier vérifiant

$$\|f - \varphi\|_{\infty,[a;b]} \leq \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Puisque

$$\int_a^b \varphi(x)\left|\sin(nx)\right| \mathrm{d}x \to \frac{2}{\pi} \int_a^b \varphi$$

pour n assez grand, on a

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\left|\sin(nx)\right| \mathrm{d}x - \frac{2}{\pi}\int_a^b \varphi\right| \leq \varepsilon.$$

Or

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\left|\sin(nx)\right| \mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\left|\sin(nx)\right| \mathrm{d}x\right| \leq \varepsilon$$

et

$$\left|\int_a^b \varphi - \int_a^b f\right| \leq \varepsilon$$

donc

$$\left|\int_a^b f(x)\bigl|\sin(nx)\bigr|\,\mathrm{d}x - \frac{2}{\pi}\int_a^b f\right| \leq 2\varepsilon + \frac{2}{\pi}\varepsilon.$$

Ainsi

$$\int_a^b f(x)\bigl|\sin(nx)\bigr|\,\mathrm{d}x \to \frac{2}{\pi}\int_a^b f.$$